De aanvaller en de verdediger in het spel RISK

S.J. Wierda/J.P. Helmich
Vakgroep Econometrie, RU Groningen

De verdediger in het kansspel RISK [1] kan in een bepaalde aanval, uitgaande van voldoende legers, kiezen of hij met twee dobbelstenen zal werpen of met één dobbelsteen. Dit artikel gaat in op de kansen van aanvaller en verdediger op bepaalde worpen en bijbehorende verliezen. Ten eerste worden de kansen beschreven die de aanvaller heeft op een bepaalde worp en, gegeven die worp, de kansen die de verdediger heeft om nul, één of twee legers te verliezen. Vervolgens worden, op basis van het voorafgaande, zeven strategieën opgesteld die de verdediger voorschrijven wanneer hij met één steen moet verdedigen en wanneer met twee stenen. Voor iedere strategie wordt de kansverdeling van het verlies van de aanvaller en van de verdediger opgesteld. Dit geeft de verdediger een handreiking voor het nemen van verstandige beslissingen.

Inleiding

Het kansspel RISK wordt gespeeld op een wereldkaart waarop een aantal gebieden staat afgebeeld. Iedere speler krijgt vooraf een aantal gebieden toegewezen, een aantal legers dat over die gebieden wordt verdeeld en een opdracht, die alleen hij kent. De opdrachten variëren van het vernietigen van de legers van een medespeler tot het veroveren van bepaalde continenten of het veroveren van een bepaald aantal gebieden. De speler die het eerst zijn opdracht heeft vervuld is winnaar.

In dit artikel zal niet worden ingegaan op allerhande strategieën die kunnen worden gehanteerd om het spel te winnen. We zullen ons richten op strategieën van spelers wat betreft het werpen met dobbelstenen. In het bijzonder zal worden nagegaan welke kansen voor aanvaller en verdediger in een bepaalde aanval een rol spelen. Eerst zullen we beschrijven hoe het aanvallen en verdedigen in zijn werk gaat.

Een speler kan, als hij aan de beurt is, besluiten die beurt te gebruiken voor één of meerdere aanvallen. Een aanval kan ondernomen worden vanuit een gebied waarop meer dan één leger staat, en richt zich op een aangrenzend gebied. De aanvaller kondigt aan welk gebied, vanuit welk gebied, en met hoeveel legers hij wil aanvallen. Het aantal legers dat wordt ingezet bepaalt het aantal dobbelstenen waarmee de aanvaller mag gooien. Het aantal dobbelstenen is minimaal één en maximaal drie. Nadat de aanvaller heeft gegooid, bepaalt de verdediger met hoeveel stenen hij zal verdedigen. Het aantal stenen waarmee wordt verdedigd bedraagt één of twee. Na het gooien van de stenen worden de stenen met de meeste punten met elkaar vergeleken: de hoogste steen van de aanvaller tegen de hoogste steen van de verdediger. Degene die de hoogste steen heeft, wint één leger van de tegenpartij. Dit leger wordt van het gebied van de verliezer afgehaald en gaat terug in de doos met legers. Wanneer de verdediger met twee stenen heeft verdedigd, worden de volgende twee hoogste stenen met elkaar vergeleken en ook uit deze vergelijking wordt de verliezer bepaald. Zijn de dobbelstenen in waarde even hoog, dan is dat altijd in het voordeel van de verdediger. Wanneer een verdediger na één of meerdere aanvallen al zijn legers in een bepaald gebied heeft verloren, is de strijd gestreden en brengt de aanvaller een gedeelte van zijn legers naar dit gebied over.

