

Hoe teken je een kubus?

J. van de Craats
KMA, Breda

Wie net als ik vorig jaar (1990) de tentoonstelling *De Verboden Stad* in museum Boymans-van Beuningen bezocht heeft, zal genoten hebben van de vele kunstwerken waarmee de Chinese hofcultuur belicht werd. Het ging om bezittingen van de keizers van de Qing dynastie, die van 1644 tot 1911 over het immense Chinese rijk regeerden. Allerlei beelden, gewaden, gebruiks- en kunstvoorwerpen uit het Paleismuseum Peking, waarvan er vele nog nooit eerder China hadden verlaten, konden in Rotterdam bewonderd worden. Zeer spectaculair waren twee horizontale rolschilderingen op zijde, beide ruim twintig meter lang en bijna zeventig centimeter hoog, die in speciaal voor dat doel gebouwde vitrines volledig uitgerold te zien waren; de bezoekers konden erlangs schuifelen, net als bij het beroemde tapijt van Bayeux. Eigenlijk waren die rollen niet bestemd om zo bekeken te worden: de keizerlijke beschouwer bekeek telkens een klein stukje van de schildering door de rol met de ene hand op en met de andere hand af te rollen.

De Chinese tekenmethode

De twee tentoongestelde rolschilderingen hebben allebei een langgerekt tafereel als onderwerp: de ene toont de intocht van keizer Kangxi in de hoofdstad na een lange inspectiereis die hij in 1689 had ondernomen naar het gebied 'ten zuiden van de rivier', de andere rol laat de

feestelijkheden zien, die langs diezelfde intochtsweg plaatsvonden ter gelegenheid van de verjaardag van de keizerin-weduwe Chongqing in 1751. Figuur 1 geeft er enige fragmenten van weer. Het gehele tafereel bestrijkt een traject van ongeveer 3 km en toont versierde stalltjes en winkels, toneelvoorstellingen, spelen, wedstrijden, optochten en alles wat er verder nog maar op zo'n feestelijke dag in de hoofdstad plaatsvond.

Voor mensen met een meetkunde-tic zijn die schilderijen ook nog op een andere manier interessant: hoe zetten de Chinese hofschilders zo'n langgerekt tafereel op het doek? Zelfs voor ons, met al onze kennis van perspectief en projectiemethodes, zou dat geen simpele opgave zijn: vanuit één standpunt kun je niet alles overzien en het aan elkaar plakken van losse stukken is ook niet mooi. Een grote 'luchtfoto' geeft niet genoeg details. Kortom, een perspectieftekening zoals wij die gewend zijn, is voor dit doel eigenlijk onbruikbaar. Maar voor de Chinezen was dat helemaal geen probleem: perspectieftekenen was daar in die tijd nog vrijwel onbekend en hun traditionele tekenwijze leende zich juist erg goed voor dit soort tekeningen. Die manier van tekenen kwam erop neer dat je 'frontaanzichten' in hun ware proporties tekende en horizontaal naar achteren lopende evenwijdige lijnen schuin omhoog (met een zekere verkortingsverhouding). Gewoon de standaardmanier dus waarop leerlingen op school nog steeds kubussen leren tekenen. Toch pasten

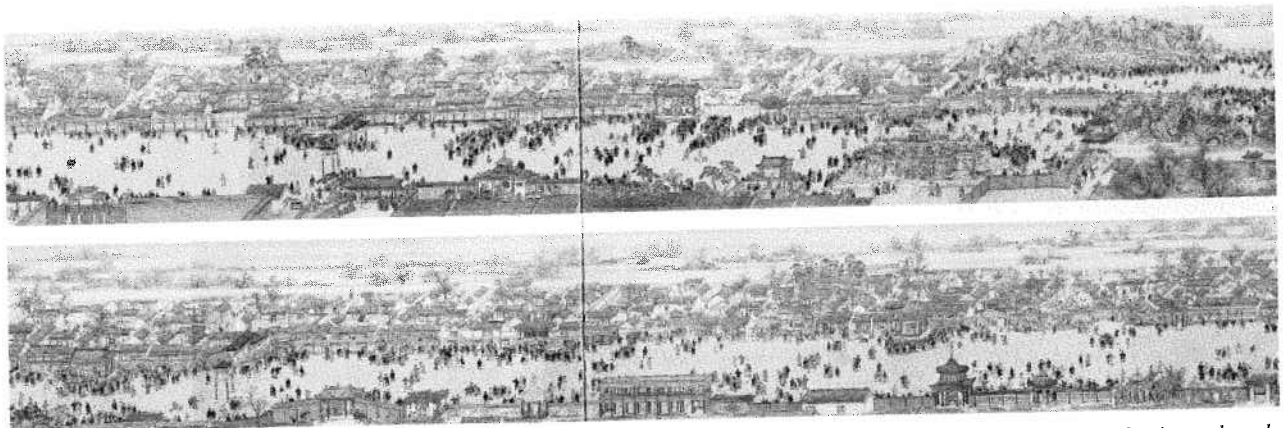


Fig. 1: Feestelijkheden ter gelegenheid van de verjaardag van Keizerin-weduwe Chongqing (fragmenten van een horizontale rolschildering op zijde)

zij die methode niet echt consequent toe, want veraf gelegen zaken werden kleiner getekend, in overeenstemming met de ervaring dat je dingen kleiner ziet naarmate ze verder weg liggen. Die schilders schijnen zich weinig bekommerd te hebben om het feit dat deze methode dan 'in de verte' tot tegenstrijdigheden kan leiden.

Ook in hun meer 'gewone' prenten pasten de Chinese schilders een dergelijke tekenwijze toe: ze tekenden frontaanzichten meestal in ware proporties, en horizontale lijnen die naar achteren lopen onderling evenwijdig schuin omhoog. Maar soms tekenden ze zelfs een soort 'omgekeerd perspectief'; figuur 2 geeft daarvan een goed voorbeeld. Het is het portret van keizer Kangxi aan zijn schrijftafel.



