Het ecosysteem van de Biesbosch

Modelbouw en simulatie met Derive

P. Drijvers [1]
Freudenthal instituut, RU Utrecht

Inleiding

De aanleiding voor dit artikel vormt opgave 3 van het eindexamen wiskunde A havo 1991 (eerste tijdvak). Deze opgave (zie pag.12) gaat over de verandering in de vegetatie van de Biesbosch. Een matrixmodel wordt gegeven op grond waarvan voorspellingen gedaan kunnen worden over de verhouding tussen de diverse ecotypes in de toekomst.
De bron van deze opgave blijkt een artikel te zijn geweest in het tijdschrift *Planning* van H. Gordijn en F. Saris [2]. Na lezing vond ik dat het hier om een erg mooie en reële context gaat met vele openingen naar interessante aspecten van modelbouw.
Veel respect dus voor de examenopstellers die dit voorbeeld gevonden hebben! Jammer natuurlijk dat in de examenopgave de kansen voor een deel onbenut moeten blijven.

In elk geval prikkelden het artikel en de examenopgave mij om zelf met het model aan de slag te gaan, en dit artikel vormt een verslag van mijn 'spielerei'. Overigens hebben mijn collega Marcel Simons [3] en ik hierover een workshop gepresenteerd op de ICTMA-5 conferentie in Noordwijkerhout in september jl. met de titel 'Simulation using Derive: vegetations in the Biesbosch'.
Als hulpmiddel gebruik ik het computeralgebra systeem Derive [4]. Een andere keuze van software is natuurlijk ook mogelijk, al heeft Derive een aantal krachtige mogelijkheden die niet in elk pakket beschikbaar zijn.
Nog een opmerking: het verhaal zoals dat nu volgt, heeft niet de pretentie dat het in deze vorm voor leerlingen geschikt zou zijn, al denk ik dat met dit voorbeeld best een aardig Derive-leerlingenpracticum gemaakt kan worden.

Situatieschets en vraagstelling

Sinds de Sint Elizabethsvloed in 1421 was de Biesbosch een vrij ruig natuurgebied waar eb en vloed vrij spel hadden. Als in 1970, als onderdeel van de Deltawerken, het Haringvliet wordt afgesloten, valt het getijdeverschil terug van twee meter tot enkele decimeters. Dat leidt tot een verstoring van het ecologisch evenwicht dat tot dan toe bestaat. Verlanding vindt bijvoorbeeld sneller plaats en de grond rijpt in een hoger tempo. De verhouding in oppervlakte tussen de diverse soorten vegetatie is dus aan verandering onderhevig. Dit proces van een ecosysteem dat een nieuw evenwicht zoekt, is op dit moment nog in volle gang.
Door TNO is een matrixmodel gebouwd dat de overgangskansen tussen de diverse typen vegetatie weergeeft. Een drietal vragen is belangrijk.

- Welke evenwichtssituatie zal op de lange duur volgens dit model ontstaan?
- Kan men door het nemen van bepaalde beheersmaatregelen (het uitzetten van schapen, het kappen van bosjes, enzovoort) dit evenwicht beïnvloeden? Met name in het licht van de vraag of de Biesbosch een Nationaal Park moet worden, is deze vraag relevant.
- Hoe gevoelig is het model voor fouten? Hebben kleine fouten in schattingen van overgangskansen grote gevolgen?

Rekenen aan het model

In de examenopgave is sprake van acht ecotypen. De mogelijke overgangen zijn in figuur 1 weergegeven.

