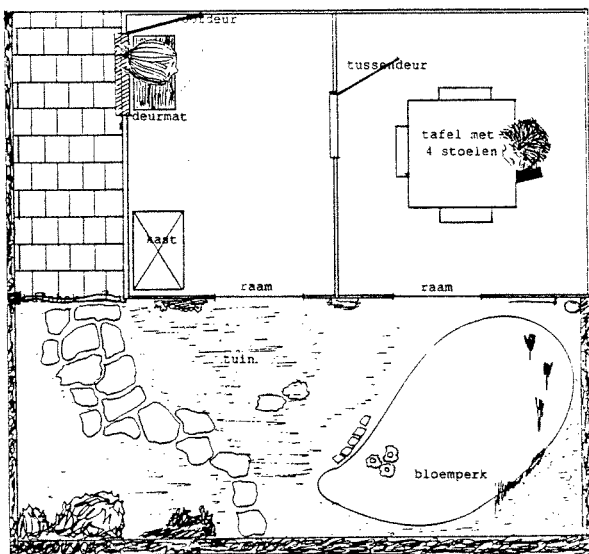


Je kunt niet met een boogje kijken

Over The Drongs in verband met de kijkmeetkunde

A. J. Goddijn
OW&OC, RU Utrecht

Tamelijk voorin in het nieuwe pakket *The Drongs* komt deze opgave voor:



Jij staat op de deurmat, je vriendin zit op de zwarte stoel. 'Kijk, een roodborstje in de tuin', zegt je vriendin. Je kijkt en je ziet het óók.

*>> Wáár in de tuin kan het roodborstje dan zitten?
Kleur dat stuk rood.*

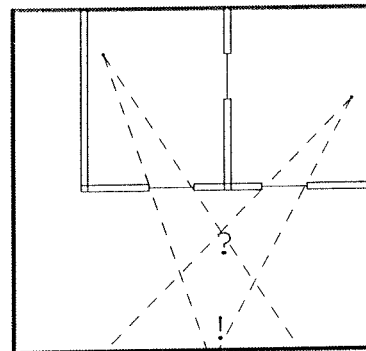
In de derde klas mavo waar we het pakket uitprobeerden, gaf de opgave weinig problemen. Het sluit naadloos aan bij wat in de tweede klas aan de orde geweest is in *Schaduw en Diepte*.

Toch was het boeiend om met wat leerlingen even over een paar punten door te praten. Er kwamen dingen boven, die goed duidelijk maakten wat er nu eigenlijk aan de hand is in die zogenaamde kijkmeetkunde.

Een groepje leerlingen is al klaar. Ze hebben een tekening gemaakt zoals hieronder.

'Weet je zeker dat je daar (bij '?' in de figuur) het roodborstje kunt zien?'

Twee ja's, en één nee. Het gaat me natuurlijk om de nee: 'Hoezo dan?'



'Nou dan zit ie onder het raam.'

Nu wordt de opgave plotseling heel complex. Er komt een dimensie bij, namelijk hoogte. Ik kon gelukkig niet vragen of het daar (bij '!') dan wel zichtbaar is, want een andere leerling zei al: 'Misschien is het wel zo'n raam tot op de grond.'

En: 'Op zo'n plattegrond kun je dat niet zien.'

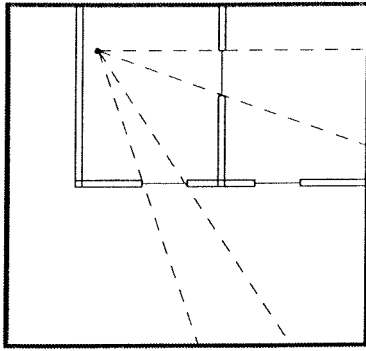
Wat je wel en niet kunt zien in bepaalde afbeeldingen, dat is juist een van de kernproblemen van de kijkmeetkunde. Bij plattegronden zijn we dat wel gewend, bij zij-aanzichten is het al wat lastiger. Ze komen verderop in *The Drongs* voor; uitvoerig. Zo dadelijk meer hierover. Het belangrijkste gereedschap bij verklarende tekeningen als die van zoëven is de rechte lijn. We vragen leerlingen, in een samenvattend gesprek, naar het waarom van dat 'rechte'. Het antwoord leverde de titel van dit artikel op.