We voelen al aan dat de aanvaller voordeel heeft bij het feit dat hij met drie stenen mag gooien en de verdediger met slechts twee. Daarentegen kan de verdediger besluiten met één steen te gooien als de aanvaller erg hoog gooit en daarmee zijn verlies beperken, en is bovendien de verdediger in het voordeel als zijn worp even hoog is als die van de aanvaller. Hoe zit het nu precies met de betreffende kansen? De enige manier om op die vraag antwoord te geven (en dat is wel nodig, want voor fanatieke RISK-spelers wordt zo'n vraag op den duur loodzwaar) is te gaan zitten rekenen. In dit artikel zullen we twee vragen en de antwoorden daarop behandelen:

1. Hoe groot zijn de kansen van de aanvaller om een bepaalde worp te gooien en, gegeven die worp van de aanvaller, hoe groot zijn de kansen van de verdediger om een bepaald aantal legers te verliezen? Hoe pakt het gemiddeld uit?
2. Wanneer moet de verdediger besluiten met één steen te verdedigen in plaats van met twee stenen?

In dit artikel richten we ons op één aanval. De aanvaller werpt in die aanval met een aantal stenen (één, twee of drie), en de verdediger werpt daarna met een aantal stenen (één of twee). Zoals gezegd worden die aantallen bepaald door het aantal legers dat wordt ingezet, en dus mede door het aantal legers dat beide spelers bezitten in de betreffende gebieden.
De volgende twee paragrafen gaan in op de eerste vraag: de kansen die de aanvaller en verdediger respectievelijk hebben. Daarna volgt de behandeling van de tweede vraag en tenslotte worden conclusies getrokken.

De worp van de aanvaller

Deze paragraaf gaat in op het eerste deel van vraag één: hoe groot zijn de kansen van de aanvaller om een bepaalde worp te gooien? De mate waarin de stenen van de worp van de aanvaller interessant zijn voor de verdediger, hangt af van het aantal legers van de verdediger waarmee hij mag verdedigen. Als hij met slechts één leger mag verdedigen, is alleen de hoogste steen van de aanvaller interessant; als hij met twee stenen mag verdedigen, zijn de hoogste twee van belang.

We analyseren eerst de kansen op bepaalde combinaties van stenen van de aanvaller als hij met drie stenen werpt en de hoogste twee voor de verdediger een rol spelen. Er zijn $6^3 = 216$ mogelijke combinaties van drie stenen, waarvan een aantal hetzelfde paar van twee hoogste oplevert. In tabel 1 staan de mogelijkheden die er zijn voor de twee hoogste stenen van de aanvaller en het aantal manieren waarop die kunnen worden verkregen. Het is erg eenvoudig uit deze tabel kansen af te leiden.

Tabel 1: Aantal mogelijkheden in een bepaalde aanval voor de aanvaller. De aanvaller gooit met drie stenen.

	hoogste steen						
tweede steen	1	2	3	4	5	6	*totaal*
1	1	3	3	3	3	3	16
2		4	9	9	9	9	40
3			7	15	15	15	52
4				10	21	21	52
5					13	27	40
6						16	16
totaal	1	7	19	37	61	91	216

Voorbeeld: Voor het resultaat (4,3) hebben we de volgende mogelijkheden: (4,3,1), (4,3,2), (4,3,3). Er zijn dus $6 + 6 + 3 = 15$ manieren.

Het aantal gunstige mogelijkheden moet dan worden gedeeld door het totaal aantal mogelijkheden (= 216). Het valt op dat de kans om een zes als hoogste steen te werpen redelijk hoog is, namelijk $91/216 \approx 42\%$. De kans om minimaal een vijf als hoogste steen te werpen is $152/216 \approx 70\%$. Het is dus helemaal niet zo vreemd dat sommige aanvallers 'altijd goed' gooien als ze met drie stenen werpen.

Als de verdediger met slechts één steen mag verdedigen, is alleen de hoogste steen van de aanvaller interessant. Op de onderste regel van tabel 1 staat het aantal mogelijkheden op een bepaalde hoogste steen als de aanvaller met drie stenen werpt. Tabel 2 resumeert dat en geeft bovendien die mogelijkheden weer als de aanvaller met één steen of twee stenen werpt.