Fig. 2: Keizer Kangxi calligraferend aan zijn schrijftafel

Wat ons direct opvalt is de vreemde manier waarop die tafel getekend is: als een trapezium met de korte zijde naar ons toe. Toch lijkt het de bedoeling te zijn dat die tafel gewoon rechthoekig is, kijk maar naar het vel papier, de inktsteen en de cassette die op tafel liggen. De voeten van het kamerscherm zijn daarentegen weer min of meer perspectivisch afgebeeld. Een mogelijke verklaring van de vreemd getekende tafel zou kunnen zijn dat door deze manier van afbeelden de aandacht des te sterker op de keizer als centrale, goddelijke figuur gericht wordt, maar erg bevredigend kan ik dit niet noemen. De tentoonstelling *De Verboden Stad* heeft ons er in elk

geval weer eens aan herinnerd dat wat we vaak als vanzelfsprekend aannemen, namelijk ons vermogen om natuurgetrouwe tweedimensionale afbeeldingen te maken van de driedimensionale wereld om ons heen, in werkelijkheid een verre van triviale culturele verworvenheid is. Pas in de achttiende eeuw begon de kunst van het perspectieftekenen langzaam door te dringen aan het Chinese hof, waarschijnlijk als gevolg van de activiteiten van Europese missionarissen.



Fig. 3: Plaat 42 uit deel 1 van *Perspective* (1604) van Jan Vredeman de Vries

Jan Vredeman de Vries

Trouwens, ook in Europa heeft het lang geduurd voordat men werkelijk alle geheimen ervan begreep. Dat kun je bijvoorbeeld zien aan sommige prenten uit het beroemde leerboek *Perspective* uit 1604-1605 van onze landgenoot Jan Vredeman de Vries. Deze architect, schilder en graficus, geboren in 1527 in Leeuwarden, keerde na een werkzaam bestaan dat hem door heel Europa voerde, terug naar de lage landen om in dienst te treden van Prins Maurits, aan wie hij ook dit leerboek opdroeg. Het telt twee delen die grotendeels gevuld zijn met gravures, voorzien van korte toelichtingen waarin Vredeman de Vries aan de hand van voorbeelden de wetten van het perspectieftekenen uitlegt. Die gravures ademen vaak een vreemde, surrealistische sfeer. Intrigerend, indrukwekkend, magisch bijna (zie figuur 3). Maar wat de meeste van zijn tijdgenoten, en zelfs veel hedendaagse kunsthistorici niet in de gaten hadden, is het feit dat die prenten vaak tekentech- nisch gezien helemaal niet kloppen! Welbeschouwd snapte Vredeman de Vries niet goed wat perspectiefteke- nen nu eigenlijk is. Hij had van Albrecht Dürer geleerd dat je moest werken met een *horizon* waar de beelden van evenwijdige lijnen samenkomen, maar hij begreep niets van de plaats van de verdwijnpunten daarop. Bovendien tekende hij ook verdwijnpunten van richtingen die *niet* horizontaal zijn op de horizon! We zien die fouten bijvoorbeeld in zijn elfde prent (figuur 4), waar midden op de voorgrond een rechthoekig blokje (aangegeven met het cijfer 5) schuin omhoog in een bak ligt. De verdwijnpunten van de ribben ervan tekent Vredeman de Vries echter welgemeend op de horizon. Maar ook met de

twee schuine horizontaal liggende balken is iets mis: de verdwijnpunten van de voorste balk omsluiten de verdwijnpunten van de achterste balk, hetgeen volstrekt verkeerd is. Eigenlijk maakt Vredeman de Vries alleen maar geen fouten als hij zich kan beperken tot tekeningen met slechts drie hoofdrichtingen: verticaal, horizontaal evenwijdig aan het tafereel en horizontaal loodrecht op het tafereel.

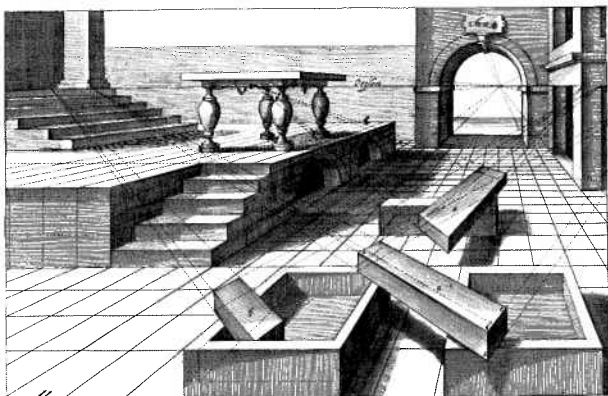


Fig. 4: Prent 11 uit deel 1 van *Perspective* van Jan Vredeman de Vries: Zoek de fouten!

Perspectief of andere methodes?

Als je een tweedimensionale afbeelding wilt maken van een driedimensionale voorstelling, zul je een bewuste keuze moeten doen omtrent de tekenmethode. Martin Kindt heeft daar in 1989 in dit tijdschrift al eens een lezenswaardig artikel aan gewijd; ik borduur op zijn thema's nog wat voort. Eerst enige woorden over het perspectieftekenen. De perspectiefmethode werkt vooral goed als je te doen hebt met een voorstelling die maar een kleine 'gezichtshoek' in beslag neemt: je neemt dan een vast *oogpunt* en projecteert van daaruit in gedachten de voorstelling op een doorzichtig scherm (het *tafereel*) loodrecht op de blikrichting. Bekijk je de zo ontstane afbeelding weer met één oog vanuit het oogpunt, dan zie je op de prent hetzelfde als hetgeen je eerst in werkelijkheid zag. Een foto die met een gewone lens gemaakt is, komt ook ongeveer op zo'n manier tot stand. Eigenlijk geeft een foto ons dus alleen maar een natuurgetrouw beeld wanneer we hem vanuit het juiste oogpunt met één oog bekijken. Maar onze hersenen stellen ook een natuurgetrouwe indruk van de voorstelling samen wanneer we de foto vanuit een andere hoek zien. Blijkbaar is het verwerken van gezichtsindrukken in onze hersenen een uiterst gecompliceerd proces; hoe dat allemaal precies in zijn werk gaat, is allerminst duidelijk.

