W12-16 ZakRekenMachines

Goede bedoelingen en voorlopige keuzes

F.J. van den Brink
Freudenthal instituut, RU Utrecht

Vier bundels werkbladen en bedoelingen

Het experimentele leerstofpakket *W12-16 ZakRekenMachines* bestaat op dit moment uit een docentenhandleiding en vier bundels werkbladen. De eerste twee bundels gaan over rekenen, de andere twee over wiskundige onderwerpen. De titels geven de inhoud van elke bundel aan.
Bundel 1 – *Onderzoek je rekenmachines* – handelt over de rekenmachines zelf, hun onderlinge verschillen, overeenkomsten, over hun verschillende rekencapaciteiten, over te grote getallen en andere onderwerpen die daarmee samenhangen. Bundel 2 – *Rekenonderwerpen* – gaat over alledaagse rekenonderwerpen waarin de rekenmachine als hulpmiddel wordt gebruikt, zoals bij procenten, schatten en hoofdrekenen in de supermarkt, en in spelletjes met machines. Bundel 3 – *Functies op je rekenmachine* – gaat weer, net als bundel 1, over de rekenmachines zelf. Nu echter niet over hun rekencapaciteit, maar over functieknoppen en andere algebraïsche mogelijkheden. En tenslotte bundel 4 – *Wiskundeonderwerpen* – gaat over de toepassing van machines als hulpmiddel bij gelijkvormigheid, het oplossen van vergelijkingen, werken met negatieve getallen, met hoeken en dergelijke onderwerpen uit het reguliere wiskundeonderwijs.
Je kan zeggen dat in bundel 1 en 3 de rekenmachine als onderzoeksobject wordt aangeboden en in bundel 2 en 4 als hulpmiddel wordt gebruikt in reken- en wiskundevraagstukken.
Bij het ontwerpen van de bundels zijn allerlei vragen gerezen. Moet je bijvoorbeeld al in de eerste klas beginnen met rekenmachines? Zullen alle leerlingen een zelfde machine gebruiken of juist verschillende? Moeten we de rekenmachine expliciet leren gebruiken in allerlei wiskundeonderwerpen? Zullen we uitgaan van hetgeen de leerling al weet van zijn of haar rekenmachine? En zo ja – hoe doen we dat dan? Hoe ligt de aansluiting met de algebra? Enzovoorts.
Bij het ontwerpen van deze bundels heb ik ter beantwoording van deze vragen zo'n tien keuzes gemaakt.
Niet iedereen zal zich in elk gekozen standpunt kunnen vinden [1]. Mijn visie is geen verplichte visie. Ik wil een discussie openen. In dit artikel leg ik u mijn standpunten voor met argumenten en, waar mogelijk, met tegenargumenten. U kunt dan zelf een afweging maken met betrekking tot het gebruik van de zakrekenmachine in het onderwijs.

Een paradoxale cultus

Uitgangspunt voor veel van mijn keuzes is hetgeen de kinderen al weten van hun rekenmachines. De leerlingen blijken in het algemeen goed thuis te zijn op hun machine. Ik heb zelfs de indruk dat er een hele 'cultus' bij kinderen bestaat, dat wil zeggen een 'verering' voor de zakrekenmachine gepaard aan allerlei rekenhandelingen, waarover wij, onderwijsgevenden en ontwerpers, slechts spaarzaam geïnformeerd zijn. U weet bijvoorbeeld dat veel kinderen hun rekenmachine gebruiken om leemten in hun rekenkennis op te vullen, bij tafels, bij breuken, ook bij functies. Dit voedt overigens de vrees van onderwijsgevenden voor een al te vroege invoering van het apparaat. Voor leerlingen liggen de zaken echter anders. 'Nou kan ik eindelijk weten hoeveel 7×8 is', verzuchtte een leerling eens. De rekenmachine is een hulp bij het onthouden, herinneren of controleren. Maar niet alleen dàt. De rm-cultus van de kinderen roept ook een vreemde paradox op.
'Hoe moest dat ook alweer? $\frac{1}{6}$ van een $\frac{1}{2}$?' Direct grijpen ze naar hun rekenmachine, hanteren hem met verbluffend gemak om de uitkomst te vinden die volgens ons onbereikbaar is als je niet meer weet hoe je met breuk en breukencirkel moet werken. Toch lukt het hen. Komen hier de handelingen op de rekenmachine in de plaats van het inzicht via de traditionele modellen voor de begripsvorming, zoals breukencirkels en aanverwanten?
Waarom zouden we niet proberen aan te sluiten bij deze rm-cultus van onze leerlingen?
Dat ligt voor de hand binnen het realistisch wiskundeonderwijs [2]. Aansluiten bij de ervaringen die de leerling met zijn of haar rekenmachine al heeft opgedaan en die uitbouwen met onder andere het idee van de eigenwijze rekenmachine, het gebruik van afgekorte getallen, bijzondere bewerkingen, en dergelijke. Op de machine rekenen de kinderen bijvoorbeeld met getallen zoals 0.6666666, maar op papier schrijven ze $\frac{2}{3}$, omdat dat nu

eenmaal zo moet in de wiskundeles.
Er bestaan meer van dergelijke 'vertaal'-situaties in de klas die we kunnen aangrijpen en uitbouwen. Maar hoe doen we dat in het pakket?
Hieronder volgen de tien keuzemomenten met overwegingen en voorbeelden uit de bundels.