Tabel 2: Aantal mogelijkheden voor de aanvaller op een bepaalde hoogste steen in een bepaalde aanval als hij met één, twee of drie stenen werpt.

	hoogste steen						
aantal stenen	1	2	3	4	5	6	*totaal*
1	1	1	1	1	1	1	6
2	1	3	5	7	9	11	36
3	1	7	19	37	61	91	216

Voorbeeld: Voor een hoogste steen van vier als de aanvaller met twee stenen werpt, hebben we de volgende mogelijkheden: (4,4), (4,3), (4,2), (4,1). Er zijn dus $1 + 2 + 2 + 2 = 7$ mogelijkheden.

Uit deze tabel kunnen eenvoudig kansen worden afgeleid door de aantallen mogelijkheden te delen door de som, zoals vermeld in de rechterkolom. Hieruit volgt dat met hoe meer stenen de aanvaller werpt, hoe groter de kans op een hoge worp wordt. De kans op een zes als hoogste steen, bijvoorbeeld, stijgt van $1/6 \approx 17\%$ via $11/36 \approx 31\%$ naar $91/216 \approx 42\%$.

De kansen van de verdediger gegeven de worp van de aanvaller

Vervolgens richten we ons op de verdediger. Voor hem is natuurlijk het meest interessant hoe groot de kans is dat hij zich zonder kleerscheuren door de aanval heen sleept. We gaan er in deze paragraaf voorlopig van uit dat de aanvaller voldoende legers in de betreffende gebieden heeft staan om met drie stenen te mogen gooien. We nemen aan dat hij dat ook doet. Dan immers heeft hij de grootste kans op een hoge worp, zie tabel 2. Bovendien gaan we er in deze paragraaf voorlopig van uit dat de verdediger voldoende legers heeft om met twee stenen te mogen werpen en dat bovendien altijd doet. Door de laatste aanname heeft hij $6^2 = 36$ mogelijke combinaties van ogen, waarvan een aantal dezelfde volgorde oplevert.

In tabel 3 staat aangegeven hoeveel mogelijkheden er zijn om geen legers te verliezen, gegeven de worp van de aanvaller. Door de aantallen in de tabel te delen door 36 krijgen we de kans dat de verdediger niets verliest, gegeven de worp van de aanvaller.

Tabel 3: Aantal mogelijkheden voor de verdediger om in een bepaalde aanval niets te verliezen, gegeven de worp van de aanvaller. De verdediger gooit met twee stenen en de aanvallller met drie.

	hoogste steen van de aanvaller					
tweède steen	1	2	3	4	5	6
1	36	35	32	27	20	11
2		25	24	21	16	9
3			16	15	12	7
4				9	8	5
5					4	3
6						1

Voorbeeld: Als de aanvaller (4,3) gooit, heeft de verdediger de volgende mogelijkheden om niets te verliezen: (6,6), ..., (6,3); (5,5), ..., (5,3); (4,4), (4,3). Dat kan op $6 \times 2 + 3 \times 1 = 15$ manieren.

Let op de prachtige structuur van de getallen in de tabel. Het verschil tussen de getallen in de respectieve rijen stijgt met 2 als we van links naar rechts wandelen (1-3-5-7-9). Het verschil tussen de getallen in de respectieve kolommen daalt met 2 als we van de tweede kolom naar de zesde kolom wandelen (10-8-6-4-2). Op de hoofddiagonaal staan kwadraten. De respectieve verschillen tussen opeenvolgende getallen op de diagonalen zijn gelijk over de diagonalen (11-9-7-5-3).

Het is ook interessant de kans te bepalen dat zowel de aanvaller als de verdediger één leger verliezen. In tabel 4 staat een overzicht van de mogelijkheden daarvoor.