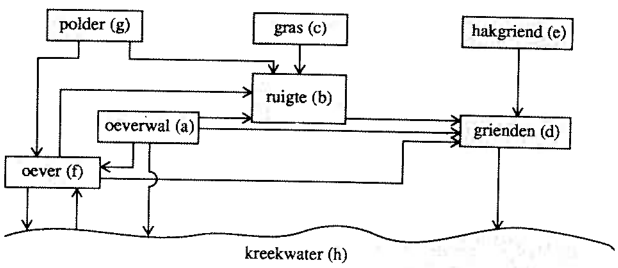

Fig. 1 : uit de examenopgave

Bij TNO wordt het type ruigte nog verder onderverdeeld, maar dat laten we nu buiten beschouwing. Op grond van luchtfoto's is gedurende twee jaren van elk ecotype de oppervlakte in de Biesbosch geschat. Deze waarnemingen, in samenhang met biologische overwegingen, hebben geleid tot schattingen van de overgangskansen zoals weergegeven in de volgende matrix.

VAN / NAAR	a	b	c	d	e	f	g	h
a Oeverwal	0.94							
b Ruigte	0.01	0.975	0.10			0.04	0.03	
c Gras			0.90					
d Grienden	0.01	0.025		0.99	0.20	0.02		
e Hakgriend					0.80			
f Oever	0.02					0.92	0.02	0.01
g Polder							0.95	
h Kreekwater	0.02			0.01		0.02		0.99

Element (2,3) van de matrix moet dus gelezen worden als: jaarlijks verandert 10% van de oppervlakte van gras in ruigte.
In 1983 is de totale oppervlakte van 3066 hectare als volgt over de ecotypes verdeeld:
[a, b, c, d, e, f, g, h] = [90, 760, 27, 820, 70, 114, 200, 985].

We gaan eerst maar wat rekenen. Als we de matrix M noemen en de aanvangsvector W, dan geldt dat de oppervlakten na twintig jaar volgens dit model gegeven worden door $M^{20}.W$, als W tenminste als kolomvector beschouwd wordt. In figuur 2 ziet u wat resultaten. Merk daarbij op dat Derive kolomvectoren om lay-out redenen als rijvectoren weergeeft.

```
1:  w := [90, 760, 27, 820, 70, 114, 200, 985]

     20
2:  m    · w

3:  [26.11, 635.51, 3.28, 1112.46, 0.81, 157.45, 71.7, 1058.68]

     40
4:  m    · w

5:  [7.57, 507.16, 0.4, 1229.59, 0.01, 153.03, 25.7, 1142.53]

     60
6:  m    · w

7:  [2.2, 411.14, 0.05, 1270.06, 0, 153.28, 9.22, 1220.06]
```

Fig. 2: berekeningen met het eerste model met Derive

De conclusie is duidelijk. Volgens dit model zullen de ecotypes a, c, e en g verdwijnen. Dat was natuurlijk aan figuur 1 ook al te zien: dat zijn immers de rechthoeken van waaruit alleen pijlen vertrekken zonder dat er pijlen aankomen. Een meerwaarde van het rekenwerk is dat het een indruk geeft van de snelheid waarmee de uitsterving plaatsvindt.

Beheersmaatregelen

De mens heeft soms behoefte om in te grijpen. In dit geval zou men de tot verdwijnen gedoemde ecotypes door beheersmaatregelen in bescherming kunnen nemen. Veronderstel bijvoorbeeld dat door het gras te maaien en door er vee op te laten grazen de overgang naar ruigte verhinderd wordt. En neem eens aan dat het kappen van hakgriend de overgang tot grienden beperkt tot 10%. Een derde maatregel zou kunnen bestaan uit baggeren, waardoor oeverwal niet kan veranderen in ruigte of grienden. De vraag is in hoeverre deze maatregelen in effecten sorteren. Er zijn immers ook kosten aan verbonden. In de volgende matrix zijn deze beheersmaatregelen verwerkt.

