

Denemarken de grens

Finale wiskunde A-lympiade 1991-'92

J. de Lange/M. Wit

Freudenthal instituut, RU Utrecht

Inleiding

Voor de derde keer vond in februari de finale van de wiskunde A-lympiade plaats. In de voorronde, begin december, hadden 125 teams van 49 scholen uit het hele land gestreden om de twaalf finaleplaatsen. Dankzij de medewerking van docenten bij het nakijken van de voorronde-werkstukken waren de finalisten al eind december bekend.

Deze finalisten waren:

Fioretti College, Lisse

Mendel College, Haarlem

College de Klop, Utrecht

SG Albaniana, Alphen aan de Rijn

SG Guido de Brès, Rotterdam

Willem van Oranje College, Waalwijk

Bernardinus College, Heerlen

RK Gymnasium Rolduc, Kerkrade

Hendrik Pierson College, Zetten

Florens Radewijns College, Raalte

Openbare SG Winkler Prins, Veendam

Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen

Zoals inmiddels gebruikelijk vond de finale plaats in een bungalowpark in Garderen, waar de teams anderhalve dag, in een eigen bungalow, aan de opgave konden werken. De prijsuitreiking werd gehouden in april op de themadag van de faculteit Wiskunde en Informatica van de Rijksuniversiteit Utrecht. Ook dit jaar werd de wedstrijd georganiseerd onder auspiciën van de Onderwijscommissie van het Wiskundig Genootschap en werd de feitelijke uitvoering verzorgd door het Freudenthal instituut.

Redeneren

De commissie die de opgave voor de finale heeft ontworpen, realiseerde zich terdege dat de voorgestelde opgave zeer afweek van de bestaande tradities en daarom niet zonder risico was. De afgelopen jaren waren de opgaven qua voorkomen meer volgens het verwachtingspatroon: twee jaar geleden moest er een waarschuwingssysteem voor een winkelcentrum worden ontworpen, terwijl afge-

lopen jaar een dienstregeling voor treintjes in een pretpark moest worden opgesteld. Beide opgaven waren zeer open en gaven de leerlingen een goede mogelijkheid om hun creativiteit te gebruiken. Daarnaast was er voldoende ruimte voor wat rekenwerk. De finaleopgave van dit jaar week hier sterk van af. De commissie zocht naar een toetsvorm waarbij met name het redeneren centraal zou staan. Alhoewel in het algemeen wordt erkend dat dit facet een belangrijke rol in de wiskunde zou moeten spelen, is hiervan bij de 'middelbare schoolwiskunde' en de bijbehorende examens geen sprake. Het redeneerproces van de finaleopgave is niet zozeer het deductief redeneren zoals we dat uit de traditionele wiskunde kennen, maar juist het 'common sense' redeneren waarbij getracht wordt uit fragmentarische, en deels onvolledige informatie een bepaalde conclusie aannemelijk te maken.

Als bron voor de opgave werd een archeologisch artikel uit de jaren zeventig gebruikt. Op grond van voor de auteur beschikbare informatie meende deze te kunnen concluderen dat in het Mesolithicum volksstammen uit Midden-Europa in het voorjaar en in de zomer verder naar het noorden getrokken zijn dan tot voor kort werd aangenomen: niet Midden-Duitsland, maar Denemarken vormde de noordelijke begrenzing van het territorium van deze volksstammen.

In de finale moesten de leerlingen deze bewering onderbouwen of verwerpen op grond van door de commissie geselecteerde gegevens.

De opgave

De opgave bestond uit twaalf losse bladen, waarvan één blad een inleiding was, een tweede de opdracht bevatte en de overige tien bestonden uit kleine stukjes tekst, tabellen, een kaartje, tekeningen en grafieken, waarmee de bewering onderbouwd of verworpen moest worden.

Een gedeelte van de eerste bladzijde zag er als volgt uit:

De bewering luidt:

Gedurende het Mesolithicum zijn volksstammen uit Midden-Europa in het voorjaar en de zomer verder naar het noorden getrokken dan tot voor kort werd aangenomen.

Uit recente onderzoeksgegevens kan de conclusie worden

getrokken dat niet Midden-Duitsland de noordelijke begrenzing van hun territorium vormde, maar Denemarken.

Opdracht

Onderbouw of verwerp deze bewering op grond van vooral de informatie die je op bijgaande bladzijden aantreft.

Naast bladen met informatie over het Mesolithicum, Denemarken, jaarringen en botresten, waren er ook bladzijden met meer getalsmatige informatie. Op de pagina hiernaast zijn vijf van die bladen afgebeeld.

De uitwerking

Uit gesprekken met de leerlingen bleek overduidelijk dat ze verrast en verbaasd waren over de opgave. Dit is in overeenstemming met de reacties van twee experimenteerteams die de opgaven al eerder, onder geheimhouding, gemaakt hadden. Deze teams bestonden uit eerstejaars wiskundestudenten uit Eindhoven, respectievelijk studenten van de lerarenopleiding van de HMN/FEO (de voormalige SOL) uit Utrecht.