In het voorbeeld met het roodborstje is het allemaal eenvoudig. De ogen staan op de tekening, je weet dus waar de rechte lijnen 'beginnen'. Ja, eigenlijk zijn het 'halve' lijnen in de ouderwetse zin.

We gebruiken de term *kijklijn* in dit soort gevallen. Straks komen moeilijker voorbeelden, waarbij er wel kijklijnen zijn, maar het oog niet te vinden is.

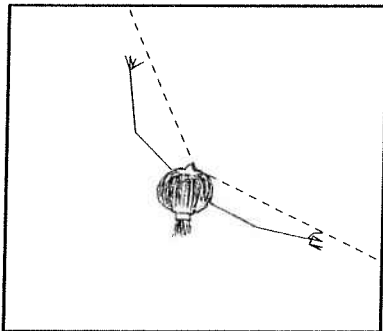
Ergens anders in de klas heeft een meisje niet echt goed gelezen. Ze kwam tot de tekening van figuur 3.

Ik vraag wat de bedoeling was. Daarop flitst een gebaar over haar boekje, van het vriendinnenoog naar beneden en er klinkt: 'En dan moet je dat kruisen.'



Het combineren van twee standpunten, en het redeneren met snijdende kijklijnen: ook een van de voortdurend terugkerende thema's in de kijkmeetkunde.

Eén oog met twee kijklijnen zien we ontstaan bij een van de eerste opgaven van de pakketjes waar het *blikveld* wordt gemeten.



De twee kijklijnen worden op de tast gevonden. Als je je linkeroog dicht doet en je twee armen vanuit middenvoor wegdraait tot je ze juist niet meer ziet, ontstaat ongeveer die stand.

Het gebied tussen de lijnen is het blikveld. Bij de opdracht dit te kleuren is niet duidelijk hoever je moet kleuren. Sommige leerlingen tekenen zelf een grens, de meesten niet. Vraag 9 op bladzijde 1:

>> *Waarom is het beter het blikveld met graden aan te geven dan bijvoorbeeld met oppervlakte?*

'Het gaat om de wijde', 'Het kan heel ver zijn'. Dat soort opmerkingen wijzen erop dat het om hoeken gaat. Hoeken worden in *The Drongs* uitvoerig gebruikt. Hoeken van kijklijnen, kijkhoeken, hoeken waaronder je iets ziet.

Merkwaardig is dat er in déze mavo-3 klas heel wat problemen zijn met het technische meten van hoeken, maar dat dit toch niet erg storend is bij het ontwikkelen en gebruiken van het begrip kijkhoek. Straks meer over hoeken.

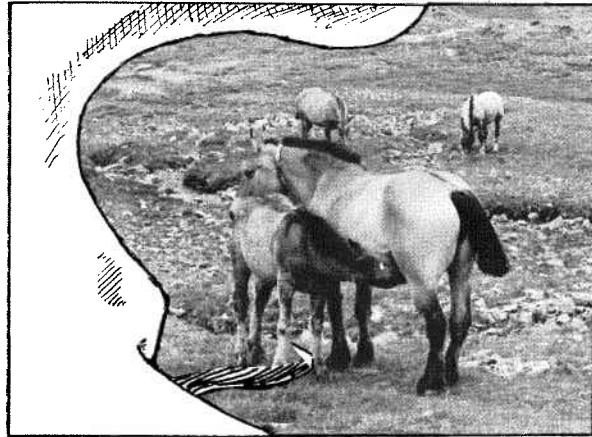
De twee plaatjes (tuin met roodborstje, het plaatje van het blikveld) vertellen iets over het kijken van de ogen die op het plaatje staan. Maar hier zijn de opgaven 1 en 2 met de illustratie erbij.