1. Vanuit je eigen rekenmachine als onderzoeksgebied

Door het team W12-16 wordt onder andere naar toepassingen gezocht in de wereld van alledag. De rekenmachine is zo'n reëel toepassingsgebied dat tamelijk complex is. In de bundels komt dat tot uiting in de titels *Onderzoek je rekenmachines* (bundel 1) en *Functies op je rekenmachine* (bundel 3). Allerlei rekenactiviteiten worden gevraagd: het schrijven van een handleiding voor het apparaat, het vergelijken met andere machines, afwijkingen in het rekenen zoeken en hoe die zijn op te lossen, het onderzoek van functieknoppen en andere algebraïsche mogelijkheden. Kortom, mijn aanbeveling aan u is om de rekenmachine zelf op deze wijze één van de wiskundeonderwerpen te laten zijn. Hij is méér dan alleen rekengereedschap.

2. Met je rekenmachine op herhaling (de concentrische leergang in het pakket)

De rekenmachine wordt in de bundels opzettelijk gebruikt om reken- en wiskundige kennis op te roepen, te herhalen, te onthouden of te controleren. Tafels, regels bij breuken, bij negatieve getallen, wortels en machten (bundel 4) worden erop bekeken. Er wordt hiermee aangesloten op de rm-cultus van kinderen.
Maar het pakket is ook om een andere reden concentrisch van opbouw. Wiskundige begrippen zijn niet beperkt omlijnd, maar steeds verder uit te breiden en toe te passen. Veel bekende onderwerpen uit het rekenen op de basisschool (positiestelsel, vermenigvuldigen, breuken via breukencirkels, procenten, en dergelijke) vinden bijvoorbeeld in de rekenmachine een nieuwe toepassing of uitbreiding (cijfers wegpoetsen in getallen, getallen vermenigvuldigen die eigenlijk te groot zijn voor het venster van de rekenmachine, breuken als decimale getallen, procenten als factoren). Daarom komt een onderwerp uit bundel 1 in latere bundels meestal weer terug, op een hoger niveau of in een ander verband.
Enkele voorbeelden (A tot en met F) van deze concentrische herhalingen:

A. Van grote getallen naar de exponentiële functie 10^x
Vanaf de grote getallen in bundel 1, naar het vergelijken en voorspellen van wetenschappelijke notaties in bundel 2 en het gebruik van de knop 10^x om die getallennotatie te maken en te onderzoeken naar het uiteindelijk gebruik van de knop 10^x als exponentiële functie in de wedstrijd met X^2 en X! om de 'winnende functie' te zijn (bundel 3).

RM3.6 Winnende functie
X! X^2 10^X zijn drie functies op je rekenmachine voor X = 1, 2, 3, ...
≫ Welke heeft het snelst het scherm van je rekenmachine vol?
Dus: welke van de drie stijgt het snelst voor X = 1, 2, 3, ...
En welke is het langzaamst, denk je?
Op de rekenmachine kun je niet verder dan 69! (met de faculteitsknop).
Ga na 69! = 1.71122 98
Hoeveel cijfers heeft dat getal?
Is 69^2 groter of kleiner dan 69!
Is 10^{69} groter of kleiner dan 69!

≫ Welke van de drie functies stijgt het snelst? Waarom is dat zo?
≫ Vergelijk:
X! $= 1 \times 2 \times ... \times x$
$x^2 = x \times x$
$10^x = 10 \times 10 \times ... \times 10$ (x keer een 10)
(Uit: Werkblad Winnende functies ZRM deel 3, § 6)

B. Van eigenaardigheden naar programmeren
Een ander voorbeeld van concentrische herhaling is het probleem om het rekenen van verschillende rekenmachines in toom te houden. We beginnnen met het schrijven van een handleiding voor de eigen machine. De strokentaal komt aan bod die de knoppen op een rijtje zet. Na eigenaardigheden te hebben ontdekt, worden deze beheerst met 'haakjes zetten', een is-teken plaatsen, het machinegeheugen gebruiken, een boom van schakelingen opzetten. Ook de functieknoppen en hun grafieken (sin, cos, tan, x^2, $1/x$, 10^x, √) worden onderzocht.
Deze lijn loopt uit in het programmeren van de rekenmachine voor verschillende reken- en algebraonderwerpen, bijvoorbeeld om functieknoppen in formules te herkennen:

Substitueren
In de algebra vind je formules die op de functieknoppen van je rekenmachine lijken.
Kijk maar:

$(X-3)^2$ ....

X^2-3 ....

$\dfrac{1}{X^2-3}$ ....

$\dfrac{3}{X}$ ....

10^{X+1} ....

$\sqrt{(X-1)}$ ....

$\sqrt{(X)}-1$ ....

≫2 Deze functies heb je niet als knoppen op je rekenmachine. Je moet ze maken met de functieknoppen die erop lijken. Neem voor X het getal 10. Schrijf op de stippellijnen hierboven in pijlentaal welke knoppen je moet gebruiken. Schrijf de einduitkomst, maar ook de tussenantwoorden op. Begin maar: X = 10.

≫3 Bedenk zelf een formule. Hij moet op één of twee functieknoppen van je rekenmachine lijken. Schrijf hem op.

