

A is het aapje dat eet uit zijn poot

A. Roodhardt

CSG Oostergo, Dokkum

Vooraf

De redactie heeft me gevraagd om een mening over ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Het voldoen aan zo'n verzoek brengt risico's met zich mee. Een mening is niet hetzelfde als een goed onderbouwd betoog. Er wordt weleens volstaan met korte aanduidingen, waardoor de lezer de kans loopt tot een, niet door mij bedoelde, interpretatie te komen. Bovendien is het voor mijzelf soms moeilijk vast te stellen of een bepaald gevoel al de status van een mening heeft bereikt. Maar ondanks deze bezwaren wil ik toch wel een paar zaken kwijt.

Vernieuwingen

Bij de vernieuwingen in de schoolwiskunde spelen contexten, situaties of hoe je ze maar noemen wilt, een opvallende rol. Ze kunnen dienen voor een gemakkelijke introductie van wiskundeonderwerpen en tot verlevendiging van de leerstof. En afhankelijk van de context waarin iemand zelf staat, zijn ze onontbeerlijk voor de sociale of wetenschappelijke zingeving van de wiskunde.

Er zijn echter docenten die hierop reageren met: 'Ja, dat klinkt nou allemaal wel mooi, maar ...' En op de stippeltjes staat dan iets waaruit blijkt dat dat contextgedoe tot mislukken gedoemd is. Zoals bijvoorbeeld:

- De leerlingen raken erop uitgekeken.
- De leerlingen willen of kunnen niet zoveel lezen.
- De pientere leerlingen worden niet voldoende uitgedaagd.
- De leerlingen hebben geen zin zich telkens weer in een nieuwe situatie in te leven. Elke opgave is weer anders, daardoor kan de leerling nooit eens lekker werken aan een serie gelijksoortige sommen,
 - en daardoor ontstaat er geen vertrouwen in eigen kunnen,
 - en aan het eind van een hoofdstuk weet de leerling nog steeds niet wat hij weten moet.

Een discussie hierover is moeilijk. Neem bijvoorbeeld het laatste punt. Aan de ene kant: iets doen wat je goed kunt is plezierig. En hoe vaak spelen grote pianisten het-

zelfde stuk? Aan de andere kant: didactiek als onderdeel van de robotica? (Ze zien je daar aankomen.) Een reactie op zulke opmerkingen lijkt mij pas zinnig als in alle eerlijkheid deze vraag beantwoord is: Waarom leer je de leerlingen eigenlijk wiskunde? En dan ontkom je ook niet aan de vraag wat wiskunde eigenlijk is.

Na zo de kool en de geit gespaard te hebben, komen we op veel ernstiger tegenwerpingen, variërend van 'er is meer in de wiskunde dan we in de contexten zien' tot het dodelijke 'dit is helemaal geen wiskunde'. Deze beweringen steunen waarschijnlijk op antwoorden op de vragen van zoëven.

Ik denk dat we nog niet onder de dictatuur van de contexten leven. Maar ze overstralen de meer formele zaken uit de wiskunde, waar toch ook wel aan gewerkt wordt in de 12-16 wiskunde. Daarom vind ik het de moeite waard aandacht te besteden aan de gevaarlijke kanten van de 'contextwiskunde'.

Om het niet alleen bij theoretiseren te laten, eerst twee 'praktische' tussenparagrafen:

- Een demarcatieprobleem.
- Redeneren of wat daarvoor doorgaat.