Door de getallen in de tabel te delen door 36 krijgen we

Tabel 4: Aantal mogelijkheden voor de verdediger om in een bepaalde aanval één leger te verliezen, gegeven de worp van de aanvaller. De verdediger gooit met twee stenen en de aanvaller met drie.

	hoogste steen van de aanvaller					
tweede steen	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	9	16	25
2		10	9	10	13	18
3			16	13	12	13
4				18	13	10
5					16	9
6						10

Voorbeeld: Als de aanvaller (4,3) gooit, heeft de verdediger de volgende mogelijkheden om één leger te verliezen: (6,1), (6,2); (5,1), (5,2); (4,1), (4,2); (3,3). Dat kan op $6 \times 2 + 1 \times 1 = 13$ manieren.

de kansen dat de verdediger en de aanvaller ieder één steen verliezen, gegeven de worp van de aanvaller. Tenslotte bepalen we het aantal mogelijkheden dat de verdediger heeft om twee legers te verliezen, gegeven de worp van de aanvaller.
Tabel 5 geeft daarvan een overzicht. De betreffende kansen kunnen weer worden bepaald door de getallen te delen door 36. Ook in de tabellen 4 en 5 is sprake van een mooie structuur van de getallen in de tabel.

Tabel 5: Aantal mogelijkheden voor de verdediger om in een bepaalde aanval twee legers te verliezen, gegeven de worp van de aanvaller. De verdediger gooit met twee stenen en de aanvaller met drie.

	hoogste steen van de aanvaller					
tweede steen	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2		1	3	5	7	9
3			4	8	12	16
4				9	15	21
5					16	24
6						25

Voorbeeld: Als de aanvaller (4,3) gooit, heeft de verdediger de volgende mogelijkheden om twee legers te verliezen: (3,2), (3,1); (2,2), (2,1); (1,1).
Dat kan op $3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ manieren.

We weten nu hoe groot de kansen van de verdediger zijn om een bepaald aantal legers te verliezen, gegeven de worp van de aanvaller. De kansen staan in de tabellen 3-5. Daarbij zijn we ervan uitgegaan dat de verdediger met twee stenen werpt. Hoe pakt het gemiddeld uit? Daar zullen we nu op ingaan.

Met de gegevens uit tabellen 3-5 kunnen we *het verwachte verlies van de verdediger* bepalen, *gegeven de worp van de aanvaller*. Het resultaat daarvan staat in tabel 6.

Omdat de verdediger óf nul óf één óf twee legers verliest (hij werpt immers met twee stenen), moeten de kansen in iedere cel optellen tot 100%. We zien dat het gemiddelde verlies van de verdediger gelijk is aan 1 als de aanvaller (4,4), (5,3) of (6,2) gooit. Bij deze worpen is het gemiddelde verlies van de verdediger dus gelijk aan dat van de aanvaller. Als de aanvaller minder goed gooit dan de genoemde worpen (= richting linksboven), is het gemiddelde verlies van de verdediger kleiner dan 1 en is de verdediger dus gemiddeld in het voordeel. Bij hogere worpen dan de genoemde drie (= richting rechtsonder) slaat het gemiddelde voordeel van de verdediger om in een gemiddeld nadeel. Deze overwegingen zullen in de volgende paragraaf leiden tot het definiëren van zeven strategieën die de verdediger zou kunnen hanteren.
Tenslotte komen we kort terug op de aannames van het

Tabel 6: Kansen voor de verdediger om in bepaalde aanval 0, 1 of 2 legers te verliezen en het verwachte verlies, gegeven de worp van de aanvalller. De verdediger gooit met twee stenen en de aanvaller met drie.

	hoogste steen van de aanvaller					
	1	2	3	4	5	6
	verlies verdediger					
tweede steen	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
1	100 0 0 0.00	97 3 0 0.03	89 11 0 0.11	75 25 0 0.25	56 44 0 0.44	31 69 0 0.69
2		69 28 3 0.33	67 25 8 0.42	58 28 14 0.56	44 36 19 0.75	25 50 25 **1.00**
3			44 44 11 0.67	42 36 22 0.81	33 33 33 **1.00**	19 36 44 1.25
4				25 50 25 **1.00**	22 36 42 1.19	14 28 58 1.44
5					11 44 44 1.33	8 25 67 1.58
6						3 28 69 1.67