Na de aanvankelijke verbazing was er met veel enthousiasme aan de opgave gewerkt. In de meeste gevallen werd eerst door ieder teamlid alle informatie doorgelezen, waarna gediscussieerd werd over de vraag of de bewering onderbouwd, dan wel verworpen moest worden. Nadat deze keuze gemaakt was, werd geprobeerd relevante informatie te vinden om deze keuze te ondersteunen. De prijswinnaars, het team van het Bernardinus College uit Heerlen, hebben de informatie van de bladen als volgt samengevat:

Grafieken

Van deze pagina hebben wij de volgende gegevens gebruikt:

Het grootste deel van de snoeken ($\pm 43\%$) overlijdt in de periode maart tot en met mei.

Dit gegeven roept de vraag op hoe het komt dat juist in de paringstijd, als de snoeken het makkelijkst te vangen zijn, een dergelijk groot percentage sterft. Dit zou eventueel kunnen komen doordat er in die periode mensen zijn die de visvangst bedrijven.

De snoek

Van deze pagina hebben wij de volgende gegevens gebruikt:

- De snoek is na twee jaar in staat tot voortplanten. Dan is de lengte ongeveer 30-50 cm.
- Voortplanting heeft plaats in de maanden maart tot en met mei.
- In deze periode is de volwassen snoek relatief makkelijk te vangen.

Deze gegevens zijn belangrijk met betrekking tot het sterftecijfer in die maanden, (zie de pagina *Grafieken*), dit vooral in verband met de (eventuele) visvangst in die periode en de lengte van de (eventuele) gevangen snoeken.

Onderzoek

Van deze pagina hebben wij de volgende gegevens gebruikt:

- De resultaten van het onderzoek.
- Bij normale verdeling is 80% van de snoeken 'klein', dat is 10 tot en met 25 cm lang. Rond de 20 cm zit de modus, de waarde met de hoogste frequentie. De overige 20% is gelijkmatig verdeeld over de andere lengtes (van 25 tot en met 77 cm).

Als de snoek normaal slechts 1% (zie ook *Denemarken*, waar gegeven staat dat dat ook in het Mesolithicum al zo was) van de totale vispopulatie vormt, is het natuurlijk vreemd dat deze bij de opgravingen (zie Cromermeer (50%) en Praestelyngen (80%)) duidelijk groter is. Dit vereist natuurlijk verder onderzoek. Met behulp van deze gegevens is een (ruwe) grafiek te maken van de normale opbouw van de snoekpopulatie.

Gehemelteplaten

Van deze pagina hebben wij de volgende gegevens gebruikt:

- De resultaten van het onderzoek naar de gehemelteplaten.

We hebben de afmetingen ingevoerd in de bij *Onderzoek* berekende formule. Hierbij bleek dat de snoeken in het Mesolithicum kleiner waren dan nu, hetgeen verklaarbaar is met de evolutietheorie. (Zie *Onderzoek* en *Mesolithicum* hierboven.)

We hebben de resultaten van dit onderzoek gebruikt voor het opstellen van een functie van de gehemelteplaat en die van de hoogte, tegen de lengte van de snoek. In het oog springend is het verschil tussen de lengtes van de snoeken tegenwoordig (zoals die uit dit onderzoek blijkt), en die van vroeger (zie *Gehemelteplaten*). Dit is echter te verklaren, analoog aan de lengte van de mens, met behulp van de evolutietheorie (zie *Mesolithicum* hierboven).

Groot en klein

Van deze pagina hebben wij de volgende gegevens gebruikt:

- Alleen grote snoeken zijn voor consumptie interessant.
- De snoeken maken (bij normale verdeling) slechts één procent van de totale vispopulatie uit.

Zoals uit deze samenvattingen blijkt, hebben de leerlingen de gegevens waar mogelijk kwantitatief en grafisch verwerkt, hetgeen in sommige gevallen weer tot nieuwe informatie leidde. De bladen *Onderzoek* en *Gehemelteplaten* leverden het volgende resultaat:

Uitwerking bij bladen 'Onderzoek' en 'Gehemelteplaten'

Met behulp van blad *Onderzoek* hebben wij de lengte van de vis tegen de lengte van de gehemelteplaat uitgezet (zie fig. 6).

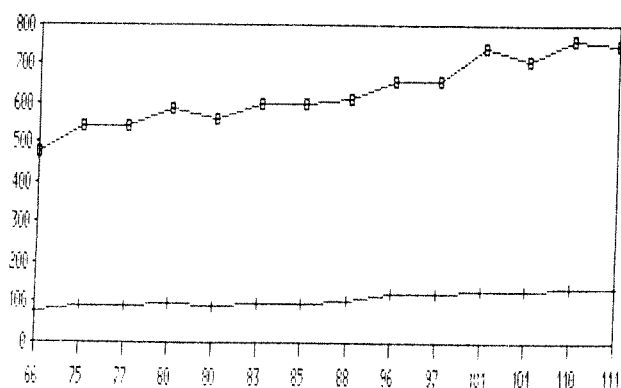
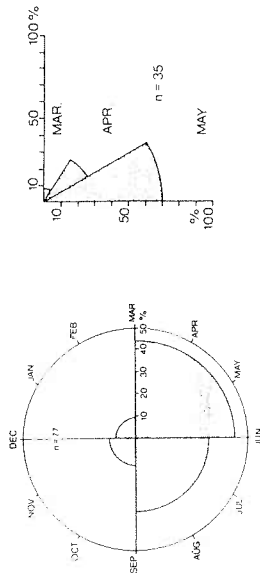


Fig. 6

Grafieken

Omdat groeien een cyclisch proces is -na december komt weer januari- wordt bij het tekenen van grafieken die betrekking hebben op groeiprocessen vaak gebruikt gemaakt van cirkelvormige grafieken.