Jezelf zien

Als je met één oog kijkt, kun je toch een stuk van je eigen gezicht zien. Doe maar eens één oog dicht en kijk met het andere oog alle kanten uit (maar houd je hoofd stil!).

>> *Wat kun je dan van je eigen gezicht zien?*

In het plaatje zie je hoe iemand naar een merrie met veulen kijkt.



>> *Is die iemand een man of een vrouw?*

Met één oog dicht zie je nog iets van je eigen neus. Sommige leerlingen beweren hun eigen mond te kunnen zien, wat hun op commentaar van klasgenoten komt te staan. Niemand ziet zijn eigen oog. Dit plaatje gaat over *wat* je ziet en in zulke plaatjes komt je oog niet voor. Er is verschil tussen *wat*-plaatjes en *hoe*-plaatjes. Op *wat*-plaatjes staat geen oog en dus zijn er geen kijklijnen. In *hoe*-plaatjes kun je alleen via redenerend tekenen zien wat groter zal lijken of onzichtbaar zal zijn vanaf het aangegeven oogpunt.

Iedereen die begint met kijkmeetkunde begaat minstens één keer de zonde van de *wat* en *hoe* verwisseling. Soms ligt het zo dicht tegen elkaar. Zo dadelijk meer...

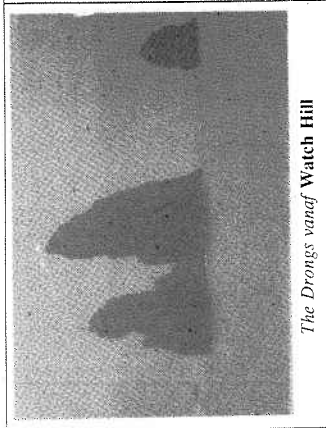
Tussentijdse samenvatting

Aan de hand van de eerste opgaven uit *The Drongs* zijn vijf kernpunten van de kijkmeetkunde aan de orde geweest. In het kort:

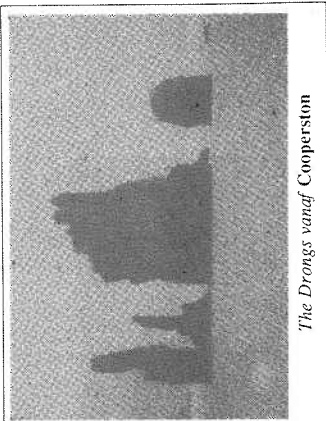
- a. Je kijkt langs rechte lijnen: kijklijnen.
- b. Kijklijnen maken hoeken met elkaar in het oog.
- c. In de kijkmeetkunde komen steeds twee soorten plaatjes voor: de *wat*- en de *hoe*-plaatjes.
- d. Constructies hebben vaak te maken met het combineren van twee standpunten.
- e. Bij afbeelden van iets ruimtelijks op een plat vel papier gaat altijd informatie verloren.

In het vervolg van dit artikel komen nog aan de orde:

- Het titelverhaal van het pakket, namelijk de rotsgroep *The Drongs*.