≫4 Teken de grafiek van de hierbovenstaande functies in de grafiek van de functieknoppen die erop lijken. $(X-3)^2$ lijkt op de functieknop X^2.

(Uit: Werkblad Substitueren ZRM deel 4, bladzijde 22)

C. Van afkorten naar foutenmarges en gelijke breuken

Het afkorten is iets waar elke rekenmachine direct de aandacht op vestigt: 'Breekt de machine af, of rondt hij af?' Daar sluiten in het vervolg van de bundels een groot aantal oefeningen op aan:

- de verschillende manieren waarop en redenen waarom afgekort wordt;
- op foutenmarges wordt ingegaan met bijvoorbeeld:

Zoek twee breuken die een uitkomst geven met 0.33 als begin, dus 0.33?????. De andere cijfers mogen van alles zijn.

$\frac{101}{300} = 0.336666 \approx 0.33$

$\frac{1111}{3333} =$

$\frac{1001}{3003} =$

(Uit: Werkblad 0.33????? ZRM deel 1 bladzijde 31)

De afkorting tot op 0.33 zorgt ervoor dat niet alleen aftelbaar veel breuken, maar ook talloze (overaftelbaar veel) oneindig decimale getallen gelijk zijn aan 0.33.
Het wordt de leerling duidelijk wat met 'foutenmarge' bedoeld is. Ook wat 'gelijke' breuken zijn, wordt discutabel gesteld.
Het afkorten wordt voortgezet in '0.33 komt overeen met 33%, 0.333 met 333 promille' en in de betekenissen en bedoelingen van punten en komma's in getallen.

RM2.2 Punten en komma's in getallen en op de rekenmachine

≫1 Spreek dit getal eens uit: 16.400.803,00 en zet het op je rekenmachine.

≫2 Vul in: 16.400.803,00 spreek ik uit als.....

≫3 Vul in: Welke knoppen moet je indrukken om 16.400.803,00 op je rekenmachine te zetten? Schrijf ze boven de pijl:
0. ————————> 16.400.803,00

Duizenden, miljoenen, biljoenen
Bij grote getallen zetten we vaak een puntje na drie cijfers om het getal gemakkelijker te lezen.
Kijk zo: 1 2 3 4 5 wordt 12.345

≫4 Welk getal is dit? Vul aan:
12 duizend...

≫5 Zet puntjes in de volgende getallen. Vul het woord aan.
a. 9 7 5 3 5 2 3
9 miljoen...
b. 8 1 2 3 4 8 7 5 6 5 2 3 4
8 biljoen...

≫6 Reken uit op je rekenmachine:
$12{,}345 \times 1000 =$ ....

≫7 $16{,}400803 \xrightarrow{\times 1000 =}$ .... $\xrightarrow{\times 1000 =}$

(Uit: Werkblad Punten en komma's in getallen en op de rekenmachine ZRM deel 2 ,§ 2)

D. Van positiestelsel en de functies van punten en komma's in getallen naar machten van 10 en wetenschappelijke notaties

12345 ——> 12045.
12345 ——> 123.45

Wat moet je doen op de rekenmachine om van het ene naar het andere getal te komen?
In verband met het positiestelsel worden, naast het wegpoetsen van cijfers in een getal, punten verschoven. Of zijn dat komma's? Een herhaling van de betekenis van punten en komma's in getallen en op de rekenmachine vindt plaats in bundel 2:

- op de rm noteren we: 1234,56 als 1234.56 met een punt in plaats van een komma;
- vaak noteren we voor de uitspraak een punt: 1234,56 is gemakkelijker te lezen met een punt voor de duizendvouden: 1.234,56;
- met de rekenmachine is dit aan te tonen (1.23456 × 1000 = 1234.56);
- dan volgt het verschuiven van de komma: 16.400.803 ———> 16.400,803 ———> 16,400803;
- dit leidt weer in op het tellen van nullen of een aantal posities bij de wetenschappelijke notaties: de rm geeft: 1.23456 E8 en wij: 1.23456 × 100000000 = 123456000; of beter 1.23456 E8 ≈ 123456000;
- nader onderzoek van de wetenschappelijke notaties volgt: reken uit op je rekenmachine 10000000 × 10000000 = 1. E14 (een kwestie van onder andere nullen tellen).

E. Van 'Een foutje onderweg' naar inverse bewerkingen en het oplossen van vergelijkingen

'Een foutje onderweg' (bundel 1) geeft 'van nature' aanleiding om via een inverse bewerking op het punt van uitgang terug te komen. In bundel 3 worden om die reden inverse functies van knoppen gezocht of gemaakt, de omgekeerde van een getal komt daar aan de orde. In bundel 4 wordt de inverse van een samengestelde functie gemaakt om een wortel van een vergelijking te vinden (zie voor voorbeelden op pag. 20 onder *Niet wachten met inverteren*).

F. Van percentages vergroten/verkleinen en verhoudingen naar de 'inverse tafel', gelijkvormigheid, normering, congruentie en exponentiële groei

Procenten worden als vermenigvuldigers gebruikt. Het accent ligt niet op procenten als 'delen van gehelen' [3]. Op het kopieerapparaat wordt bijvoorbeeld herhaald verkleind.