De onderzoekers, die aan de hand van de reesten het tijdstip van doodgaan van de snoeken van het Praestelyngenmeer onderzochten, kwamen met de volgende grafieken.



De tekst bij de grafieken luidt:

Grafiek van het tijdstip van overlijden van de snoeken van het meer van Praestelyngen (in percentages).

Er is nogal wat kritiek mogelijk op deze voorstelling. Verwoord jouw kritiek waarbij je rekening kunt houden met de volgende vragen:
 Hoe zou de grafiek er uit zien als alle snoeken in de periode maart-juni waren doodgegaan? Krijg je dan dezelfde oppervlakte voor het gearceerde gebied?
 En hoe zit het met de tweede grafiek: Geeft de oppervlakte van de maand mei inderdaad de hoeveelheid sterftegevallen aan in die maand?
 Geef behalve antwoorden ook suggesties voor betere grafieken.

De snoek

De snoek is een vraatzuchtige zoetwatervis met een lang lichaam tot ca. 1 m, een grote, brede bek en veel tanden; familie der snoekachtigen.
 De rug- en aarsvin van de snoek staan ver achterwaarts ingeplant. De kleur is overwegend olijf- tot donkergroen, met donkere vlekken en strepen.
 Het voedsel bestaat hoofdzakelijk uit vis, maar ook uit kikkers en jonge vogels.

De snoek leeft op het noordelijk halfrond; in Zuid-Europa komt hij minder voor.

De snoeken zijn na twee jaar geslachtsrijp. Ze zijn dan ongeveer 30-50 cm groot. De voortplanting vindt plaats in de periode van maart tot mei, waarbij de kuit aan alle soorten substraat wordt gekleefd. In deze periode is de volwassen snoek relatief makkelijk te vangen en dan een geliefd object voor hengelaars.

(naar Larousse Encyclopedie)

Onderzoek

Veertien snoeken werden voor wetenschappelijke doeleinden gedood en precies opgemeten. Daarbij werd o.a. de totale lengte, de hoogte (zonder rugvin) en de gehemelteplaat gemeten. De resultaten (in mm):

VIS	LENGTE	HOOGTE	GEH.PL.
S1	760	135	110
S2	602	99	85
S3	612	102	88
S4	743	127	101
S5	479	80	66
S6	543	91	77
S7	588	96	80
S8	661	122	97
S9	708	130	101
S10	751	133	111
S11	659	124	96
S12	559	93	80
S13	601	100	83
S14	539	90	75

Gehemelteplaten

Onderzoekers hebben naarstig gezocht naar botjes die enig uitsluitsel zouden kunnen geven omtrent de afmetingen van de snoeken van het Daense meer Praestelyngen. De gehemelteplaten (zie plaatje) van de snoeken van dat meer waren de enige botjes waar nog betrouwbare schattingen over de grootte van te maken waren. De volgende tabel geeft de geschatte afmetingen van gehemelte platen van snoeken uit dit meer.

(in mm)

73 35 65 71 66 45 55 56 48 77 39 65 67 49 81 58 74 66 69 59 55 63 61 77 79 84 80
 49 77 74 83 83 59 39 73 91 63 71 72 59 64 69 74 29 88 35 74 79 67 59 77 83 81 53
 48 69 87 65 49 58 67 39 77 73 91 66 57 87 67



Groot en klein

Alleen grote snoeken zijn interessant voor consumptie. Jammergenoeg zijn er normaal gesproken niet veel grote snoeken in een meer. Hoe de verdeling nu precies is over de verschillende lengteklassen was tot voor kort vooral giswerk.
 Enige tijd geleden werd een heel meer vergiftigd om inzicht te krijgen in de verdeling. De snoeken -die maar 1 % van de hele vispopulatie uitmaakten- hadden de volgende verdeling:

80 % van de snoeken was "klein", tussen de 10 en 25 cm, met een piek rond de 20 cm. De overige 20 % was gelijkelijk verdeeld over de andere lengteklassen. De grootste vis was 77 cm.

Het verband bleek vrij lineair en is door Lotus-123, met behulp van lineaire regressie, bepaald als zijnde ongeveer de functie:

$$6,3 * L + 63,6,$$

waarbij L voor de lengte van de gehemelteplaat staat.

Voor de hoogte tegen de gehemelteplaatlengte (zie fig. 6), werd de functie gevonden:

$$1,4 * L - 12,2.$$

Maar omdat er geen verdere gegevens aangaande de hoogte zijn, hebben we dit verder niet in berekeningen gebruikt.

In beide gevallen was de afwijking meestal niet groter dan 12%.