De fouten van Vredeman de Vries illustreren het feit dat het vervaardigen van goede perspectieftekeningen geen eenvoudige zaak is. Maar de grondregels omtrent verdwijnpunten van horizontale richtingen zijn niet zo ingewikkeld; op school kun je die best behandelen (en op de havo gebeurt dat ook bij wiskunde B; zie bijvoorbeeld het artikel van Anton Roodhardt in het decembernummer

van 1990 van dit tijdschrift). Maar wil je dieper op de zaken ingaan, dan kom je al snel in allerlei finesses terecht die de schoolpraktijk overstijgen.

Zijn er geen tekenmethodes die eenvoudiger zijn en toch bevredigende resultaten geven? Sinds jaar en dag leren scholieren in de meetkundeles de scheve parallelprojectie. Kubussen en blokken worden 'op z'n Chinees' getekend met voor- en achteraanzichten 'op ware grootte', en met zijvlakken als parallellogrammen (figuur 5).

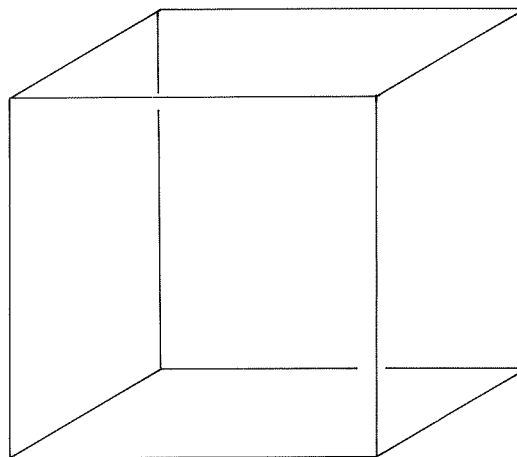


Fig. 5: Een kubus in scheve parallelprojectie

De wetmatigheden van die methode zijn heel simpel: evenwijdige lijnen blijven evenwijdig en van de drie hoofdrichtingen worden er twee onderling loodrecht getekend, terwijl de derde met een zekere wijkhoek en een zekere verkortingsverhouding op papier komt. Wijkhoek en verkortingsverhouding kun je daarbij in principe onafhankelijk van elkaar vrij kiezen. Het is overigens nog maar de vraag of de oude Chinezen deze tekenmethode ook zagen als een 'scheve parallelprojectie'. Het lijkt me waarschijnlijker dat ze haar gewoon hebben opgevat als een verzameling tekentrucs zonder veel structuur of verband. Dat zou de vreemde 'afwijkingen' van de regels verklaren die we in sommige prenten aantreffen. Hoe dan ook, die Chinese prenten maken op ons een vreemde, scheve, onnatuurlijke indruk. Hoe komt dat eigenlijk? Komt het door het ontbreken van verdwijnpunten en een horizon? Of zit er wat anders achter? En geldt hetzelfde niet voor onze kubussen van de meetkundeles? Waarom zien die kubussen, blokken, prisma's en piramides er allemaal zo scheef uit?

Scheve of loodrechte projectie?

Ik ben me dat voor het eerst gaan afvragen toen ik zo'n tien jaar geleden een boekje geschreven had over de Draaikubus van Rubik. Daarin kwam onder andere een oplossingsmethode voor van die puzzel. Ik had de oplossing netjes geïllustreerd met 'schoolse' kubustekeningen in scheve parallelprojectie, want ik had nu eenmaal geleerd dat je op die manier kubussen tekent. Van allerlei kanten kreeg ik toen de klacht dat die tekeningen zo

onduidelijk waren. In concurrerende boekjes stonden tekeningen die een veel 'levensechtere' indruk maakten. Sommige waren perspectieftekeningen, maar bij andere figuren bleven de evenwijdige kubusribben netjes evenwijdig. Toch zagen ze er veel realistischer en professioneler uit dan mijn schoolkubusjes. Hoe waren die kubussen dan getekend? Na een tijdje begreep ik dat het steeds ging om *orthogonale*, dat wil zeggen *loodrechte* parallelprojecties. Het was blijkbaar niet zo dat de 'onnatuurlijkheid' van de scheve parallelprojectie moest worden toegeschreven aan het ontbreken van verdwijnpunten, want die professionele tekeningen kenden ook geen horizon of verdwijnpunten. Het bleven parallelprojecties. Maar waarom zagen die orthogonale parallelprojecties er dan veel 'realistischer' uit dan mijn scheve parallelprojecties?

Oneindig ver

Hier is het antwoord. Perspectief hoort bij een centrale projectie, maar als je het projectiecentrum, het oogpunt, steeds verder weg kiest, gaat zo'n centrale projectie steeds meer lijken op een parallelprojectie, dat wil zeggen een centrale projectie waarbij het oogpunt 'op oneindig' ligt. En elke fotograaf weet dat bij fotograferen het verschil tussen een afstand van een paar meter en 'oneindig ver' niet zo groot is. Een uitvergroting van een foto van een klein object op grote afstand is nauwelijks van een parallelprojectie te onderscheiden. Maar zou je *elke* parallelprojectie op zo'n manier door een uitvergroete foto kunnen benaderen? Zou je bijvoorbeeld een foto van een draadmodel van een kubus kunnen maken die vrijwel overeenkomt met figuur 5? Merkwaardig genoeg is het antwoord: nee, dat kan niet! Hoe je ook probeert, zo'n foto zal er nooit zo uitzien als figuur 5. Waarom? Wel, als je van een ver verwijderde kubus het voorvlak echt als een vierkant op de foto wilt hebben, zul je de kubus recht van voren moeten fotograferen. Maar dan vallen de zijvlakken (vrijwel) weg. Als het fototoestel ver van de kubus verwijderd is, heb je namelijk altijd te maken met een *orthogonale* (loodrechte) projectie: de lichtstralen vallen *loodrecht* op de gevoelige plaat. Een scheve parallelprojectie kan niet via een foto gerealiseerd worden, want als je het toestel scheef houdt, valt de kubus buiten het beeld.

Met onze ogen is het niet veel anders: als we naar een ver voorwerp kijken, richten we onze blik erop. Het beeld komt dan in het centrum van ons blikveld te staan. Een tekenaar die een realistische tekening wil maken, moet in gedachten een doorzichtig scherm *loodrecht op de blikrichting* plaatsen. Wat gechargeerd uitgedrukt: je *ziet* een verre kubus nooit in scheve parallelprojectie; als je een kubus (bijna) in parallelprojectie ziet, is het altijd een *loodrechte* parallelprojectie. Laat iemand maar eens een draadmodel van een kubus tegen een lichte achtergrond vóór je in de lucht houden. Hoe de kubus ook gedraaid wordt, nooit zul je zoiets als figuur 5 zien!