RM2.4 Kopieerapparaat

Op ons kopieerapparaat kun je foto's verkleinen, bijvoorbeeld als je het op 57% zet. Je krijgt dan een nieuwe foto waarvan lengte en breedte tot 57% van de vorige foto zijn gekrompen.

≫1 Ga na of dat ongeveer klopt. Ik heb de foto een paar keer verkleind. (Zie onderaan deze pagina.)

≫2 Wat doet de kopieermachine bij 50%?

≫3 Ons kopieerapparaat kan ook vergroten. Op hoeveel % moet je hem zetten, denk je?

≫4 Jan beweert: 'Als je de kleine kopie weer verkleint tot 50%, houd je niets over, want 100% – 50% – 50% = 0%.
Theo zegt: ' Als je de verkleinde kopie weer verkleint tot 50% houd je 25% over, want 1× 0.5 × 0.5 = 0.25.' Wie heeft gelijk?
Jan/Theo heeft gelijk, want......................................

(Uit: Werkblad Kopieerapparaat ZRM deel 2, §4)

Is twee keer verkleinen met 50% nul, of is het een kwestie van exponentiële krimp?

Vergroten en verkleinen op het kopieerapparaat tot (of 'met'?) bepaalde percentages komt overeen met de twee tafels van vermenigvuldiging die in elke verhoudingstabel te vinden zijn:

RM4.2 Tafel en inverse tafel

10	14	8	6
5	7	4	3

Hier heb je een verhoudingstabel.

≫1 Welke tafel zie je hierin?

≫2 Vul in:

10	14	8	6	......	......	......
5	7	4	3	9	1	6

≫3 Bij welk getal in de onderste rij zie je dat het de tafel van 2 is?

≫4 Je kunt er ook de tafel van 0.5 in zien. Vul maar in:

10	14	8	6	......	......	1
5	7	4	3	9	1	......

Deze tafel van 0.5 of $\frac{1}{2}$ noemen we de omgekeerde of inverse tafel van 2.

≫5 Waarom denk je?

(Uit: Werkblad Tafels en inverse tafels ZRM deel 4, §2)

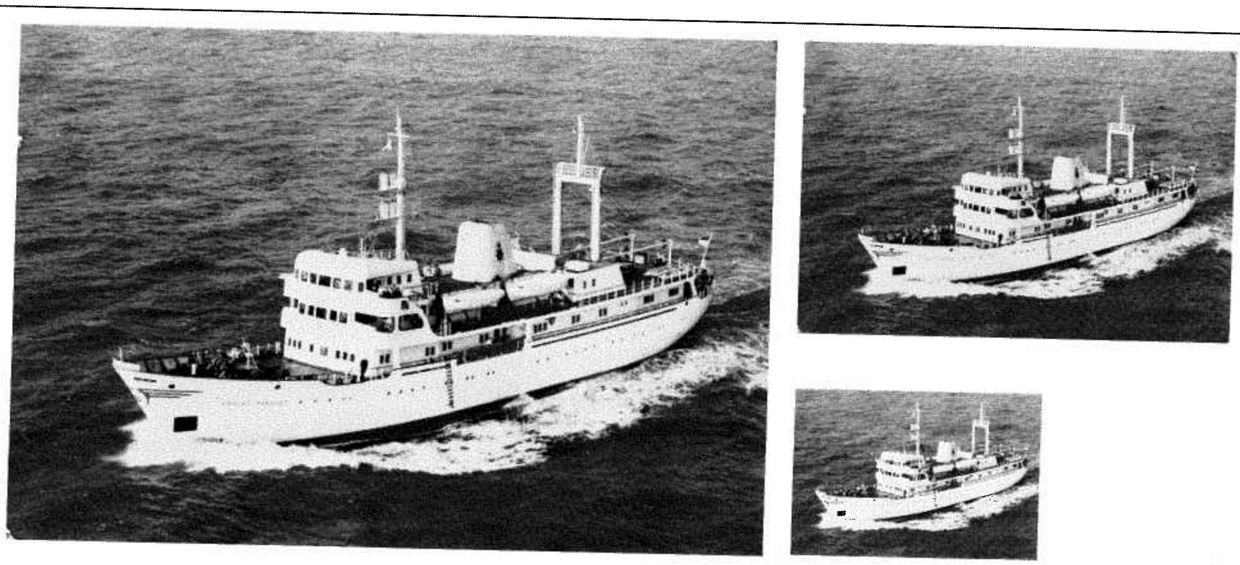
Vergrotingen en verkleiningen (gelijkvormige figuren) liggen blijkbaar rondom de 1 ofwel de 100% op het kopieerapparaat. Maar 100% zelf geeft noch een vergroting, noch een verkleining (congruente figuren).

Via 'procenten als vermenigvuldigers' wordt een aanzet gegeven tot exponentiële groei van bijvoorbeeld rente (bundel 2):

6 % van *f* 800,–. Hoe doe je dat op je rekenmachine?
Kies en verklaar:

$0.06 \times 800 =$ '6 honderdste van 800'
$6 \times 800 : 100 =$ '6 keer het honderdste deel van 800'
$6 : 100 \times 800 =$
$6 \times 8.00 =$
$6 \times 0.01 \times 800 =$
$0.06 \times 800 =$ geeft alleen de rente
$1.06 \times 800 =$ geeft alles na 1jaar
$1.06 \times 800 = =$ geeft alles na 2 jaar

(Uit: Werkblad 6% van f 800,– ZRM deel 2, bladzijde 16: Wat is de rente na 2.5 jaar?)