Met de eerste functie waren wij in staat de gehemelteplaatlengtes van de snoeken om te rekenen tot de lengtes (en de hoogtes) van de snoeken (zie fig. 7).

geh.m.p.	lengte	hoogte	geh.m.p.	lengte	hoogte
39	247.0393	27.14864	67	487.8301	78.52508
35	285.2274	35.17650	67	487.8301	78.52508
35	285.2274	35.17650	69	494.1614	79.97971
39	310.5527	40.59507	69	500.4928	81.23436
39	310.5527	40.59507	69	500.4928	81.23436
39	310.5527	40.59507	71	513.1554	83.94365
45	348.5407	48.72293	71	513.1554	83.94365
48	367.5347	52.78686	72	519.4868	85.29829
48	367.5347	52.78686	73	525.8181	86.65293
49	373.8661	54.14150	73	525.8181	86.65293
49	373.8661	54.14150	73	525.8181	86.65293
49	373.8661	54.14150	74	532.1495	88.00758
53	399.1914	59.56007	74	532.1495	88.00758
55	411.8541	52.26936	74	532.1495	88.00758
55	411.8541	52.26936	74	532.1495	88.00758
56	418.1854	63.62400	77	551.1435	92.07151
57	424.5167	64.97865	77	551.1435	92.07151
58	430.8481	66.33329	77	551.1435	92.07151
58	430.8481	66.33329	77	551.1435	92.07151
59	437.1794	67.68793	77	551.1435	92.07151
59	437.1794	67.68793	77	551.1435	92.07151
59	437.1794	67.68793	78	557.4748	93.42615
59	437.1794	67.68793	79	563.8061	94.78079
61	449.8421	70.39722	79	563.8061	94.78079
63	462.5048	73.10650	80	570.1375	96.13544
63	462.5048	73.10650	81	576.4688	97.49008
64	468.8361	74.46115	81	576.4688	97.49008
65	475.1674	75.81579	83	589.1315	100.1993
65	475.1674	75.81579	83	589.1315	100.1993
65	475.1674	75.81579	83	589.1315	100.1993
65	475.1674	75.81579	84	595.4628	101.5540
66	481.4988	77.17043	87	614.4568	105.6179
66	481.4988	77.17043	87	614.4568	105.6179
66	481.4988	77.17043	88	620.7882	106.9725
67	487.8301	78.52508	91	639.7822	111.0365
67	487.8301	78.52508	91	639.7822	111.0365

Fig. 7

Hiermee hebben wij een frequentiediagram van de verschillende lengtes van snoeken getekend, waarin de absolute aantallen tegen de verschillende lengtes zijn uitgezet (zie fig. 8) en dit hebben wij omgerekend naar percentages van het geheel door door het aantal gehemelteplaten te delen en dan met honderd te vermenigvuldigen (zie fig. 9).

Aantal per lengteklasse Bepaald mbv gehemelteplaat (uit onderzoek)

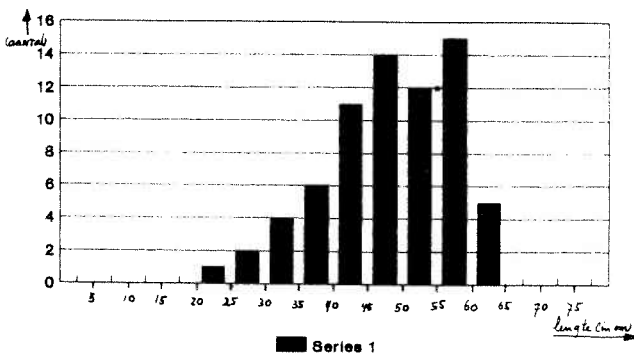


Fig. 8

Percentage per lengteklasse Bepaald mbv gehemelteplaat (uit onderzoek)

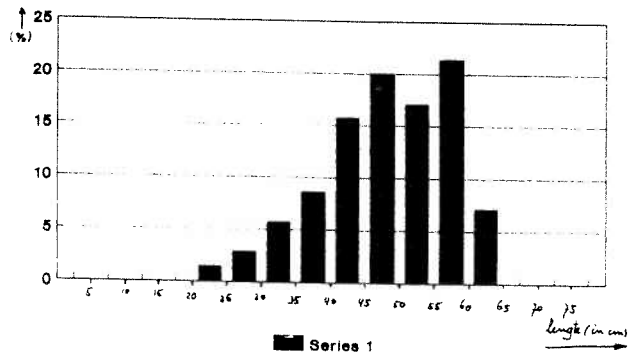


Fig. 9

Met behulp van *Groot en Klein* hebben we een diagram (ongeveer) van de relatieve frequenties van alle lengtes tegen de lengtes gemaakt (waarbij de hoogte van de piek rond de 20 cm een schatting is. Dit heeft echter geen invloed op de conclusies. Zie fig. 10).

Percentage per lengteklasse Bepaald mbv Groot en Klein (uit theorie)

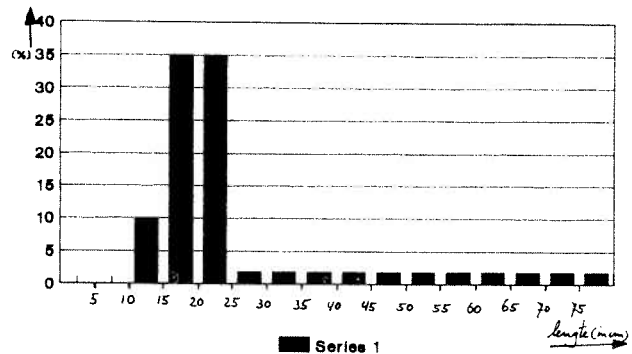


Fig. 10

Door deze laatste twee grafieken te vergelijken, blijkt duidelijk dat de lengteverhouding van de vissen, waarvan de botten in Praestelyngen zijn gevonden, niet natuurlijk is: er zijn (zo goed als) geen vissen van onder de 20 cm, terwijl in gewone situaties het merendeel van de vissen deze lengte heeft.