Het feit dat de projectierichting bij een scheve parallelprojectie niet loodrecht op het projectievlak staat, is de werkelijke reden dat we de kubus van figuur 5 onnatuurlijk en primitief vinden. De tekening sluit niet aan bij onze visuele ervaring, hoe correct en netjes hij verder ook getekend is. Je kunt dit ook in de praktijk zien: technische tekeningen en reclametekeningen zijn vrijwel nooit in scheve parallelprojectie getekend; bijna altijd zijn het of perspectieftekeningen, of *orthogonale* parallelprojecties. Figuur 6 geeft er een voorbeeld van, ontleend aan een gebruiksaanwijzing van een bandopnameapparaat. In figuur 7 zien we een ander voorbeeld: een sigarenkistje in orthogonale projectie. En figuur 8 laat zien dat foto's inderdaad heel erg op orthogonale parallelprojecties kunnen lijken.

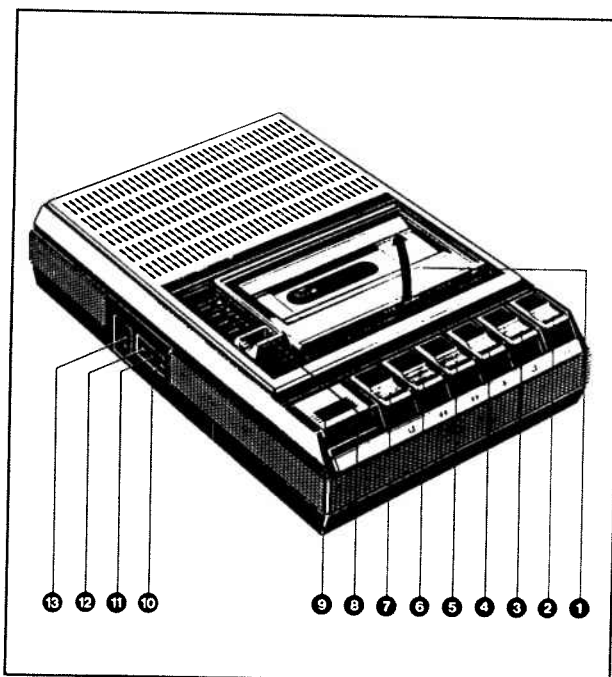


Fig. 6: Een tekening van een bandopnameapparaat in een orthogonale parallelprojectie

Weg met de scheve projectie?

Dit brengt me bij mijn belangrijkste punt, een punt dat ik ook al eens eerder naar voren heb gebracht: zou het geen aanbeveling verdienen om in het onderwijs de scheve parallelprojectie de deur uit te doen en voortaan slechts te werken met orthogonale parallelprojecties? Je krijgt dan tekeningen die een realistische, professionele indruk maken en die daardoor het ruimtelijk inzicht van de leerlingen stimuleren. Ik denk dat het gebruik van scheve parallelprojecties in de meetkunde de ruimtelijke verbeelding belemmert. Leerlingen hebben moeite figuren te 'zien' als ze niet aansluiten bij de visuele ervaring. Goed beschouwd is het enige voordeel van de scheve parallelprojectie dat je er zo'n massa standaardconstructiesommetjes mee kunt maken, juist omdat voor- en achtervlak van een kubus of blok altijd onvervormd worden weerge-

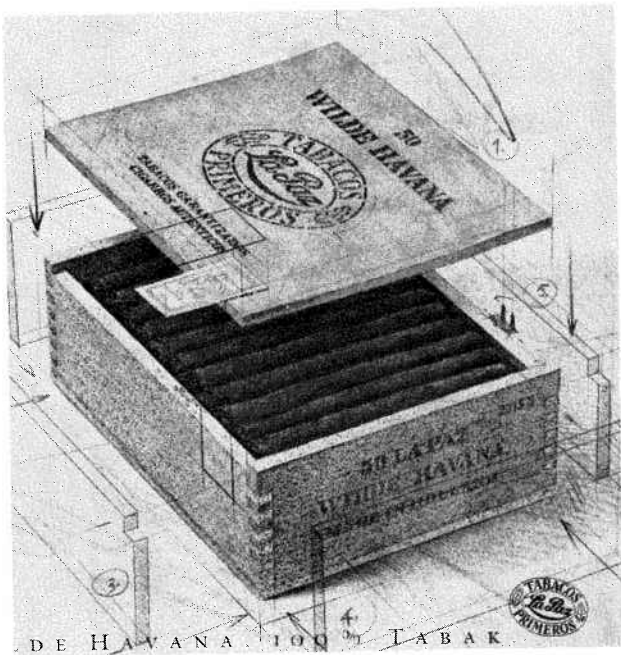


Fig. 7: Een tekening van een sigarenkistje in een orthogonale parallelprojectie

geven. Maar is dat een gewichtige didactische reden? Als je een voorstel doet, moet je ook de consequenties ervan bezien. In dit geval betekent het dat je moet aangeven hoe orthogonale parallelprojecties nu eigenlijk gemaakt worden en wat de eigenschappen ervan zijn. Dat

is helaas geen standaardstof bij de lerarenopleiding of op de universiteit. Veel leraren zullen dus willen weten hoe dat zit. Zijn orthogonale projecties moeilijk te tekenen? Welke keuzemogelijkheden heb je? Zijn er 'standaardprojecties' waar je gemakkelijk mee uit de voeten kunt? We zullen laten zien dat dit inderdaad het geval is. Zelfs 'uit de losse hand' kun je op zo'n manier gemakkelijk kubussen, blokken, prisma's en piramides schetsen. Daarbij zullen we ons op de kubus concentreren; kun je een kubus tekenen, dan heb je ook een orthogonaal assenstelsel te pakken. Daarmee zijn dan vrijwel alle andere figuren ook gemakkelijk te construeren omdat evenwijdigheid van lijnen bij parallelprojecties behouden blijft. De vraag is dus: hoe teken je een kubus in een orthogonale parallelprojectie?