Illustratie behorend bij opgave 1 van werkblad RM2.4 'Kopieerapparaat'.

3. *Vanuit verschillende rekenmachines naar programmeren*

Verschillende rekenmachines of één soort rekenmachine voor alle leerlingen? Dat is een belangrijke en controversiële vraag. Hier volgen enkele overwegingen (a tot en met d) vóór het gebruik van verschillende rekenmachines:

a. In een informatiemaatschappij is de wijze waarop je machines voor je laat werken een belangrijke vaardigheid. Het gaat om het beheersen van verschillende apparaten. In de huidige consumptiemaatschappij die naar produktdifferentiatie streeft, is bovendien niet te verwachten dat die verschillen snel zullen verdwijnen. De zakrekenmachines als onbekend onderzoeksgebied passen goed in die opvatting. In bundel 1 en 2 gaan de leerlingen op zoek naar middelen om zoveel mogelijk rekenmachines te beheersen. De rm-cultus wordt met ervaringen uitgebreid om uit te putten in het geval een nieuwe machine onverhoopt niet goed werkt.

RM2.7 Haakjes zetten

Verschillende rekenmachines geven voor

$2+3\times7+5=$

verschillende antwoorden. Wat komt er bij jou uit? Door haakjes te plaatsen kun je op je rekenmachine verschillende uitkomsten uit deze som krijgen. Probeer eens.

Plaats haken zodat:	Hoe doe je dat op je rekenmachine?
$2+3\times7+5=\underline{40}$	....
$2+3\times7+5=\underline{38}$	....
$2+3\times7+5=\underline{60}$	....
$2+3\times7+5=\underline{28}$	....

Kun je deze uitkomsten ook op je rekenmachine krijgen zonder haakjes te gebruiken? Hoe? Schrijf eens op.

(Uit: Werkblad Haakjes zetten ZRM deel 2, §7)

b. Er zijn interessante klassikale lessen te geven door met verschillende rekenmachines te werken. De verschillende wijzen van hanteren en eigenaardigheden van machines, de daaruit voortvloeiende noodzakelijke bezinning op 'Meneer Van Dale' of op andere prioriteitenregels (bundel 1) komen bij het gebruik van één soort rekenmachine niet of niet zo zinvol aan de orde. De handleiding zou de onderwijsgevende daarop goed moeten voorbereiden.

c. Eén soort machine richt de leerlingen af, fixeert hen. Het gebruik van verschillende rekenmachines vooraf aan een cursus programmeren op de computer, zo bleek uit onderwijsonderzoek in Australië en in Zuid-Afrika [4], stimuleerde het programmeren sterker dan het gebruik van één soort rekenmachine door de leerlingen. Zonder het gebruik van verschillende rekenmachines is de zin van het 'programmeren' blijkbaar moeilijker te vatten.

d. Schakelen is belangrijker dan rekenen. Rekenen doet de rekenmachine wel voor je, maar zelf moet je de gegevens uit een context ten behoeve van de rekenmachine indelen en op een rijtje zetten, de eigenaardigheden van je rm beheersen. Het gaat niet om 'blind knoppen drukken', maar om een afwisselend verblijf in twee werelden: nu eens in de symbolische van de rekenmachine, dan weer in die van de (context-)opgave. (Zie ook pag. 19: *De integrerende rekenmachine die wiskundige onderwerpen aan elkaar koppelt.*)

Er zijn ook argumenten tégen het gebruik van verschillende rekenmachines:

a. Het onderwijs met verschillende machines is niet gemakkelijk: veel onbegrijpelijke uitkomsten, veel rumoer in de klas.

b. Niet de eigenaardigheden en verschillen tussen machines die slechts van tijdelijke aard zijn moeten als uitgangspunt worden genomen, maar de wiskundeonderwerpen in het onderwijs.

4. *Wanneer invoeren? In welke klas?*

De rekenmachine al in klas 1? Leren ze dan nog wel rekenen?

Het advies in het Trajectenboek [5] luidt: 'begin met de bundels in klas 1.' Onze overwegingen:

a. Invoering in klas 1 sluit beter aan op hetgeen in de basisschool al aan de rekenmachine werd gedaan.

b. Aansluiten bij het bezitpatroon van onze leerlingen. Uit publikaties (Nationaal Onderzoek Jongerenbladen 1987 – Intomart, Amsterdam; Typologie van de Nederlandse Jeugd – Oberon Haarlem 1983) blijkt dat door de bank genomen iedere leerling in klas 1 al een rekenmachine heeft. Een uitzondering vormen soms de buitenlandse kinderen.

c. Aansluiten bij de reeds eerder genoemde rekencultus, bij wat er al leeft bij kinderen en waarop verder is te bouwen. Bovendien gebruiken de leerlingen de rekenmachine vaak al heimelijk.

d. Tal van nieuwe uitbreidingen van rekenbegrippen zijn te verwachten door het gebruik van de rm (zie pag.15: *Met je rekenmachine op herhaling*).