Ook lijken de percentages van figuur 9 zeer goed overeen te komen met de verdeling die men zou verwachten aan te treffen als men naar botjes van gevangen vissen zocht: de meeste vissen zijn 30 cm of langer; dit is de lengte waarbij de meeste snoeken geslachtsrijp zijn en ze gemakkelijker te vangen zijn.

Vervolgens werd met de relevante informatie een artikel geschreven waarin de bewering werd onderbouwd dan wel verworpen. De volgende alinea's geven daarvan een beeld:

Er zijn verschillende argumenten voor de bewoning door mensen te noemen.

Als men de frequenties van de verschillende lengtes snoeken bij

het vroegere Praestelyngenmeer vergelekt met de frequenties waarin de verschillende vissen normaliter voorkomen (deze laatste getallen zijn bekend door een onlangs gehouden onderzoek, waarbij een heel meer werd vergiftigd en alle vissen werden opgemeten), blijkt dat zij grote verschillen vertonen met de normale frequenties: Waar normaal gesproken de piek rond de 20 cm ligt, ligt deze nu tussen de 45 en 60 cm en zijn er bijna geen snoeken met een lengte van minder dan 20 cm. (Zie diagram 1, 2 en 3.)

Diagram 1

Aantal per lengteklasse
Bepaald mbv gehemelteplaat (uit onderzoek)

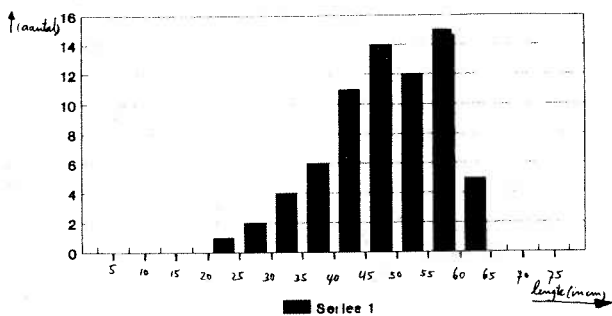


Diagram 2

Percentage per lengteklasse
Bepaald mbv gehemelteplaat (uit onderzoek)

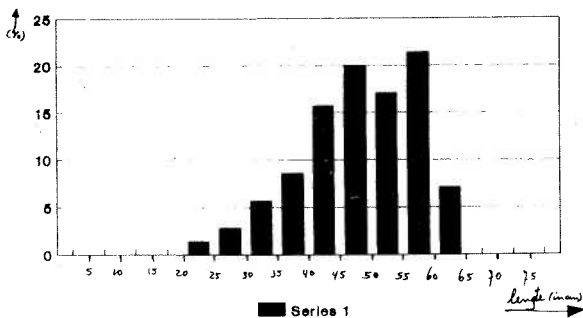
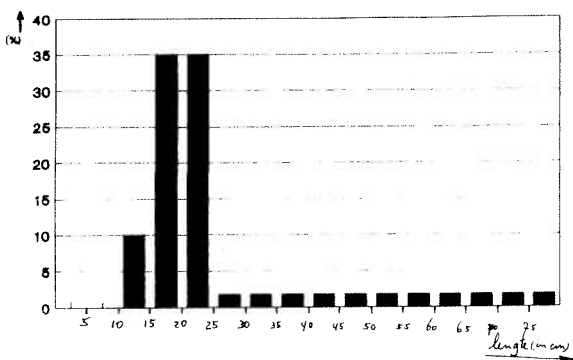


Diagram 3

Percentage per lengteklasse
Bepaald mbv Groot en Klein (uit theorie)

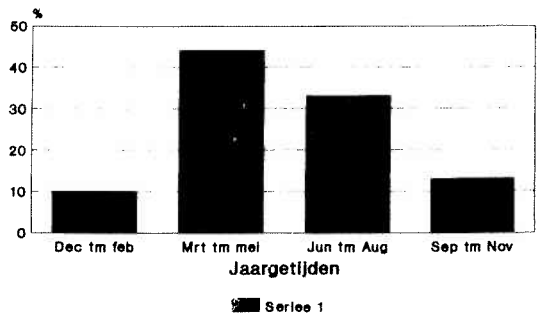


Dit kan door toedoen van mensen zijn veroorzaakt. De snoek is namelijk vanaf twee jaar geslachtsrijp en heeft dan een lengte van 30 tot 50 cm. In de paringstijd is de vis gemakkelijk te vangen. Hierdoor zullen de door mensen gevangen vissen bijna alle groter zijn dan 30 cm; dit klopt uitstekend met diagram 1 en 2, maar deze situatie kan ook op andere manieren zijn veroorzaakt. Ten eerste vergaan grotere botten natuurlijk minder snel dan kleinere botten, zodat er altijd meer botten van grotere snoeken worden gevonden, en ten tweede is er in de situatie van diagram 3 sprake van een levende populatie, terwijl er bij diagram 1 en 2 sprake is van een dode populatie. In het eerste geval is het namelijk een opname van de populatie in één 'ogenblik' en in het tweede geval bestaat de populatie niet meer en zijn alle vissen al eerder, op min of meer natuurlijke wijze omgekomen. De kleine vissen die er in het eerste geval namelijk zijn, zijn in de tweede situatie waarschijnlijk ouder geworden en op hogere leeftijd gestorven. In een dode populatie zullen dus veel minder botten van kleine vissen worden gevonden dan in een levende populatie. Hiermee verliest dit eerste argument voor een menselijke bewoning dus eigenlijk zijn waarde.