Legenda: In ieder blokje staan de volgende gegevens:

x y z E	

x: kans om 0 legers te verliezen, in %
y: kans om 1 leger te verliezen, in %
z: kans om 2 legers te verliezen, in %
E: verwachte verlies

begin van deze paragraaf. Stel dat de verdediger met slechts één steen verdedigt. Welke kansen heeft hij dan, gegeven de worp van de aanvaller (waarvan alleen de hoogste steen een rol speelt) om een leger te verliezen? Die vraag is niet moeilijk te beantwoorden: als de aanvaller als hoogste steen x gooit, is de kans dat de verdediger zijn leger verliest $(x-1)/6$. Bijvoorbeeld: als de aanvaller een 4 gooit, verliest de verdediger zijn leger als hij een 1, 2 of 3 gooit. De kans daarop is $3/6 = 50\%$.

Hiermee sluiten we de beantwoording van de eerste vraag uit de inleiding af. We weten hoe de kansen van de verdediger liggen, gegeven de worp van de aanvaller. We kennen de kansen van de aanvaller op het gooien van bepaalde worpen, en we weten hoe het gemiddeld voor de verdediger uitpakt. De volgende paragraaf zal ingaan op de tweede vraag: Wanneer moet de verdediger besluiten met één steen te verdedigen in plaats van met twee stenen?

De kansen van de aanvaller en de verdediger

Laten we eerst de situatie bekijken waarmee we in de vorige paragraaf eindigden: de verdediger verdedigt met slechts één steen, en dus is alleen de hoogste steen van de aanvaller van belang.
Tabel 7 presenteert voor dit geval de kansen van de aanvaller en de verdediger om de aanval te verliezen, afhankelijk van het aantal stenen waarmee de aanvaller werpt. Deze kansen zijn eenvoudig met de getallen uit tabel 2 te berekenen.

Tabel 7: Kans dat de verdediger zijn leger verliest in een bepaalde aanval als hij met één leger verdedigt en de aanvaller met één, twee of drie stenen werpt.

aantal stenen	*kans dat de verdiger zijn leger verliest*
1	$15/36 \approx 41.7\,\%$
2	$125/216 \approx 57.9\,\%$
3	$855/1296 \approx 66.0\,\%$

Het blijkt dat de kansen van de verdediger om te verliezen groter zijn dan die van de aanvaller als de aanvaller met minimaal twee stenen werpt.

Vervolgens bekijken we een moeilijker geval: de verdediger heeft voldoende legers om met twee stenen te mogen verdedigen. We gaan er nu van uit dat de aanvaller steeds met drie stenen werpt. In tabel 6 kunnen we onder andere het verwachte verlies van de verdediger, gegeven de worp van de aanvaller, aflezen als hij met twee stenen verdedigt. Daaruit blijkt welke worpen van de aanvaller 'gevaarlijk' zijn voor de verdediger en welke niet. Stel dat de verdediger kan leven met een situatie waarin hij gemiddeld evenveel verliest als de aanvaller. Dat betekent dat er zes 'gevaarlijke' worpen zijn, namelijk de worpen rechtsonder de *break-even*-lijn waar het verwachte verlies van de verdediger, gegeven de worp van de aanvaller, gelijk is aan één. Als met twee stenen wordt verdedigd, verliest de verdediger gemiddeld meer dan de aanvaller als laatstgenoemde een van de zes 'gevaarlijke' worpen heeft gegooid. Een verdediger die dat onplezierig vindt en de schade zoveel mogelijk wil beperken, kan ervoor kiezen in die situatie met één steen te verdedigen. Hij blijft dan gemiddeld meer verliezen dan de aanvaller (als die 'gevaarlijk' heeft gegooid), maar het verschil wordt kleiner.