Opvallend is dat leraren van het lbo meestal voor de invoering van de rekenmachine in klas 1 kiezen om hun leerlingen te ontzien. Wiskunde is niet moeilijk, maar hun leerlingen lopen vaak stuk op de rekenpartijen. Collega's op de mavo daarentegen, neigen ernaar om de invoering uit te stellen tot in klas 2 om zeker te zijn dat het rekenen nog eens herhaald wordt.

5. *Verplicht of facultatief?*

Een aantal onderwerpen moet goed door de leerlingen op de rekenmachine worden beheerst. Ik noem naar aanleiding van het Trajectenboek voor het D-niveau de volgende onderwerpen:

Voor klas 1 en 2: de eigenaardigheden van machines ($4\times5-4\times5=80$), haakjes zetten, geheimtaal en rm-pijlentaal, een foutje onderweg. Allemaal activiteiten om de rekenmachine te beheersen. Maar ook de volgende rekenonderwerpen: decimale getallen, het cijfers poetsen, punten verschuiven, de betekenis van punten en komma's,

geld en tijd, afkorten (afbreken of afronden?), met breuken werken, procenten, vergroten of verkleinen, de verhoudingstabel, vermenigvuldigen met te grote getallen. De rekenmachine is bovendien hulpmiddel bij formules en grafieken.
In klas 3 zijn verplicht: inverse functies maken voor samengestelde functies, met in aansluiting daarop het oplossen van vergelijkingen op de rekenmachine, verschillende functieknoppen (X^2, X!, 10^x in het kader van winnende functies, de knop 1/X), groei en wetenschappelijke notaties.

6. Hoe uit te voeren in de klas?

Het werken met een zakrekenmachine is bij uitstek een individuele zaak.
Mijn ervaring is dat klassikaal werken voor sommige onderwerpen (bijvoorbeeld het vergelijken van verschillende rekenmachines) goed past, maar dat individueel werken of in groepjes van hoogstens twee leerlingen rustiger verloopt.
Hier volgen een aantal manieren waarop met de bundels werkbladen is gewerkt; u kunt kiezen:

- Een bundel werd uitsluitend als huiswerk meegegeven en later besproken in de klas.
- Na een onderwerp uit het wiskundeboek werd een passend blad uit de bundels opgezocht en in groepjes gemaakt.
- Aan het begin of einde van een onderwijsperiode werd een selectie van werkbladen individueel gemaakt om een bepaald onderwerp (bijvoorbeeld 'Gelijkvormigheid') op te frissen of nader uit te werken.

7. De integrerende rekenmachine die wiskundeonderwerpen aan elkaar koppelt [6]

Lees hier niet per ongeluk 'de *geïntegreerde* rekenmachine'. Bij de *integrerende* rekenmachine gaat het om de autoriteit van de rekenmachine zelf die van de gebruiker *eist* dat hij of zij verschillende reken- en wiskundeonderwerpen (bijvoorbeeld procenten, decimale getallen en breuken) op een zelfde wijze aan de machine voorschotelt (in casu als afgekorte decimale getallen). Daardoor koppelt de leerling met zijn of haar rekenmachine als 'vanzelf' verschillende onderwerpen aan elkaar. De rekenmachine als integrerend (of zo men wil: een abstraherend) element tussen verschillende wiskundeonderwerpen – u kunt ervoor kiezen.
Voorbeelden (A tot en met E) van dergelijke koppelingen:

A. Procenten, decimale getallen en gewone breuken
Procenten zijn via de uitspraak te verbinden met decimale getallen en die weer met gewone breuken: '25%' komt overeen met '0.25' en dat weer met 'vijfentwintig honderdsten' en dat weer met '$\frac{1}{4}$'.
Er ontstaan verbanden door verschillende afkortingen:
$\frac{1}{3} \approx 0.33$ dat is '33%'; $\frac{1}{3} \approx 0.333$ dat is '333 promille'.
Breuken maken op de rekenmachine met de breukenknop, levert afgekorte decimale getallen die met elkaar moeten worden vergeleken en als breuk herkend of herleid:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{1 \div 2 =} 0.5$$
.... ⟶ 0.3333333
.... ⟶ 3.3333333
.... ⟶ 0.6666666
.... ⟶ 0.0666666
(Uit: Werkblad Breuken maken ZRM deel 1 bladzijde 28)

Deze oefening sluit goed aan op de eerder genoemde 'rm-cultus' van kinderen.

B. Het afkorten, equivalente breuken en foutenmarges
Het afkorten zorgt ervoor dat onderwerpen als 'foutenmarges' en 'gelijke breuken' gekoppeld worden (zie pag. 16: *Met je rekenmachine op herhaling, punt C*).

C. Procenten als vermenigvuldigers bij groeiprocessen: verhoudingstabel en congruentie, gelijkvormigheid en exponentiële groei
Vergroten en verkleinen op het kopieerapparaat tot bepaalde percentages van het origineel, is een goede aanschouwelijke basis om procenten als factoren op te vatten. Procenten zijn dan te gebruiken in verschillende vormen van groei (congruentie, gelijkvormigheid, exponentiële groei). De rekenmachine maakt de ingewikkelde berekeningen daarbij mogelijk (zie pag. 17: *Met je rekenmachine op herhaling, punt F*).