Een tweede, veel steekhoudender argument, is af te leiden uit de verdeling van de sterfgevallen van de snoeken over de kwartalen van het jaar (dit is af te leiden uit de jaarringen in de botten van de vissen). Het blijkt dat de meeste vissen in maart tot mei zijn omgekomen; dit is de paartijd waarin zij zeer gemakkelijk door de mens kunnen worden gevangen. Dit zou een verklaring kunnen zijn voor het feit dat in diagram 4 het sterftcijfer in deze periode opvallend hoog is. Dit is het voornaamste argument voor een menselijke bewoning. Hierbij kan nog worden aangegevend dat bijna alle in de paartijd gedode vissen in de maand mei zijn gedood (zie diagram 5). Dit is te verklaren met de redenering dat de vroege bewoners, die nomaden waren, pas in de maand mei, als het al wat warmer begon te worden, het noordelijk gelegen gebied met zijn visrijke gebieden binnetrokken, waarna ze in de herfst, als het kouder begon te worden, weer naar het zuiden trokken. Dit ligt in de onderzoekende natuur van de mens. Bij bestudering van diagram 5 rijst de vraag of het enorme sterftepercentage in mei niet te verklaren is door het feit dat een zeer groot deel van de snoekjonkies vlak na hun geboorte wordt opgegeten of gewoon sterft. Deze mogelijkheid kan echter worden uitgesloten, daar het snoekjonkie nog geen of nauwelijks skeletgroei heeft en er dus geen resten van worden gevonden.

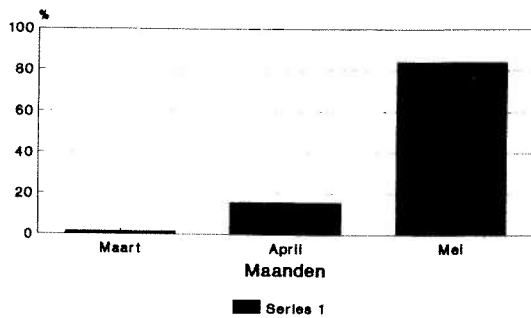
Diagram 4

Sterftijdstip in Praestelyngenmeer
Gegevens in staafdiagram



De opp. zijn evenredig met de lengtes

Sterftijdstip in Praestelynenmeer Gegevens in staafdiagram



Samenvattend: Vóór bewoning van de mens in Denemarken pleiten de argumenten van de grootte van de vissen en de sterftijdstippen van de vissen. Het eerste argument echter hoeft niet per se op de aanwezigheid van mensen te wijzen, maar kan ook op andere manieren worden verklaard. Het tweede argument is het sterkste argument voor de aanwezigheid van mensen. Tégen de mens pleit de afwezigheid van andere resten (waarover wij echter geen informatie hebben gekregen).

Daar echter de alternatieven voor menselijke bewoning zeker niet steekhoudend zijn, komen wij toch uit op menselijke bewoning in Denemarken. Hieruit is het een bijna logisch gevolg dat in Duitsland, in een bijna identieke situatie bij het Cromermeer, ook mensen gewoond hebben (hoewel dit de bewering onwaarschijnlijker maakt, is het nog steeds het meest waarschijnlijke).

Conclusie: En in Denemarken en bij het Cromermeer hebben vroeger mensen gewoond. Deze mensen leefden voor een belangrijk deel van de visserij. De gevonden botjes zijn dus grotendeels maaltijdresten. Hiermee is het grote percentage snoekbotjes in deze meren mede te verklaren. Ook veroorzaken het kannibalisme onder de snoeken en de hardheid van de snoekbotjes mede dit verschijnsel.

Het grote verschil in de percentages snoekbotten tussen Duitsland en Denemarken verklaren wij uit het feit dat het Cromermeer nog bestaat, zodat er ook recentelijker botjes van andere vissen zijn. Hoe ouder namelijk de botresten, hoe groter het percentage snoekbotjes (deze zijn harder en vergaan minder snel). Het percentage snoekbotjes is daardoor hoog. Het Praestelynenmeer bestaat echter niet meer en daardoor is het percentage snoekbotjes nog veel hoger.

In de opgave werd nadrukkelijk gevraagd of men nog additionele informatie had willen hebben om tot een betere conclusie te kunnen komen. Ook hier hebben verschillende teams over nagedacht, zoals blijkt uit het volgende fragment:

Bezwaren en wensen omtrent gegevens

Onderzoek

Er is onderzoek gedaan naar slechts veertien vissen; de hoogte van de vissen vinden we niet terzake doende. We missen informatie over de vraag of er in de laatste duizenden jaren ingrijpende veranderingen hebben plaatsgevonden met betrekking tot de

verhouding lengte lijf – lengte gehemeltebot en de totale lengte, want wanneer we naar de mens kijken, komen we tot de conclusie dat deze in 10.000 jaar tijd van 1 meter 60 gemiddeld gegroeid is met ongeveer twintig centimeter! Ook zouden veranderingen in de staat van de meren (voedselaanbod) van invloed kunnen zijn op een verandering in het aantal snoeken in die meren; hiervan misten we ook informatie.

Gehemelteplaten

We vinden deze methode goed bedacht, mede door het beperkte aantal andere determinatiemogelijkheden, maar we twijfelen aan de betrouwbaarheid om door middel van een formule een onbekende lengte af te leiden uit een geschatte lengte van een gehemelteplaat.