VAN / NAAR	a	b	c	d	e	f	g	h
a Oeverwal	0.96							
b Ruigte		0.975				0.04	0.03	
c Gras			1.00					
d Grienden		0.025		0.99	0.10	0.02		
e Hakgriend					0.90			
f Oever	0.02					0.92	0.02	0.01
g Polder							0.95	
h Kreekwater	0.02			0.01		0.02		0.99

De uitkomst van het rekenen met deze matrix is te zien in figuur 3.

```
1:  w := [90, 760, 27, 820, 70, 114, 200, 985]

     20
2:  m    · w

3:  [39.78, 610.82, 27, 1089.75, 0.51, 159.7, 71.7, 1058.73]

     40
4:  m    · w

5:  [17.58, 489.61, 27, 1205.3, 1.03, 155.94, 25.7, 1143.82]

     60
6:  m    · w

7:  [7.77, 481.25, 27, 1244.95, 0.13, 155.37, 9.21, 1228.32]
```

Fig. 3: uitvoer van Derive bij het doorrekenen van de maatregelen

Natuurlijk zal het grasland in oppervlakte gelijk blijven door deze beschermende maatregelen. Voor oeverwal, hakgriend en polder blijft de oppervlakte afnemen, zij het in een lager tempo. Dat moet ook wel, want zolang er in figuur 1 bij een ecotype geen inkomende pijl is, zal de oppervlakte niet toe kunnen nemen. De conclusie is dat de beschermende maatregelen nooit overbodig zullen worden. Bezint eer ge begint dus.

Gevoeligheidsanalyse

De exercities met dit model zijn pas zinvol als aan twee voorwaarden voldaan is. Ten eerste moeten de overgangskansen constant zijn door de jaren heen. Ten tweede moeten die constanten goed geschat zijn.
Op de tweede voorwaarde wil ik even ingaan. Een vraag is hoe erg de onvermijdelijke fouten zijn, die gemaakt zijn bij het schatten van de kansen. Is het zo dat kleine fouten leiden tot hele andere uitkomsten, of is het model niet zo gevoelig voor afwijkingen?
Om hierop een antwoord te krijgen gaan we in de matrix wijzigingen invoeren. Vervolgens wordt dan gekeken of dit gevolgen heeft voor de 'steady state', de evenwichtstoestand van het ecosysteem.

De conclusie van dit rekenwerk is dat het gedrag van het systeem globaal gesproken ongevoelig is voor kleine wijzigingen van de elementen van de matrix die niet gelijk aan 0 zijn. Natuurlijk wordt dit anders als we aan de nullen in de matrix gaan sleutelen. Daarmee veranderen we in feite figuur 1. Nieuwe overgangen worden gecreëerd en dat kan verstrekkende gevolgen hebben. Gelukkig zijn de nullen in de matrix (naar ik aanneem) op biologische gronden goed te verdedigen, dus de uitslag van deze beperkte gevoeligheidsanalyse is vooralsnog positief in die zin dat kleine afwijkingen niet van doorslaggevende invloed zijn.

Verder met een deelmatrix

Als het model redelijk stabiel lijkt te zijn, en als de nullen in de matrix echt nul zijn, dan is duidelijk dat er uiteindelijk vier ecotypes over zullen blijven: ruigte, grienden, oever en kreekwater. Het is misschien een goed idee om verder alleen deze vegetaties in beschouwing te nemen. In feite komt dit neer op het schrappen van die rijen en kolommen van de oorspronkelijke matrix die horen bij de ecotypes die zullen verdwijnen. Dit leidt tot de volgende deelmatrix.