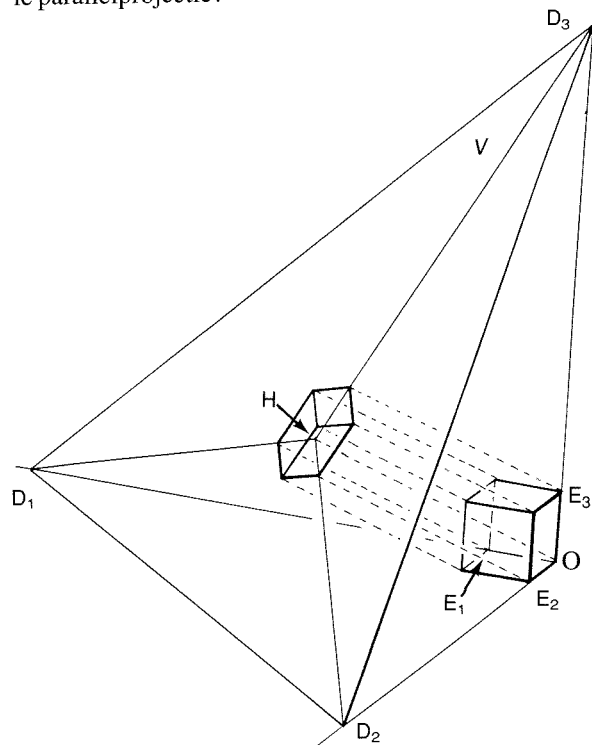


Fig. 9: De wijze waarop een orthogonale projectie van een kubus tot stand komt

Om die vraag te beantwoorden, denken we ons een draadmodel in van een kubus. Dat model staat ergens, bijvoorbeeld op een tafel, en we bekijken die kubus van een afstand. Niet recht van voren, want dan zien we alleen maar één zijvlak, maar een beetje schuin van boven, alsof je op een stoel aan tafel zit. We stellen ons vervolgens een (doorzichtig) projectievlak V voor dat loodrecht op de blikrichting tussen ons en de kubus is geplaatst en we projecteren de kubus via een loodrechte parallelprojectie op V . Het projectievlak staat dus schuin, want de projectierichting is schuin ten opzichte van de tafel en de kubus. Figuur 9 illustreert de situatie. We zien het vlak V in de tekening doordat we er een *doorgangsdriehoek* $D_1D_2D_3$ in hebben aangegeven. Die *doorgangsdriehoek* is op de volgende wijze tot stand gekomen. Laat O het hoekpunt van de kubus zijn dat het verst van het projectievlak



Fig. 8: Een deel van een pagina uit de IKEA-catalogus

afligt, en laten OE_1, OE_2, OE_3 de ribben zijn die bij O samenkomen. We nemen verder aan dat die drie ribben een assenstelsel opspannen met de genoemde ribben als eenheidslijnstukken. De drie assen zullen het projectievlak V snijden in drie punten D_1, D_2 en D_3 , die tezamen de doorgangsdriehoek vormen. De projectie van O op V noemen we H , en niet zonder reden, want zoals we later zullen zien is H het *hoogtepunt* van driehoek D_1, D_2, D_3 . Eerst merken we echter op dat de lijnen HD_1, HD_2 en HD_3 in het projectievlak de beelden zijn van de coördinaatassen. Ze vormen de *stompe* hoeken $\Phi_1 = \angle D_2HD_3$, $\Phi_2 = \angle D_3HD_1$ en $\Phi_3 = \angle D_1HD_2$.

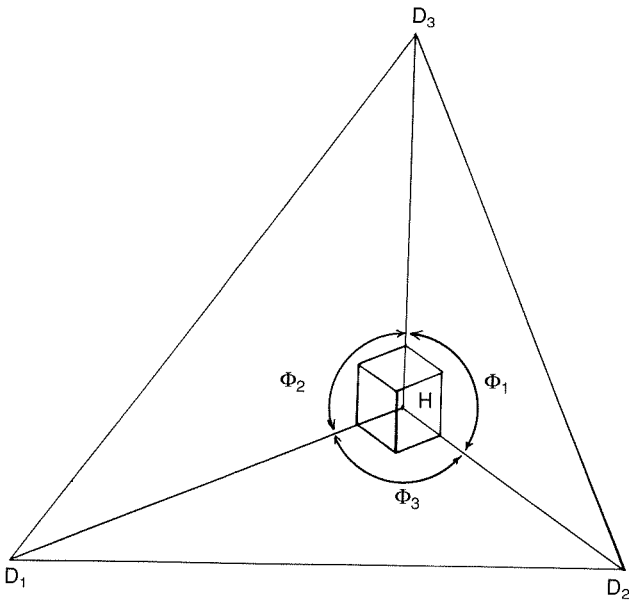


Fig. 10: De projectie in vlak V op ware grootte

In figuur 10 zien we de geprojecteerde kubus op ware grootte. Ook de coördinaatassen en de doorgangsdriehoek zijn getekend; in het algemeen zal men die natuurlijk weglaten.

Vervolgens introduceren we de hoeken $\alpha_i = \angle HOD_i$ die de coördinaatassen maken met OH (zie figuur 11). De *verkortingsverhoudingen* zijn dan $v_i = \sin \alpha_i = HD_i / OD_i$. Zo'n verhouding v_i is tevens de lengte van de projectie op V van het eenheidslijnstuk OE_i . Op de geprojecteerde coördinaatassen zijn die lengten dan de maateenheden van de schaalverdeling.