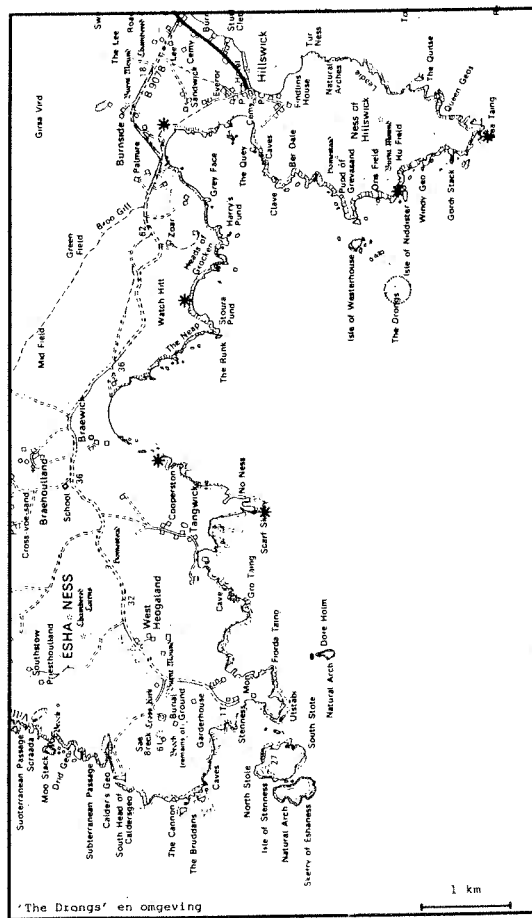


The Dronics vanaf Watch Hill



The Dronics vanaf Cooperston

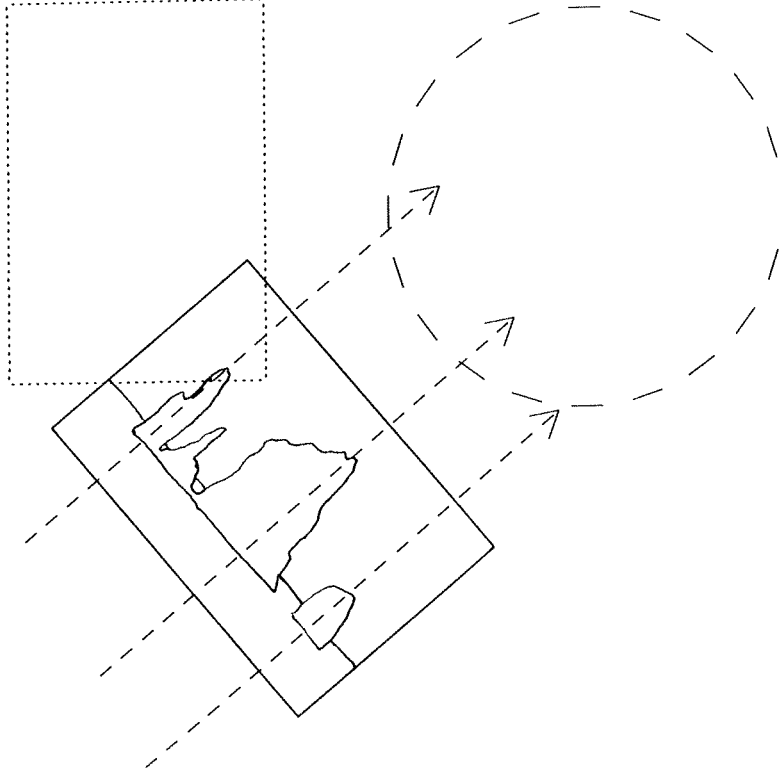
Deze twee foto's laten één groepje rotsen van verschillende kanten zien. De rotsgroep heet: **The Dronics**. The Dronics staan in zee bij de Shetland-eilanden, ten noorden van Schotland. Op de achterkant van dit boekje kun je dat zien. Op dit kaartje kun je vinden waarvandaan de foto's gemaakt zijn.



66 >> Er zijn zes plekken met sterretjes aangegeven; zoek Watch Hill en Cooperston op en onderstreep die twee plaatsnamen.

We gaan nu The Dronics in kaart brengen. Het schuine schetsje toont wat vanuit Cooperston te zien is. Vergelijk het maar met de foto! In de cirkel gaan we de kaart van The Dronics tekenen. De drie lijnen zijn de lijnen waarlangs je kijkt vanuit Cooperston naar de rotspunten A, B, en C.

- In de cirkel ligt dus ergens op het verlengde van de bovenste lijn de rotspunt A.
- 67 >> Trek de andere foto (die vanuit Watch Hill) over in de gestippelde rechthoek. LET op de KIJKRICHTING! Geef er ook de rotspunten A, B en C op aan. Teken ook de drie kijklijnen vanuit Watch Hill in de juiste richting.
- 68 >> Je kunt nu precies tekenen waar de rotspieken A, B en C in de cirkel komen te liggen. Ga je gang.