VAN NAAR	Ruigte	Grienden	Oever	Kreekwater
b Ruigte	0.975	0.00	0.04	0.00
d Grienden	0.025	0.99	0.02	0.00
e Oever	0.00	0.00	0.94	0.01
g Kreekwater	0.00	0.01	0.00	0.99

Ook hiermee kunnen we gaan rekenen, maar als we als startvector de overeenkomstige deelvector nemen van de oorspronkelijke beginvector, dan zijn we een stukje Biesbosch kwijtgeraakt.
Gelukkig is er nog een andere methode. Laten we deze matrix N noemen. Voor de uiteindelijke evenwichtssituatie geldt dat alleen nog de vier genoemde ecotypes over zijn. De vector met dimensie 4×1 die de oppervlakten in de evenwichtssituatie van deze vier weergeeft, noemen we V. Omdat er in de 'steady state' niets meer verandert,

1: CHARPOLY (n)

2: $$\frac{2000000\,x^4 - 7790000\,x^3 + 11376600\,x^2 - 7383127\,x + 1796527}{2000000}$$

3: $$\frac{2000000\cdot 1^4 - 7790000\cdot 1^3 + 11376600\cdot 1^2 - 7383127\cdot 1 + 1796527}{2000000}$$

4: 0

5: EXACT_EIGENVECTOR (n, 1)

6: $$\left[x1 = @1 \quad x2 = \frac{15\,@1}{4} \quad x3 = \frac{5\,@1}{8} \quad x4 = \frac{15\,@1}{4}\right]$$

Fig. 4: uitvoer van Derive bij het bepalen van een eigenvector

moet gelden dat N.V = V. Dit betekent dat V een eigenvector is bij de eigenwaarde 1 van matrix N. In figuur 4 ziet u hoe Derive in dit geval te hulp schiet. De berekeningen die zijn afgebeeld, zijn geen numerieke benaderingen maar exacte uitkomsten!

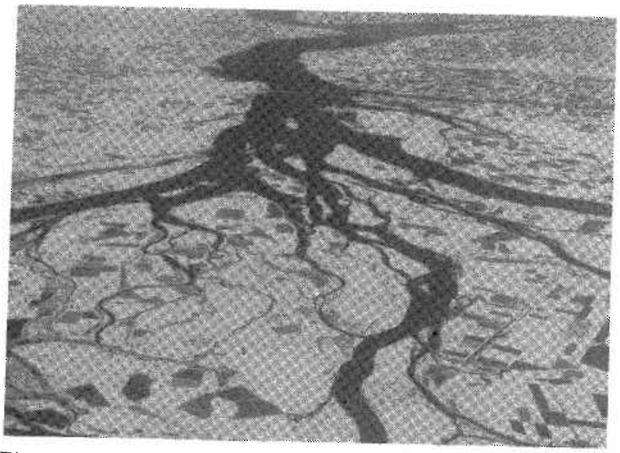

Fig. 5: luchtfoto van de Biesbosch

In regel 2 wordt de karakteristieke veelterm van de matrix berekend. De nulpunten daarvan zijn de eigenwaarden van N. Als we x=1 substitueren blijkt in regel 4 dat er inderdaad de waarde 0 uitkomt. (Van de andere eigenwaarden blijken er twee complex te zijn.) Het commando in regel 5 vraagt om een eigenvector van N bij de eigenwaarde 1. Het antwoord in regel 6 vereist wat toelichting. Met @1 wordt een vrij te kiezen variabele bedoeld. Immers, een eigenvector die met een scalair vermenigvuldigd wordt, blijft een eigenvector. De elementen van de evenwichtsvector blijken zich dus te verhouden als $1 : \frac{15}{4} : \frac{5}{8} : \frac{15}{4}$ Dit, samen met het gegeven dat de totale oppervlakte 3066 hectare is, maakt het berekenen van de stabiele vector niet moeilijk. De uitkomst is:

[b, d, f, h] = [336, 1260, 210, 1260].

Als we dit vergelijken met de uitkomsten van figuur 2, dan blijkt dat de convergentie vrij traag tot stand komt: na 60 jaar is de oppervlakte van bijvoorbeeld Oever volgens dit model nog slechts iets meer dan $\frac{2}{3}$van de uiteindelijke evenwichtswaarde.