Uit de driedimensionale Pythagoras volgt nu onmiddellijk een relatie waaraan die verkortingsverhoudingen moeten voldoen, namelijk:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 2. \quad (1)$$

Voor een bewijs daarvan projecteren we H op de drie coördinaatassen (figuur 12). Daartoe construeren we een rechthoekig blok met O en H als diametrale hoekpunten. Figuur 12 illustreert de situatie; let op: in het algemeen is

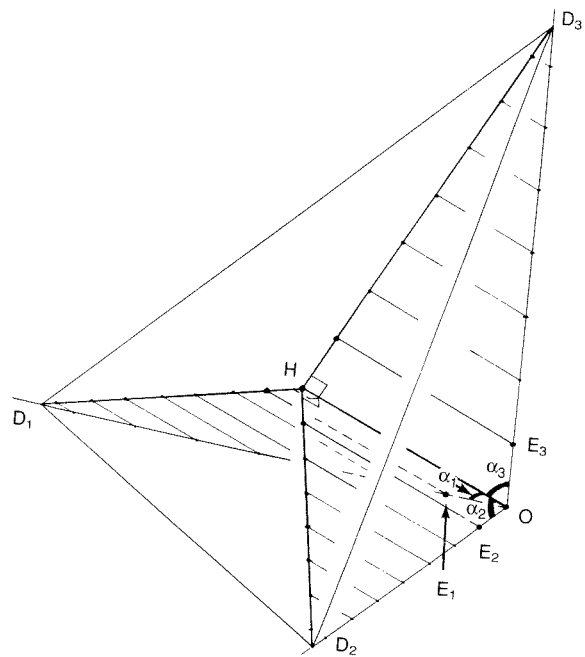


Fig. 11: De hoeken α_i en de geprojecteerde schaalverdelingen op de assen

dit blok *geen* kubus! Als we die projecties van H nu H_i noemen, dan geldt dat:

$$OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2 = OH^2.$$

Omdat $\cos \alpha_i = OH_i / OH$, betekent dit:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

en wegens $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ volgt daaruit direct vergelijking 1.

Er is natuurlijk een verband tussen de verkortingsverhoudingen v_i en de hoeken ϕ_i , namelijk enerzijds:

$$\begin{aligned} \cos \phi_i &= -\cot \alpha_j \cdot \cot \alpha_k \\ &= -\frac{\sqrt{1-v_j^2} \sqrt{1-v_k^2}}{v_j v_k} \end{aligned} \quad (2)$$

en anderzijds:

$$v_i = \sqrt{\frac{-\cos \phi_i}{\sin \phi_j \sin \phi_k}}. \quad (3)$$

(Hierbij is (i, j, k) een willekeurige permutatie van $(1, 2, 3)$.)

Het bewijs van vergelijking 2 gaat met de cosinusregel en Pythagoras:

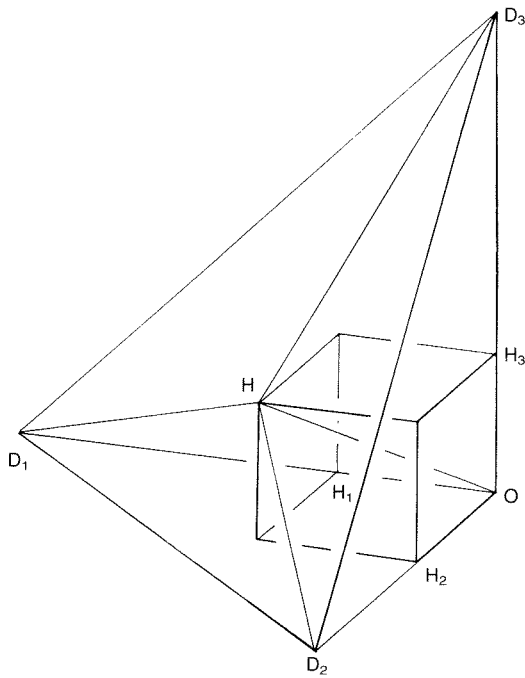


Fig. 12: H geprojecteerd op de coördinaatassen.

$$\begin{aligned}
 -\cos \phi_1 &= \frac{D_2 D_3^2 - HD_2^2 - HD_3^2}{2 \cdot HD_2 \cdot HD_3} \\
 &= \frac{(OD_2^2 + OD_3^2) - (OD_2^2 - OH^2) - (OD_3^2 - OH^2)}{2 \cdot HD_2 \cdot HD_3} \\
 &= \frac{OH^2}{HD_2 \cdot HD_3} = \cot \alpha_2 \cdot \cot \alpha_3 \\
 &= \frac{\sqrt{1 - v_2^2} \sqrt{1 - v_3^2}}{v_2 v_3} .
 \end{aligned}$$

Vergelijking 3 volgt uit vergelijking 2:

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\cos \phi_3} &= -\frac{1 - v_3^2}{v_3^2} \\
 \text{dus:} \\
 v_3^2 &= \frac{\cos \phi_3}{\cos \phi_3 - \cos \phi_1 \cos \phi_2} \\
 &= \frac{\cos \phi_3}{\cos(2\pi - \phi_1 - \phi_2) - \cos \phi_1 \cos \phi_2} \\
 &= \frac{-\cos \phi_3}{\sin \phi_2 \sin \phi_1} .
 \end{aligned}$$

Deze formules leggen de orthogonale projecties vast. Je kunt òf de verkortingsverhoudingen v_i voorschrijven, òf de 'wijkhoeken' ϕ_i .

Als je de verkortingsverhoudingen voorschrijft, moet je ervoor zorgen dat ze tussen 0 en 1 liggen en dat ze voldoen aan vergelijking 1. De wijkhoeken kun je dan bepalen met behulp van vergelijking 2. Kies je daarentegen eerst de wijkhoeken door vanuit H drie halfrechten te trekken die elkaar onder stompe hoeken snijden, dan volgen de verkortingsverhoudingen uit vergelijking 3.