Of hij dat zal doen, hangt ervan af hoeveel risico hij durft te nemen. Stel bijvoorbeeld dat de aanvaller (6,6) werpt. Als de verdediger besluit met twee stenen te verdedigen, heeft hij een erg kleine kans om niets te verliezen (1/36 ≈ 3%). Hij heeft een kans van 11/36 ≈ 31% om geen twee legers te verliezen. Het voordeel van het verliezen van één leger is niet alleen dat één minder is dan twee, maar ook dat de aanvaller eveneens een leger verliest. Als de verdediger besluit met één steen te verdedigen, heeft hij 1/6 ≈ 17% kans om niets te verliezen en dus 83% kans om één leger te verliezen. In dat laatste geval heeft hij echter de aanvaller geen schade toegebracht. Het enige voordeel van het met één leger verdedigen is dat de kans om twee legers te verliezen gelijk is aan nul en het gemiddelde verlies dus daalt. Als met twee stenen wordt verdedigd is de kans om twee legers te verliezen gelijk aan 25/3 ≈ 69% als de aanvaller (6,6) gooit. Omdat de verdedigers dat in het algemeen te hoog vinden, kiest men in dat geval meestal voor het verdedigen met één steen.

Om wat preciezer na te gaan welke kansen verdediger en aanvaller hebben als de verdediger in sommige situaties met één steen verdedigt, onderscheiden we de volgende zeven strategieën (vergelijk deze met de 'gevaarlijke' worpen rechtsonder in tabel 6). De verdediger gooit met twee stenen, behalve als de hoogste stenen van de aanvaller gelijk zijn aan:

1. — (dus altijd met twee stenen)
2. (6,6)
3. (6,6), (6,5)
4. (6,6), (6,5), (6,4)
5. (6,6), (6,5), (6,4), (5,5)
6. (6,6), (6,5), (6,4), (5,5), (6,3)
7. (6,6), (6,5), (6,4), (5,5), (6,3), (5,4)

Voor iedere strategie kunnen we de kansen van zowel verdediger als aanvaller op het verliezen van nul, één of twee legers bepalen, en dus ook het verwachte verlies (nu niet meer gegeven de worp van de aanvaller!). Tabel 8 geeft een beeld van deze kansen en verwachte verliezen.

In tabel 9 staat de kansverdeling van het verschil tussen het verlies van de verdediger en dat van de aanvaller. Dit verschil noemen we het *netto-verlies* van de verdediger. In dezelfde tabel staan de verwachting en standaarddeviatie van het netto-verlies van de verdediger.

Tabel 9: Kansverdeling van het netto-verlies (kansen in %), verwachte waarde (verw) en standaarddeviatie (std) van het netto-verlies van de verdediger in een bepaalde aanval voor de diverse strategieën.

strategie	P(-2)	P(-1)	P(0)	P(1)	P(2)	verw	std
1	29.3	0.0	33.6	0.0	37.2	0.16	1.62
2	29.1	1.2	31.5	6.2	32.0	0.11	1.58
3	28.0	3.3	28.4	16.6	23.7	0.05	1.50
4	26.7	4.9	25.7	24.7	18.0	0.02	1.44
5	26.0	6.9	23.0	28.7	15.3	0.00	1.42
6	24.6	8.1	20.5	34.5	12.3	0.02	1.38
7	22.5	11.3	17.0	41.0	8.2	0.01	1.32

De kansverdeling van de verdediger en die van de aanvaller om in een bepaalde worp een aantal legers te verliezen (in tabel 8) zijn afhankelijk. Immers, de som van beider verliezen is altijd gelijk aan het aantal stenen waarmee de verdediger speelt. Wat betreft de verwachting van het verlies van de respectieve spelers speelt deze afhankelijkheid geen rol. Dat blijkt ook uit de tabellen 8 en 9: de ver-