Besluit

Ik zei het al in het begin: in feite leest u een verslag van mijn spelen met een matrixmodel en met Derive. Persoonlijk denk ik wel dat dergelijke activiteiten leerzaam zijn. Ik heb het gevoel bezig te zijn geweest met wiskunde en ook met modelbouw en simulatie.
De rol van een computeralgebra systeem als Derive is daarbij erg nuttig, maar niet alleen vanwege het uitbesteden van rekenwerk. Derive stelt de gebruiker in staat om snel verschillende zaken uit te rekenen en stimuleert daarmee een onderzoekende en experimentele houding.

Daarnaast is het zo dat de antwoorden van het pakket je op ideeën kunnen brengen, omdat deze antwoorden verrassend zijn of juist achteraf heel voorspelbaar. In feite maakt Derive verificatie van vermoedens mogelijk. Het gevoel dat overblijft is toch zoiets als: de samenwerking, de wisselwerking tussen de gebruiker en het systeem levert een meerwaarde op, die onderzoek op eigen niveau meer haalbaar, interessanter, leerzamer en meer diepgaand kan maken.

Noten

[1] Ik houd mij bezig met het ontwikkelen van leerlingenpractica met het programma Derive. Dit jaar zal dit materiaal op een twaalftal scholen uitgeprobeerd worden. Daarnaast ben ik betrokken bij experimenten met de graphic calculator.

[2] Gordijn H. en F. Saris: *Een simulatiemethodiek voor ecologische systemen; toepassing voor De Biesbosch.* Verschenen in 'Planning' nummer 27 (1986). 'Planning' is een uitgave van het planologisch studiecentrum van TNO.

[3] Mijn dank aan Marcel Simons voor het kritisch doorlezen van een eerdere versie van dit artikel.

[4] Over computeralgebra in het algemeen en over Derive in het bijzonder heb ik een artikel geschreven dat verschenen is in de Nieuwe Wiskrant jrg. 10 nr. 4 (juli 1991) onder de titel *Computeralgebra en wiskundeonderwijs.*

---

hogeschool holland

Brochures Keuzebegeleiding Wiskunde A en B

Evenals vorig jaar worden de twee brochures *Keuzebegeleiding Wiskunde A en B* op het havo weer aan leerlingen, docenten, decanen en schoolleiders aangeboden. De inhoud van de brochure is onveranderd gebleven ten opzichte van vorig jaar.

Brochure voor leerlingen
In de leerlingbrochure wordt een korte omschrijving gegeven van de inhoud van beide wiskundevakken. Daarnaast wordt aangegeven voor welke vervolgopleidingen wiskunde A en voor welke wiskunde B het meest geschikt is.
In de brochure zijn voor beide vakken enkele voorbeeldopdrachten opgenomen, zodat de brochure met derde klassen is door te nemen.

Brochure voor docenten
In deze brochure wordt allereerst een omschrijving van de inhoud van beide vakken gegeven. Vervolgens gaat men in op de eisen/wensen die vervolgopleidingen stellen ten aanzien van wiskunde A en wiskunde B. Er wordt aandacht besteed aan de gevolgen van twee wiskundevakken voor de organisatie van de school. Er worden wat mogelijkheden besproken om leerlingen te begeleiden bij hun keuze voor wiskunde. Verder wordt er kort ingegaan op de betekenis van beide vakken voor mavo-leerlingen en het verschil tussen jongens en meisjes en wiskunde B voor het havo opgenomen en de eindexamenopgaven van mei 1990.

De brochures zijn schriftelijk te bestellen bij:
Hogeschool Holland, sector HBO-β, Wildenborch 6, 1112 XB Diemen.
Onder vermelding van:
Naam, adres en telefoonnummer van de school, contactpersoon, aantal leerlingenbrochures (*f* 1,– per stuk), aantal docentenbrochures (*f* 2,– per stuk), exclusief verzendkosten.

Inlichtingen zijn te verkrijgen bij:
Inge Ottens, sector HBO-β, Hogeschool Holland,
tel. 020-5601326.