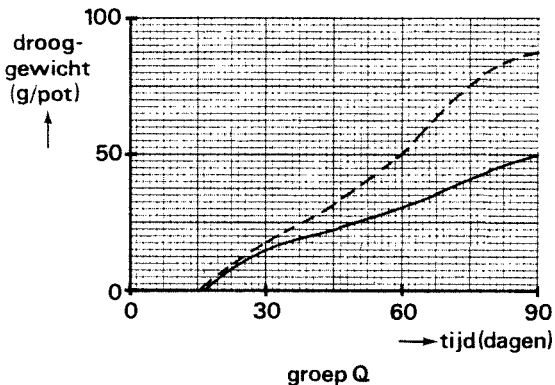
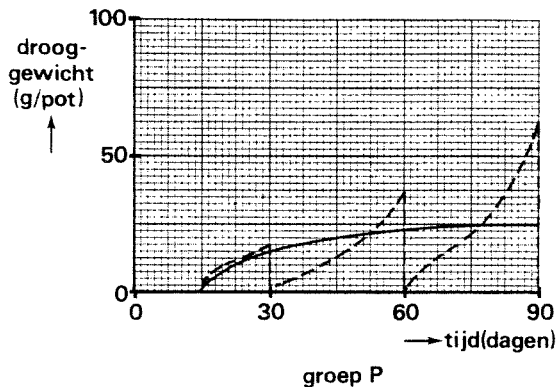
Een demarcatieprobleem

Om te beginnen een context-opgave over het lezen van grafieken.

Engels raai gras

In een experiment werd een grassoort (Engels raai gras) gekweekt in een groot aantal potten. Elke pot bevatte evenveel planten en de kweekomstandigheden waren gelijk. De potten werden verdeeld in twee groepen P en Q. De planten in de potten van groep P werden om de dertig dagen kortgeknipt. De planten van groep Q bleven onbehandeld. Gedurende het experiment werd op bepaalde tijdstippen het drooggewicht bepaald van de bovengrondse delen en van de wortels van de planten uit één pot van groep P en uit één pot van groep Q.

Het drooggewicht is het gewicht nadat het water uit de plantedelen is verwijderd. De resultaten van deze bepalingen zijn weergegeven in diagrammen.



— = droge stof wortel
 - - - = droge stof bovengrondse delen

Op grond van deze diagrammen worden drie beweringen gedaan.

1. De hoeveelheid droge stof in de wortels wordt door het knippen vergroot.
 2. De totale hoeveelheid droge stof die gedurende de hele proef in de bovengrondse delen wordt gevormd, wordt door het knippen vergroot.
 3. De groei van het wortelstelsel wordt door het knippen geremd.
- >> Welke van deze beweringen is of welke zijn juist?
- a alleen bewering 3
 - b alleen de beweringen 1 en 2
 - c alleen de beweringen 2 en 3
 - d de beweringen 1, 2 en 3.

Een toetsingsweg door de stof die alleen langs vier-sprongen loopt, spreekt me niet aan. Maar dat doet niets af aan de kwaliteit van het gestelde probleem. In de moderne wiskundeprogramma's is hiervoor gemakkelijk een plaatsje te vinden. Het vervelende is echter dat dit vraagstuk afkomstig is uit het vwo biologie-examen 1990. En zo komen we voor het demarcatieprobleem te staan: wat valt onder biologie en wat valt onder wiskunde?

Misschien is het verstandiger de wiskunde-uren bij de andere vakken onder te brengen. De contexten voor de wiskunde te beperken tot die kennisgebieden die nog niet de status van schoolvakken hebben, lijkt me geen

prijzenswaardige oplossing. Of kan wiskunde iets bieden wat andere vakken niet hebben?

Redeneren of wat daarvoor doorgaat

Antropoloog tot eenvoudige boerenvrouw in Centraal Azië: (dit wordt geen grapje)

In het hoge noorden zijn alle beren wit.
 Nova Zembla ligt in het hoge noorden.
 Welke kleur hebben de beren daar?

De vrouw:

Dat weet ik niet.

U moet dat vragen aan mensen die daar geweest zijn en ze gezien hebben.

Het antwoord van de vrouw is onlogisch, maar is het ook onredelijk? Een andere antropoloog vindt dat de vrouw wel degelijk goed kan redeneren. Ze is alleen van andere premissen uitgegaan. Bijvoorbeeld dat je iets gezien moet hebben om de kleur ervan te weten en dat je daarvoor op zijn minst in de buurt moet zijn geweest.