De snoek

We hadden eventueel een Leslie-matrix willen opstellen, maar daarvoor ontbraken essentiële gegevens:

- gemiddeld aantal jongen per snoek (staat wel in BINAS!);
- gemiddelde overlevingskans per leeftijdsklasse;
- percentage vissen omgekomen door een aanval van een natuurlijke vijand.

Door deze matrix voor een groot aantal jaren door te rekenen, zouden we kunnen verklaren dat er wel of niet mensen aanwezig zijn geweest bij het meer, omdat er dan een kleiner dan normaal aantal snoeken in de leeftijdsklassen van twee jaar en ouder voor zou moeten komen.

Wij zijn in hevige twijfels geraakt door het ontbreken van goede informatie over wat er gebeurt met het geraamte van een door een grote snoek geconsumeerde prooi.

Groot en Klein

Wat de gegevens over de verschillende klassebreedtes boven die van twee jaar betreft, hadden wij graag nog wat informatie tot onze beschikking gehad die ons meer duidelijkheid zou verschaffen over de lengtes van oudere organismen. Verdere gegevens over de plaats en conditie van het meer zouden ook bruikbaar zijn.

Overige experimenten die door ons wenselijk worden geacht

- Men zou moeten proberen ook resten van mensen uit die tijd te vinden.
- Eventuele rotsschilderingen uit grotten zouden gebruikt kunnen worden bij het beschrijven van de levensgewoonten van de Mesolithische bevolking.
- Aan de rand van het meer zou men moeten zoeken naar eventuele stenen gebruiks- en jachtvoorwerpen.
- Percentages van snoeken in andere meren zouden ook moeten worden onderzocht om een meer evenwichtig beeld te schetsen.
- Men zou een ethymologische verklaring kunnen zoeken voor de plaats- of streeknaam Maglemosegardsvaenge op Sjaelland (ongeveer zeventig kilometer van Praestelyngen) en onderzoeken in welke relatie deze naam staat tot de Maglemose-cultuur uit het Mesolithicum.

Na de lunch tijdens de finale is er voor alle teams gelegenheid geweest om in een korte presentatie hun mening over de bewering te geven. Opvallend was dat slechts twee teams de bewering verwierpen, terwijl de tien andere deze ondersteunden. Wel maakten enkele teams hierbij de kanttekening dat ze niet zeker waren, maar het aanne-

melijker vonden dat de volksstammen tot Denemarken gekomen waren. Aardig was ook het duidelijke kwaliteitsverschil in de onderbouwingen en verwerpingen en vooral de reacties van de andere leerlingen daarop: sommige argumenten of beweringen werden haast weggehoond, terwijl andere tot een instemmend en soms verbaasd gemompel leidden. Deze vijf kwartier durende sessie was een succes en zal volgend jaar zeker weer op de agenda staan, waarbij te overwegen valt om de ophalers en docenten voor deze uitwisseling uit te nodigen.

Het juryrapport

Evenals vorige jaren heeft een jury, bestaande uit leden van de Commissie Wiskunde A-lympiade, de beoordeling van de werkstukken voor haar rekening genomen. De commissie merkt op dat 'voor de meeste deelnemers de methode van wiskunde bedrijven zo veraf staat van de schoolwiskunde, dat velen zich afvroegen in hoeverre de opgave nog wiskunde was. De commissie is dan ook verheugd te constateren dat de teams toch in staat waren zinvolle oplossingen voor het gestelde probleem te geven.' Zes scholen kregen de kwalificatie 'goed' mee, drie de vermelding 'zeer goed' en voor de resterende drie scholen laten we het juryrapport voor zich spreken:

Evenals vorige jaren heeft de commissie de werkstukken in drie categorieën ingedeeld.

In tegenstelling tot vorig jaar echter, toen de categorieën genoemd werden 'Eerste Prijs', 'Tweede Prijs' en 'Derde Prijs', heeft de commissie nu gemeend alleen aan de eerste categorie het predikaat 'Prijs' te moeten toekennen. De tweede en derde categorie krijgen het predikaat 'Zeer Goed' of 'Goed'.

Categorie 'Goed'

Fioretti College, Lisse
Florens Radewijns College, Raalte
Hendrik Pierson College, Zetten
Mendel College, Haarlem
Openbare Scholengemeenschap Winkler Prins, Veendam
Willem van Oranje College, Waalwijk

Categorie 'Zeer Goed'

Katholiek Gymnasium Rolduc, Kerkrade
Scholengemeenschap Albaniana, Alphen aan de Rijn
Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen

Categorie 'Prijs'

Derde Prijs: Scholengemeenschap Guido de Brès, Rotterdam
Het werkstuk begint met een goed en vlot geschreven artikel, waarin reeds alle argumenten voor de eindconclusie worden vermeld. Het artikel wordt gevolgd door een verslag van het proces dat tot het eindoordeel leidde.
In dit werkstuk wordt voor de gegeven grafiek een alternatief ontworpen dat de vorm van de grafiek behoudt en gebaseerd is op een niet-lineaire schaalverdeling.

Tweede Prijs: College 'De Klop', Utrecht

Het werkstuk begint met een artikel dat op vlotte en populaire wijze de bewering onderbouwt en toelicht. In een bijlage wordt vervolgens het artikel ondersteund. Er wordt een verband tussen de lengte van de snoek en de lengte van de gehemelteplaat ver-

meld. De commissie had een onderbouwing van dit verband op prijs gesteld.