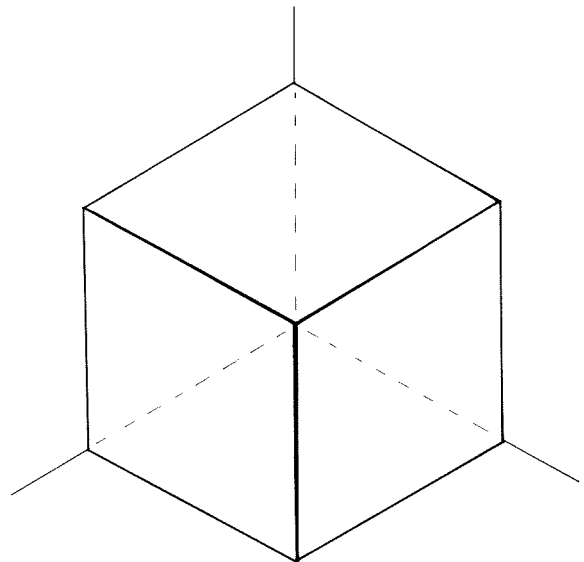


Fig. 13: Isometrische projectie van een kubus

Als voorbeeld nemen we eerst het geval van drie gelijke verkortingsverhoudingen. Dat levert de zogenaamde *isometrische* projectiemethode. Uit vergelijking 1 volgt dat elke v_i dan gelijk is aan $\sqrt{\frac{2}{3}}$, en vergelijking 2 geeft $\cos \phi_i = -\frac{1}{2}$, dus de beelden van de coördinaatassen snijden elkaar in H onder hoeken van 120° . De kubus van figuur 13 is getekend in zo'n isometrische projectie. Zo'n tekening is heel gemakkelijk te maken, maar een nadeel ervan is dat er twee hoekpunten samenvallen. Ook bij tekeningen van andere symmetrische voorwerpen zullen er vaak lijnen zijn die elkaar overlappen.

De ingenieursprojectie

Dat nadeel is minder groot bij *dimetrische* projecties, waarbij slechts twee van de drie verkortingsverhoudingen gelijk zijn. Een standaardvoorbeeld is de zogenaamde *ingenieursprojectie*, waarbij men $v_1 : v_2 : v_3 = 1 : 2 : 2$ neemt. Uit vergelijking 1 volgt dan dat $v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0,4714$ en $v_2 = v_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0,9428$.

Voor de hoeken vinden we $\cos \phi_1 = -\frac{1}{8}$ en $\cos \phi_2 = \cos \phi_3 = -\frac{1}{4}\sqrt{7}$, dat wil zeggen $\phi_1 \approx 97,18^\circ$ en $\phi_2 = \phi_3 \approx 131,41^\circ$.

In figuur 14 is een kubus getekend in de ingenieursprojectie. Verleng je drie ribben ervan tot een orthonormaal assenstelsel, dan maken die assen in de tekening met elkaar de hierboven uitgerekende hoeken. Deze tekenmethode blijkt in de praktijk uitstekend te voldoen. Je kunt uit de losse hand gemakkelijk assen tekenen die elkaar zo ongeveer onder deze hoeken snijden, en dan de schaalverdeling op de 'korte' as dubbel zo klein maken als op de twee 'lange' assen. Er zijn ook tekenmallen in de handel voor precisiewerk (zie figuur 15), compleet met ellipssjablonen voor de ingeschreven cirkels van de kubuszijvlakken. In die tekenmallen kiest men meestal een gewone (dus niet verkorte) centimeterverdeling op de 'lange' assen en een 'halve-centimeterverdeling' op de 'korte' as.

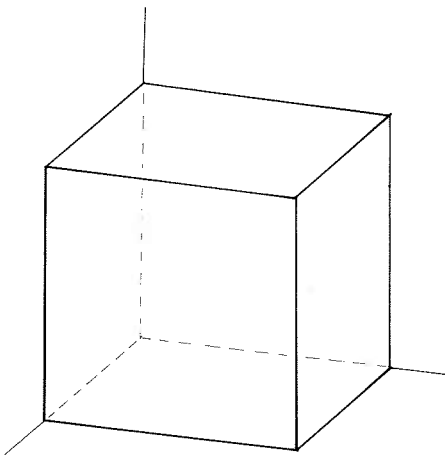


Fig. 14: Een kubus in de ingenieursprojectie

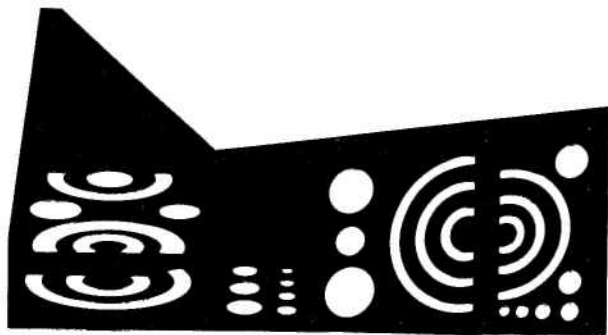


Fig. 15: Een tekenmal voor de ingenieursprojectie

Sinds enige jaren teken ik alle ruimtelijke figuren die ik nodig heb (bijvoorbeeld voor artikeltjes in Pythagoras) in de ingenieursprojectie en ik ben telkens weer erg tevreden over de 'realistische' indruk die ze maken. Ook de figuren 9, 11 en 12 zijn in de ingenieursprojectie getekend. Ik denk dat het toepassen van deze tekenmethode in het onderwijs de aantrekkelijkheid van het onderdeel

ruimtemeetkunde zeer zal vergroten en dat daarmee een belangrijke bijdrage geleverd kan worden aan de bevordering van het ruimtelijk inzicht en de tekenvaardigheid van de leerlingen.

Het hoogtepunt van de doorgangsdriehoek

Tenslotte nog een puntje dat was blijven liggen: het bewijs van het feit dat het punt H , de oorsprong van het geprojecteerde assenstelsel, bij iedere orthogonale parallelprojectie het *hoogtepunt* is van de doorgangsdriehoek $D_1 D_2 D_3$ (zie figuur 11).

Een bewijs daarvan is heel eenvoudig: OD_3 staat loodrecht op het vlak van driehoek $OD_1 D_2$, dus ook op $D_1 D_2$. OH staat loodrecht op het projectievlak, dus ook op $D_1 D_2$. De lijn $D_1 D_2$ staat dus loodrecht op het gehele vlak OHD_3 en dus ook op lijn $D_3 H$. Maar dat betekent dat $D_3 H$ een *hoogtelijn* is in driehoek $D_1 D_2 D_3$. Net zo bewijs je dat $D_1 H$ en $D_2 H$ hoogtelijnen zijn, hetgeen het bewijs voltooit.

Overigens, voor de dagelijkse tekenpraktijk is de doorgangsdriehoek niet zo belangrijk. Daar gaat het om de keuze van de wijkhoeken en de bepaling van de verkortingsverhoudingen. Zoals gezegd kun je uitstekend uit de voeten als je één tekenmethode als standaard kiest; daarvoor lijkt de ingenieursprojectie een hele goede kandidaat.