Er zijn meer onderzoekers van 'primitieve' volken tot de conclusie gekomen dat ongeschoolde proefpersonen vaak de premissen 'vervalsen' en vervolgens correct redeneren. Als je zoiets leest, besef je nog eens welke grote stap onze leerlingen moeten zetten om *los van de feiten* te kunnen redeneren. Het is zo verleidelijk om terug te vallen op waarnemingen in de door de context opgeroepen werkelijkheid. En toch is enige vaardigheid in het abstract denken nodig. Die verleiding wordt nog vergroot door het feit dat je met een zuiver deductieve redeneerwijze in een context niet altijd uit de voeten kunt. Er is dan een 'zwakkere' redeneerwijze nodig waarin het proces van bewijzen is vervangen door het proces van aannemelijk maken. En daarbij moet je dichterbij de feiten blijven. (Dat laatste proces komt in de schoolwiskunde jammer genoeg amper aan de orde.) Het is denkbaar dat contexten daardoor de ontwikkeling van het formele denken in de weg staan. Dat wil niet zeggen dat de oplossing in een contextloze wiskunde moet worden gezocht. Het is immers in de oude wiskunde niet ongevoel dat men zo snel mogelijk in het spoor van een standaardprocedure probeert te komen, die de rol van het denken verder wel overneemt.

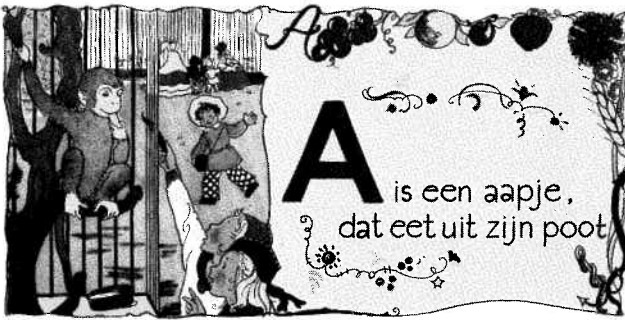
Samengevat:

- Contextwiskunde profileert zich onvoldoende tegenover andere vakken.
- Contexten kunnen bij oppervlakkige behandeling het denken versluieren.

We zijn nu al een heel eind in de richting van de twee ernstige tegenwerpingen uit het begin: 'er is meer in de wiskunde dan we in contexten zien' en 'dit is helemaal geen wiskunde'.

Waarschijnlijk zullen die protestanten ook bedoelen dat er te weinig aandacht is voor de abstracte kant van de wiskunde. Misschien is dat wel de kern van de zaak. Een context is aardig als je iets moet leren, maar als je die te

lang vasthoudt wordt de voortgang geblokkeerd. Om de A te leren is het etende aapje een heel geschikte context, maar als je bij elke A weer aan dat beest gaat denken!



Kortom: context kan ballast worden.
Een voorlopige conclusie luidt dan:

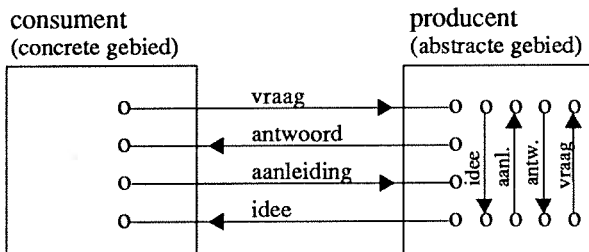
Men moet zich bezinnen op de eigen rol van de wiskunde en op de wijze waarop dat in de programma's zichtbaar gemaakt kan worden.

Gelukkig ben ik maar een klein deeltje van die 'men'. Daarom volsta ik met enkele schetsen.

Concreet versus abstract

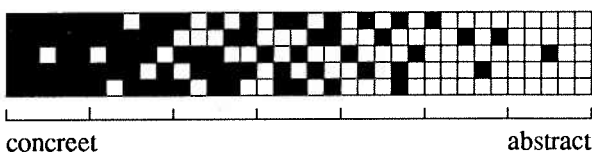
De eigen rol van de wiskunde zie ik in het formele of abstracte handelen. Daarbij hoeft de band met de werkelijkheid niet verloren te gaan.