D. Graden en uren; verschillende hoekmaten kunnen worden verbonden: deg, grad en rad
Graden zijn met uren te vergelijken voor wat hun verdeling betreft in zestig minuten en zestig seconden (bundel 4); via de hoekmeter, mekkameter en π-(halve slag-)meter worden de hoekmaten (deg, grad en rad) op de rekenmachine vergeleken en gekoppeld. Deze koppeling is echter niet gemakkelijk.

E. Refererend taalgebruik tussen formele wiskundetaal en de notaties op de rekenmachine
Enkele voorbeelden:

- Een functie kan in de rm-pijlentaal worden beschreven op de wijze van het intoetsen van de knoppen. Bijvoorbeeld 30 $\underrightarrow{\text{sin}}$ ... in plaats van sin 30 = ...
- Er wordt opdracht gegeven om knoppen op de rekenmachine te zoeken die op algebraïsche formules lijken. Bijvoorbeeld:
  De formule voor de remafstand in meters van een auto met snelheid S is $(\frac{S}{10})^2$ en die formule lijkt op X^2.
- De inverse functies en bewerkingen vinden een duidelijke representatie in pijlen die een tegengestelde richting opwijzen ten opzichte van een functie of bewerking. (Zie pag.20: *Niet wachten met inverteren.*)
- Door taalfacetten zoals leesrichting en notatiewijzen, kunnen bij het gebruik van de rekenmachine allerlei onderwerpen met elkaar worden verbonden.

8. Gevarieerde rm-pijlentaal

De algebragroep W12-16 maakt een onderscheid tussen 'formule' (bijvoorbeeld een functievorm of de vorm $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=$ als één geheel) en 'ketting-van-operaties' (bijvoorbeeld 6 $\boxed{1/X}$ $\boxed{M+}$ 3 $\boxed{1/X}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$). De ketting-van-operaties is te schrijven in rm-pijlentaal. Die taal bestaat uit pijlen die in principe alle richtingen kunnen opgaan. Aparte aandacht wordt in de bundels besteed aan horizontale functiepijlen, verticale bewerkingspijlen en aan de 'inverse' pijl die in de tegengestelde richting van een pijl gaat (zie punt 9: *Niet wachten met inverteren*).

De *horizontale* pijlen kunnen leesfouten voorkómen. Als kinderen bijvoorbeeld sin 30° op de rekenmachine moeten uitrekenen, wordt vaak abusievelijk eerst de sin-toets ingedrukt en dan het getal 30, overeenkomstig de leesrichting. De pijlentaal komt daaraan tegemoet:

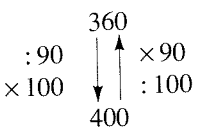
$$30 \xrightarrow{\sin} 0.5$$

Deze notatie past ook in een rij naar een meer formele functienotatie:

$$x \xrightarrow{\sin} \sin(x)$$
$$\sin\colon\ x \rightarrow \sin(x)$$
$$f\colon\ x \rightarrow f(x)$$

Uit ervaring weten we dat horizontale pijlen gemakkelijk aanleiding geven tot fouten als ze niet functies, maar bewerkingen representeren. Bijvoorbeeld de 'spaghetti - sommen': $360 : 90 = 4 \times 100 = 400$.

Vandaar de voorkeur voor *verticale* pijlen bij bewerkingen met getallen op de rekenmachine.



9. Niet wachten met inverteren

Ik stel voor om met de invoering van een bewerking of functie tegelijk een inverse bewerking of inverse functie daarvan aan de orde te stellen.

Inversen komen in verschillende gedaanten voor in de bundels. We noemen ze:

a. 'Een foutje onderweg' (bundel 1) dat uitnodigt tot het vinden van een inverse bewerking.

b. 'Kapotte knoppen' doen dat ook:

De keerknop × is stuk.
Hoe doe je nu: $56 \times 12 =$?
En als er hard geworden kauwgum op de deelknop zit, hoe doe je dan $283 : 7 =$ op de machine?
(Uit: Werkblad Kapotte knoppen ZRM deel 1 bladzijde 15)

Een leerling (klas 1) deed: 56 + 56 = + 56 = ... + 56 = en verifieerde de uitkomst 672 met 672 : 12 = 56 op de 'kapotte machine'; een andere leerling deed 1 : 12 = 0.0833333 en daarna 56 : 0.0833333 = 672.00027 en concludeerde: 'Het moet 672 zijn.'

Bij 283 : 7 = zonder deelknop zei een leerling: '283 – 7 en net zo lang –7 doen tot je nul hebt.'

Opvallend veel kinderen gaven $283 \times \frac{1}{7}$ als oplossing waarbij $\frac{1}{7}$ werd gevonden via de 1/X – knop. Inverteren blijkt een tamelijk 'natuurlijke' zaak te zijn.

c. Verschil tussen inverse van een bewerking met getallen en een inverse van een functie.
2 en $\frac{1}{2}$ zijn bijvoorbeeld elkaars 'inverse' onderscheidbare getallen; bij de functie 1/X is de inverse echter weer 1/X (bundel 3).

d. De inverse functieknop vinden van functieknoppen op de rekenmachine. Bijvoorbeeld van X^2.