In het werkstuk wordt met behulp van de vondsten bij het Crommeer gepoogd aan te tonen hoeveel beter de botten van een snoek behouden blijven dan die van andere vissen. Op de gegeven grafiek is goede kritiek geleverd, waarbij in het alternatief is getracht de vorm van de grafiek te behouden door een niet-lineaire schaalverdeling in te voeren.

Eerste Prijs: Bernardinus College, Heerlen

Het werkstuk bestaat uit twee delen: allereerst een artikel en vervolgens een bijlage.

In het artikel valt het op dat bij alle argumenten om de bewering te ondersteunen toch steeds de zwakke kanten van de argumenten werden belicht en van elk argument steeds de sterke en zwakke kanten tegen elkaar werden afgewogen.

De bijlage bevat een overzicht van alle verstrekte gegevens met een afweging van het nut van deze gegevens voor het eindoordeel. Voor het verband tussen de lengte van de snoek en de lengte van de gehemelteplaat wordt met een grafiek aangetoond dat dit redelijk lineair is, waarna met de bijbehorende functie bij de gevonden gehemelteplaten de lengten van de snoeken wordt bepaald.

In de bijlage wordt ook een opsomming gegeven van suggesties voor een verder onderzoek om de bewering nog meer aannemelijk te maken.

Ofschoon de commissie niet wil spreken over een volmaakt werkstuk, vindt zij dit werkstuk wel ver uitstekend boven alle andere.

De prijsuitreiking kreeg een bijzonder cachet doordat deze werd verzorgd door een vooraanstaand prehistoricus/ archeoloog van de Rijksuniversiteit te Leiden, Prof. Dr. Louwe Kooijmans. Deze schroomde daarbij niet enkele kritische kanttekeningen te plaatsen bij de opgave, zoals blijkt uit het volgende.

Reacties

Louwe Kooijmans was benaderd voor de prijsuitreiking, omdat hij te boek staat als zeer deskundig, speciaal op het gebied van het Mesolithicum. Welnu, dat bleek geen misplaatste inschatting. Hij bracht een prachtig verhaal mee, geïllustreerd met dia's hoe het nu werkelijk was gegaan met die volksstammen in Denemarken. Het bleek alras dat het artikel dat de commissie als bron had laten fungeren, geen goed artikel was. Louwe Kooijmans ging nog niet zover dat hij de auteur een prutser noemde, maar veel meer dan een goedwillende amateur bleef er niet over. Gelukkig deed dit aan de opgave voor de finale niets af, in die zin dat het redeneerproces natuurlijk overeind bleef, maar de feiten liggen anders. Wiskunde-A is een mooi vak, maar je moet wel oppassen bij het kiezen van je bronnenmateriaal, was de boodschap.
Overigens liet hij ook nog weten dat het inderdaad bij veel studenten schort aan het 'common sense' redeneren. Wat dat betreft, waardering voor deze poging.

Zoals al eerder bleek, waren de Commissieleden niet ongelukkig met de opgave nadat men kennis had genomen van de resultaten en de leerlingen in actie hadden gezien

in Garderen. De studenten zelf waren over het algemeen zeer positief. Een kleine enquête die na afloop werd gehouden, toonde aan dat de moeilijkheidsgraad redelijk was (vond 70%), de opgave leuk (80%), dat leerlingen met wiskunde B 'helemaal geen' voordeel hadden (80%), dat het weekend voor 100% geslaagd was en men verdeeld was of dit nu typisch wiskunde A was: 40% zeker wel, 60% niet echt en een enkeling helemaal niet.

Eén leerling verwoordde meerdere gevoelens: 'Deze opgave had weinig te maken met de wiskunde A die op de middelbare school onderwezen wordt, maar was misschien juist daarom des te interessanter.'

Slot

Terugblikken op deze finale is niet eenvoudig, daar de auteurs zelf mede de opgave hebben vormgegeven. De bedoeling was een opgave te maken die, naast wat eenvoudig 'laag bij de gronds' gereken en geteken, vooral het in relatie met elkaar brengen van informatie, het aanduiden van relevante informatie, het maken van keuzes en het redeneren als centrale activiteiten zou kennen. Het

lijkt erop dat de opgave in dat opzicht redelijk succesvol is geweest. De vraag die als vanzelf opduikt is, in hoeverre het gekozen model overdraagbaar is naar andere probleemsituaties zonder daarbij aanmerkelijk in waarde te verliezen.

Of, anders geformuleerd: biedt het gekozen model mogelijkheden voor de toekomst? Er wordt weleens opgemerkt dat het 'common sense' redeneren heel belangrijk is. Te belangrijk om er op school geen aandacht aan te geven.

Eén essentieel aspect van met name wiskunde-A, het deductief redeneren, zo dat al ooit in essentie een plaats heeft gehad in de schoolcurricula (dus meer dan voordoen en nadoen), lijkt meer op z'n plaats voor de wiskundig georiënteerden, of misschien wel exclusief voor hen die wiskunde gaan studeren.

De finale opgave van de wiskunde A-lympiade biedt in ieder geval stof ter overdenking.

Noot

Alle leerlingenmateriaal is uit het winnende werkstuk van het Bernardinuscollege uit Heerlen.