Als we de producent voor het abstracte en de consument voor het concrete of toegepaste laten staan, dan kunnen we met dit primitieve plaatje iets van die koppeling aanduiden:

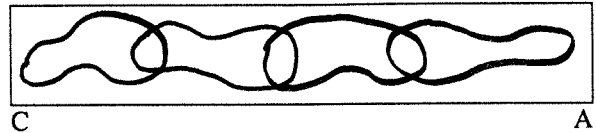


De abstracte wiskundige structuur moet op inzichtgevende manier de werkelijke verbanden proberen te vangen. In die structuur kunnen formele operaties worden uitgevoerd en de resultaten daarvan kunnen vaak weer gebruikt worden om de werkelijkheid verder te leren kennen. In wezen is dit de bekende modelvisie.

Dit plaatje kan misleidend zijn. De tweedeling concreet-abstract is in de praktijk niet zo scherp. Boeken en tijdschriften voor vakken waarin de wiskunde wordt toegepast, laten zien van welk hoog abstractieniveau de binnengehaalde wiskunde is. Het volgende geeft misschien een beter beeld (met een passende interpretatie van zwart en wit).



Ieder kan hierin zijn voorkeursgebied hebben.



Het succes van dat abstraheren, manipuleren en redeneren steunt ook nog op een soort basisprincipe van de wiskunde: Het principe van het mogelijk maken van kenniswinst. Daarbij denk ik niet alleen aan de toepassing van de door abstractie verworven kennis op andere gebieden. Maar ook (of eigenlijk nog meer) aan: een klein beetje kennis als startkapitaal gebruiken en daarmee meer kennis binnenhalen. Dat idee zit achter de axiomatische methode, maar dichterbij huis ook in het greep krijgen op structuren door bijvoorbeeld de herhaling te zien. En een heel bijzonder geval daarvan gebruiken we zowel bij meetkunde als bij algebra: symmetrie.

Enige consequenties

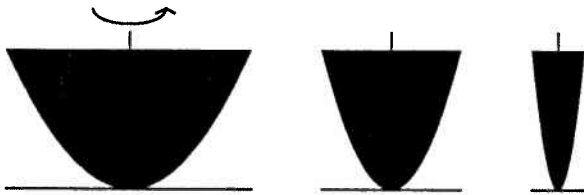
Is het voorgaande relevant voor de schoolpraktijk? Ik vind van wel. Als je ziet waarheen het vak kan voeren, dan is het verstandig de haren alvast een beetje in de goede richting te strijken. In het concreet-abstract plaatje zullen de verschillende schooltypen hun eigen stekje moeten vinden. De toekomstige havo B-er kan zich profileren door rechtse neigingen te demonstreren. Voor de uiteindelijke leerstofkeuze zou ik me dan, naast de gebruikswaarde van de stof, vooral laten leiden door de mogelijkheden die de stof biedt voor de realisatie van zulke mooie principes, als: zeker stellen van kennis, abstraheren en kenniswinst maken.

Laten we bijvoorbeeld eens kijken welke rol kenniswinst kan spelen. Bij symmetrie denk ik aan de modulusfunctie en de kwadratische functie. Die laatste functie dreigt uit de gratie te raken. Buiten haar schuld, want ze is in het verleden slachtoffer geworden van de nationale ondeugd van ons wiskundeonderwijs: het streven naar volledigheid en het radicaal uitbannen van het onverwachte. En dat terwijl er zoveel zinnige dingen mee te doen zijn op het gebied van kenniswinst. Heel elementair: elk nieuw punt van de grafiek levert als regel nog een nieuw punt op.

Wat verdergaand: je start met een parabool met een vergelijking van de vorm $y = a^2 + bx + c$. Je weet dan onmiddellijk dat het punt $(0, c)$ op de parabool ligt. Door algebraïsche herleidingen en omvormingen kunnen dan de vormen $y = a(x - p)(n - q)$ en $y = a(x - p)^2 + q$ ontstaan die telkens weer andere bijzonderheden van hetzelfde object aan het licht brengen. Je kunt soms dezelfde dingen doen als vroeger, maar met een andere bedoeling. Om bij dit voorbeeld te blijven: het is niet nodig van elke moeilijke tweedegraadsvorm een kwadraatsplitsing te kunnen maken. Maar het redeneren over zo'n vorm en wijzigingen ervan (...² vervangen door ...³) is wel belangrijk voor het vertrouwd raken met het abstracte karakter van de wiskunde.