Tabel 8: Kansverdeling (kansen in %), verwachte waarde (verw) en standaarddeviatie (std) van het verlies in een bepaalde aanval van de verdediger en van de aanvalller voor de diverse strategieën.

	verlies verdediger					*verlies aanvaller*				
strategie	P(0)	P(1)	P(2)	verw	std	P(0)	P(1)	P(2)	verw	std
1	29.3	33.6	37.2	1.08	0.81	37.2	33.6	29.3	0.92	0.81
2	30.3	37.7	32.0	1.02	0.79	38.2	32.8	29.1	0.91	0.81
3	31.3	45.0	23.7	0.92	0.74	40.3	31.7	28.0	0.88	0.82
4	31.6	50.4	18.0	0.86	0.69	42.7	30.6	26.7	0.84	0.82
5	32.9	51.7	15.3	0.82	0.67	44.0	30.0	26.0	0.82	0.82
6	32.7	55.0	12.3	0.80	0.64	46.7	28.6	24.6	0.78	0.82
7	33.8	58.0	8.2	0.74	0.60	49.2	28.3	22.5	0.73	0.80

wachting van het netto-verlies van de verdediger is gelijk aan het verschil van het verwachte verlies van de verdediger en dat van de aanvaller. In tabel 10 staat tenslotte voor iedere strategie de kans dat de verdediger met één steen zal moeten werpen.

Tabel 10: Kans (in %) dat de verdediger in een bepaalde aanval met één steen moet verdedigen voor de diverse strategieën.

strategie	kans op werpen met één steen
1	0.0
2	7.4
3	19.9
4	29.6
5	35.6
6	42.6
7	52.3

Uit de tabellen 8 en 9 kunnen we een aantal conclusies trekken. Als we, ten eerste, de kansverdeling van het verlies van de verdediger en die van het verlies van de aanvaller vergelijken, valt op dat het modale verlies van de verdediger bij één ligt en het modale verlies van de aanvaller bij nul. Het verwachte verlies van de aanvaller is bij alle zeven strategieën kleiner dan dat van de verdediger. Het verwachte netto-verlies van de verdediger is dan ook voor alle strategieën positief. Bij de strategieën 1 en 2 is dat aanmerkelijk hoger dan bij de overige strategieën. Dit zou pleiten voor het kiezen van een van de strategieën 3 t/m 7. Het netto-verlies van de verdediger is minimaal als hij strategie 5 hanteert (om precies te zijn: $36/777 \approx 0.00463$). Gemiddeld pakt het dan voor aanvaller en verdediger ongeveer even goed (slecht) uit; bij alle andere strategieën verliest de verdediger gemiddeld meer dan de aanvaller. Het verschil met het netto-verlies behorend bij strategie 3, 4, 6 en 7 is echter klein; in alle gevallen verliest de aanvaller gemiddeld net iets minder dan de verdediger.

De tweede conclusie betreft de standaarddeviatie van het verlies van de aanvaller en de verdediger. We zien dat de standaarddeviatie van het verlies van de aanvaller bij alle zeven strategieën rond de 0.81 ligt. De standaarddeviatie van het verlies van de verdediger daalt echter van 0.81naar 0.60 als we van strategie 1 naar strategie 7 'wandelen'. Met andere woorden: als de verdediger voorzichtiger wordt, wordt de spreiding van zijn verlies kleiner, maar de spreiding van het verlies van de aanvaller blijft gelijk. Dat is ook wel logisch. Immers, de verdediger kan bepalen of hij met één steen of met twee stenen zal verdedigen; de aanvaller staat voor een voldongen feit. Door de keuzemogelijkheid die de verdediger heeft, kan hij de spreiding van zijn verlies beïnvloeden.