Literatuur

- [1] *De Verboden Stad*, tentoonstellingscatalogus Museum Boymans-van Beuningen, Rotterdam, 1990.
- [2] Vredeman de Vries, J.: *Perspective*, heruitgave Dover Publ., Inc., New York, 1968.
- [3] Kindt, M.: *Weten hoe je tekent*, Nieuwe Wiskrant jrg. 9, nr.1, december 1989, pp. 35-39.
- [4] Roodhardt, A.: *Perspectief in het Havo B programma*, Nieuwe Wiskrant jrg. 10, nr. 2, december 1990, pp. 5-9.



ICME-7 Congres

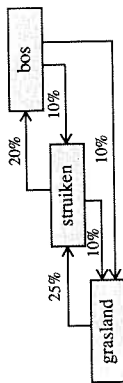
Van 17 tot en met 23 augustus a.s. wordt in Québec, Canada, het zevende ICME-congres gehouden. (ICME: International Congress on Mathematical Education.) Dit vierjaarlijkse congres is het grootste in zijn soort, er worden enkele duizenden deelnemers verwacht. Er zijn plenaire lezingen en verder vooral werkgroepen en themagroepen over allerlei onderwerpen. De inschrijving voor dit congres is inmiddels geopend.

De Second Announcement met het aanmeldingsformulier kan aangevraagd worden bij:
 Congrès ICME-7 Congress
 Université Laval
 Québec, QC
 Canada G1K 7P4
 Tel: (418) 656-7592
 Fax: (418) 656-2000.

Opgave 3: Verandering van vegetaties

In een natuurgebied komen meestal een aantal verschillende typen vegetaties voor, zoals grasland, bosgebied, watergebied. Deze typen vegetaties worden *ecotypen* genoemd. De natuur zelf zorgt voor een evenwichtige verdeling van de verschillende ecotypen. Als de mens zo'n evenwicht verstoort, bijvoorbeeld door het kappen van een stuk bos, dan zal de natuur zelf weer op zoek gaan naar een nieuw evenwicht. Daarbij kan het ene ecotype geleidelijk overgaan in een ander ecotype.

Aan de hand van een voorbeeldgebied, bestaande uit 3 ecotypen (grasland, struikengebied, bosgebied), bestuderen we het volgende overgangsschema:

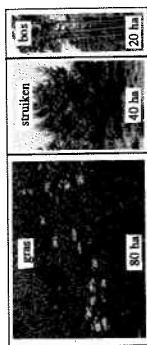


figuur 4

In dit schema valt onder andere af te lezen dat van de huidige oppervlakte aan grasland in een periode van één jaar 25% overgaat in struikengebied, terwijl in diezelfde periode van één jaar zowel van het struikengebied als van het bosgebied 10% overgaat in grasland.

Het voorbeeldgebied heeft een totale oppervlakte van 140 ha (=hectare). Op zeker moment is de verdeling van deze oppervlakte over de drie ecotypen als volgt:

figuur 5

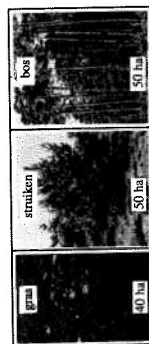


Eén jaar later is de oppervlakte aan grasland veranderd.

10 Bereken de nieuwe oppervlakte.

Met behulp van een computer zijn de veranderingen voor een aantal jaren doorgetekend. Op een gegeven moment geeft de computer de volgende oppervlakteverdeling:

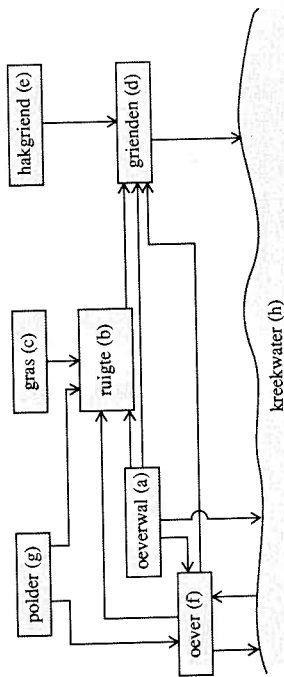
figuur 6



11 Toon aan dat de computer voor alle volgende jaren dezelfde oppervlakteverdeling van gras, struiken en bos vindt.

Het natuurgebied De Biesbosch staat onder invloed van de getijden. Door de afsluiting van het Haringvliet in 1970 werd die invloed veel kleiner. Na dit ingrijpen is de natuur in De Biesbosch op zoek naar een nieuw evenwicht. Deze beweging wordt geïllustreerd in het schema van figuur 7. In dit schema zie je dat er 8 ecotypen worden onderscheiden.

figuur 7



Aanvullende informatie bij dit schema wordt gegeven door de 8x8 matrix M (figuur 8). Uit de matrix M blijkt bijvoorbeeld dat per jaar 2% van het aantal hectare "Oeverwal" overgaat in "Oever". Elke stip in de matrix M stelt het getal 0 voor.

In de kolommatrix ernaast is af te lezen hoeveel hectare elk van de acht ecotypen besloeg in 1983.

figuur 8

naar	a	b	c	d	e	f	g	h
a Oeverwal	0,94	0,01	0,975	0,10	.	0,04	0,03	.
b Ruigte	0,01	0,025	.	0,99	0,20	0,02	.	.
c Gras	0,80	.	.	.
d Grienden	0,02	0,92	0,02	0,01
e Hakgriend	0,02	0,95	.
f Oever	0,99
g Polder
h Kreekwater	0,02

oppervlakte verdeling 1983	a	b	c	d	e	f	g	h
a	90							
b	760							
c	27							
d	820							
e	70							
f	114							
g	200							
h	985							

12 Bereken het aantal hectare Grienden in 1984.

13 Bereken hoeveel hectare Oeverwal er nog zal zijn in 1993.

Neem aan dat de overgangpercentages ook op de lange duur ongewijzigd blijven. In de toekomst zal er dan in De Biesbosch een nieuw evenwicht ontstaan. In die evenwichtstoestand zullen nog maar vier van de acht ecotypen voorkomen. Geef het overgangsschema (met de vier ecotypen en de overgangpercentages) bij de uiteindelijke evenwichtstoestand.

14