Er zou ook meer plaats moeten zijn voor onderzoeksopgaven. Incidenteel alle mogelijkheden van een probleem uitzoeken, is heel leerzaam. En dan komt er vanzelf ruimte voor fantasie en creativiteit. Ik denk dat het wel of niet een dood vak worden voor een belangrijk deel afhankelijk is van de typen opgaven die de leerlingen voorgeschoteld krijgen. In het gunstige geval lukt het misschien ook de zin van het gebruik van algebra duidelijk te maken. Een substitutie kan een gedachteloze handeling zijn, maar ook een slimme zet.

Wiskunde is, behalve een collectie wetenswaardigheden, een 'zienswijze'. In zo'n geheel past een verstrengeling van de algebra en de meetkunde. Een voorbeeld:



na de behandeling van de bundel parabolen die gekenmerkt wordt door $y = ax^2$, kan een kartonnen parabool om een verticale as gedraaid worden. Dat roept de vraag op of de aanzichten parabolen of quasi-parabolen zijn.

Het zou het mooiste zijn, als het lukt de leerling enig gevoel voor de waarde van een bewijs bij te brengen. Bij veel leerlingen resulteert de vraag naar een bewijs nog al te vaak in het noemen van iets dat misschien bij de constructie van een bewijs gebruikt zou kunnen worden.

Ik heb weinig concrete leerstof genoemd. Voor mij is belangrijk wat ik met de stof kan doen. Ik wil nog zo graag wat spelen. En als de voorschriften niet al te stringent zijn, is dat niet zo onderwerp gebonden.

Het zal duidelijk zijn dat ik de meerwaarde van de wiskunde vooral zie in het formele of het abstracte.

Als legitiem doel op zichzelf voor de een, als hoogwaardig gereedschap voor de ander. Dat formele moet steunen op *begrip* en *technische beheersing*. Technische beheersing zonder begrip is zinloos. Begrip zonder technische beheersing maakt machteloos. En de contexten dan? Die wil ik bijzonder graag laten meedoen. Als ze hun plaats weten.

Hawex series compleet

Met de laatste experimentele examens wiskunde A en B voor de havo is het HAVO Wiskunde EXperiment in juni dit jaar afgerond. Eén van de tastbare resultaten die dit project heeft opgeleverd, zijn volledige leergangen wiskunde A en B. Voor elk vak zijn elf boekjes verschenen, die als eerste een compleet beeld geven van beide examenprogramma's.

Naast de reguliere boekjes voor de vierde en vijfde klas zijn ook verschenen: een boekje *Overzicht en Thema's wiskunde A*, waarin het hele programma puntsgewijs wordt opgesomd met bijbehorende oefenopgaven. In het themagedeelte worden de diverse onderdelen geïntegreerd aan de orde gesteld naar aanleiding van één context.

En hiernaast het *Brugboek Differentiëren*, onder andere voor leerlingen die van havo A overstappen naar vwo

met wiskunde A, maar wellicht ook bruikbaar om op het heetste moment de deficiënties van A-leerlingen weg te werken.

De boekjes wiskunde A beschrijven de drie leerstofgebieden 'Tabellen, Grafieken, Formules', 'Discrete Wiskunde' en 'Kansrekening en Statistiek', zoals ze in het examenprogramma zijn opgenomen. Bij wiskunde B zijn de boekjes onderverdeeld in de twee leerstofgebieden 'Toegepaste Analyse' en 'Ruimte meetkunde'.

Alle Hawex-boekjes zijn voor geïnteresseerden verkrijgbaar bij de vakgroep OW&OC en kosten f 6,- per stuk. Het brugboek met apart antwoordenboek kost f 10,-.

U kunt telefonisch een bestelling plaatsen of een bestelformulier aanvragen bij:

Vakgroep OW&OC (tel. 030 - 611611) tussen 9.00 en 14.00 uur.