Wanneer moet de verdediger nu besluiten met één steen te verdedigen in plaats van met twee stenen? Er zijn diverse criteria die de verdediger zou kunnen hanteren. Als hij het verwachte netto-verlies wil minimaliseren, moet hij strategie 5 kiezen, hoewel we al concludeerden dat het verschil met de strategieën 3, 4, 6 en 7 niet groot is. Echter, niet alleen het verwachte (netto-) verlies zal voor de verdediger van belang zijn. Ook zijn kans om de aanval goed te weerstaan zal een rol spelen in het kiezen van een strategie. Als hij bijvoorbeeld de kans dat hij meer legers verliest in een bepaalde aanval dan de aanvaller (dus de kans op een netto-verlies van één of twee) wil minimaliseren, moet hij strategie 1 kiezen. De kans dat het netto-verlies positief is, is voor strategie 1 gelijk aan 37.2%. Een andere mogelijkheid is de kans op een kleiner verlies dan dat van de aanvaller te willen maximaliseren. In dat geval is strategie 7 de beste: de kans dat het netto-verlies negatief is, is dan 33.8%.

We zouden nog meer criteria in beschouwing kunnen nemen. De verdediger zou bijvoorbeeld de kans dat hij zijn gebied verliest (na een aantal aanvallen), kunnen willen minimaliseren. Als die kans desondanks redelijk groot is, zou hij kunnen proberen de aanvaller zo veel mogelijk schade te berokkenen bij die overwinning. Echter, deze criteria liggen buiten de bespreking van de kansen in dit artikel. We beschouwen immers slechts één aanval. In bovenstaande criteria spelen diverse aanvallen gedurende één beurt een rol.

Conclusie

Dit artikel bevredigt de behoefte de kans van aanvaller en verdediger om in een bepaalde aanval een bepaald aantal legers te verliezen te willen kennen.We hebben eerst de kans die de aanvaller heeft op een bepaalde worp bestudeerd. Het bleek dat, als de aanvaller met drie stenen werpt, hij grote kans heeft om hoog te gooien. Vervolgens hebben we gekeken naar de kans op verlies in een bepaalde aanval als de verdediger met slechts één steen verdedigt. Het bleek dat de kans dat de verdediger verliest sterk stijgt als de aanvaller met meer stenen werpt. Daarna hebben we de kans op een verlies van nul, één of twee legers van de verdediger, gegeven de worp van de aanvaller, bestudeerd en het bijbehorende gemiddelde verlies als de verdediger met twee stenen verdedigt. Hieruit volgden zeven strategieën die de verdediger zou kunnen volgen om een beslissing te kunnen nemen of hij met één steen dan wel met twee stenen zal verdedigen, uitgaande van voldoende legers. Tenslotte hebben we ook de onconditionele verdeling van de verliezen van de verdediger bestudeerd. Hieruit bleek dat de aanvaller gemiddeld in het voordeel is: het verwachte netto-verlies van de verdediger is bij alle zeven strategieën positief. Voor al die strategieën was het mogelijk de kansverdeling van het verlies van de aanvaller en die van de verdediger op te sporen (en dus het verwachte verlies en de standaarddeviatie).

We kennen dus nu de relevante kansen van de aanvaller en de verdediger in één aanval van een beurt. Als de verdediger het verwachte netto-verlies gedurende één aanval zo klein mogelijk zou willen houden, zou hij moeten kiezen voor strategie 5. Met andere woorden: hij zou altijd met twee stenen moeten verdedigen, behalve als de aanvaller (6,6), (6,5), (6,4) of (5,5) gooit. Het is echter mogelijk andere criteria op te stellen.

Door bovenstaande resultaten is het loodzware gevoel zoals beschreven in paragraaf 1 verdwenen. Er is immers duidelijkheid gekomen in de relevante kansverdelingen. Laat dit stimuleren tot nog vele malen fanatiek spelen van RISK.

Noot

[1] RISK is een strategisch spel voor 2–6 personen en wordt gefabriceerd door Parker gezelschapsspellen.