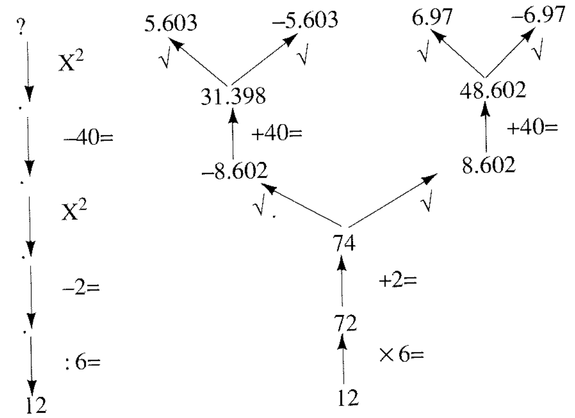
e. Het inverteren van de tafel van vermenigvuldiging in een verhoudingstabel (bundel 4).

f. Bij een gegeven samengestelde functie een inverse functie maken. Deze methode kan worden toegepast op het vinden van wortels van een vergelijking.

Een voorbeeld [7]:
Vind de wortels van de vergelijking:

$$\frac{(x^2-40)^2-2}{6} = 12$$

Samengestelde pijlen Samengestelde inverse pijlen



h. De wortel van een vergelijking vinden en invullen tot een gelijkheid en daarna vanuit die gelijkheid zelf een nieuwe vergelijking maken. Voorbeeld:
$18 \times X - (X+5) - 3 \times (X-2) + 4 \times (X-5) = -55$
Teun vond $X = -2$.
$18 \times -2 - (-2+5) - 3 \times (-2-2) + 4 \times (-2-5) = -55$
Heeft hij dat goed gedaan?
Maak van deze som een vergelijking die als oplossing heeft: $X = -5$.
(Uit: Werkblad Negatieve getallen en vergelijkingen ZRM deel 4, bladzijde 14)

10. De rm levert uitbreidingen voor de onderwijsideeën van het W12-16-team

Binnen de algebragroep W12-16 wordt gedacht aan het ontwikkelen van soorten formules: 'winnende machtformules' en inverse samengestelde functies voor het oplossen van vergelijkingen. Door die ideeën ben ik geïnspireerd en heb op de rekenmachine uitbreidingen daarvoor gevonden. U.kunt er zich ook door laten inspireren:

- Niet alleen machtfuncties, ook andere exponentiële en goniometrische functies worden op het winnen vergeleken. Welke heeft als eerste het venster van de rm vol: X^2, X! of 10^x?
- Inverse functies worden gezocht (van bijvoorbeeld de knoppen sin en X^2) of gemaakt.
- Er worden formules gegeven (bijvoorbeeld $5(x-3)^2$) die op de functieknoppen lijken (X^2).
- Algebraïsche formules worden door de leerling ontworpen, bestaande uit functieknoppen van zijn of haar zakrekenmachine.
- Inverse functies worden gezocht om de gegeven vergelijking op te lossen (zie: *Niet wachten met inverteren*).

Tot slot

In dit artikel stond de zakrekenmachine centraal. Daardoor kan de indruk zijn gewekt dat je er niet buiten kan – geen dag – en dat elk onderwerp een rm-onderwerp is. Deze indruk is helaas niet juist.
Ik heb geprobeerd materiaalkeuzes (van verschillende soort) te beschrijven, in de hoop dat dit zal bijdragen tot een overwogen en bewuste integratie van de rekenmachine in het wiskundeonderwijs.

Noten

[1] Met dank aan leden van de Rekengroep Ed de Moor, Mieke Abels en Monica Wijers, aan de Algebragroep bij monde van Aad Goddijn en aan George Schoemaker voor hun kritische opmerkingen.

[2] Vaak wordt het schatten genoemd als eerste, passende rekenactiviteit bij het gebruik van rekenmachines. Veel leerkrachten ervaren echter dat de rekenmachines door hun rekenautoriteit en 'exacte' uitkomsten juist niet tot schatten uitnodigen en leggen het schatten daarom op. Leerlingen rekenen op hun beurt eerst de uitkomst uit op hun machine en vullen achteraf de geëiste schattingen in. Om zeker te zijn van het antwoord wordt niet geschat, maar veelal de handelingen op de machine herhaald. Ze moeten blijkbaar een èchte reden hebben om te schatten. Die kunnen we vinden in de rm-cultus van kinderen, bijvoorbeeld in de kennis van kinderen dat verschillende rekenmachines verschillend rekenen, waardoor de noodzaak om te schatten ervaren wordt.
In bundel 1 wordt overigens expliciet een beroep gedaan op schatten via spelletjes met stipsommen (zoals Doelschieten: ... $\xrightarrow{\times 28}$ (961, 983)).

[3] Zie voor een overzicht over het gebruik van procenten: E. de Moor, L. Streefland, A, Treffers: *Procenten, analyse van het gebied*, Panamapost 9(4) (1991), 25-42.

[4] Volgens een nog niet gepubliceerd onderzoeksverslag van H. Murray (Universiteit van Stellenbosch, Zuid-Afrika).

[5] In het Trajectenboek van W12-16 worden de verschillende leerstofgebieden per klas en naar niveau gedetailleerd beschreven. Het Trajectenboek is verkrijgbaar bij de SLO, Enschede.

[6] Zie daarvoor het artikel *W12-16 ZakRekenMachines* in de Nieuwe Wiskrant, 10 (2), (dec. 1990), 34-39.

[7] Dit voorbeeld is van Theo Obdeyn.