- De vijf genoemde punten komen daarbij impliciet weer ter sprake.
- Het gebruik van hoeken in samenhang met kijken in het pakket.
- Een globale aanduiding van enkele samenhangen in de meetkunde van het project W12-16, gezien vanuit dit pakket.

Als afsluiting gaan we nog in op de vraag wat nu eigenlijk de 'context' is waarin deze meetkunde zich afspeelt. Dat zijn geen roodborstjes, geen staartjes in je haar en het zijn ook geen rotsgroepjes. Het is iets anders.

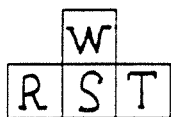
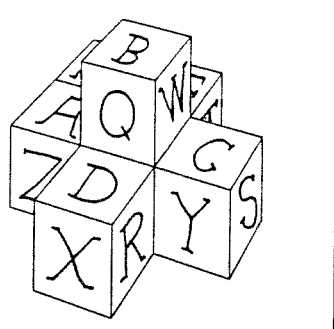
Het titelverhaal

Bladzijde 22 en 23 (zie de pagina hiernaast) zijn voor u, lezer van dit blad, in de hier gekopieerde vorm direct toegankelijk, ook zonder de voorgaande 65 opgaven op 21 bladzijden. Probeer het, voor u verder leest.

Wie beschikt over het vorig jaar verschenen *Concept Examenprogramma* kan nu de puzzel 'zoek de zeven verschillen' gaan doen. Op grond van een experiment in een vwo-klas is er nogal wat veranderd en de pagina's leveren daardoor binnen het pakket eigenlijk geen problemen op. Een enkele keer wordt de foto niet ondersteboven overgenomen. Dan is vragen naar 'links en rechts vanuit Watch Hill' voldoende om op het juiste spoor te komen.

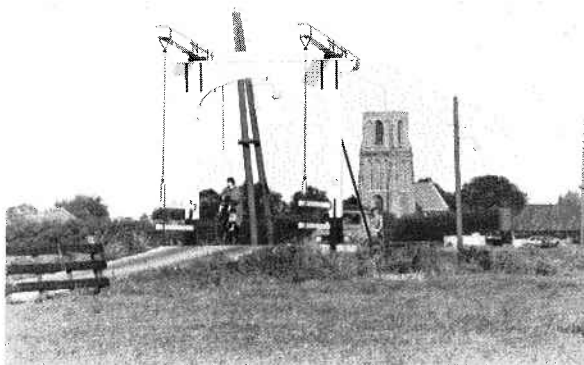
Het 'kruisen' en de 'rechte' lijnen zitten er duidelijk in. *Wat* en *Hoe* zijn duidelijk gescheiden op de eerste bladzijde en botsen op de tweede. Een enkele leerling neemt van de Watch Hill-foto alleen de maten in horizontale richting over, daarmee aantonend dat het vlakleggen van het plaatje, zoals dat is voorgedaan met Cooperston, eigenlijk overbodig is.

In dit voorbeeld zijn de hoeken tussen de kijklijnen gering. Je doet alsof de lijnen evenwijdig zijn, alsof het van die aanzichten zijn die je net met blokken bouwsels hebt geoefend.



In de eigenlijke constructie op de rechter *Drong*bladzijde treedt geen oog op. Dat is al een stap naar vragen die later aan de orde komen, het terugvinden van een oogpunt, als gegeven is wat er gezien wordt.

Zo'n lastige situatie is te vinden verderop in het pakket. Daar gaat het om de vraag waar je nu precies moet staan in het weiland om brug en toren in de gegeven verhoudingen te zien.



Daarbij wordt een zijaanzicht gebruikt. Dat is het *Hoe*-plaatje bij de twee *Wat*-plaatjes.



De stippellijn is door de top van de toren en op driekwart hoogte van de brug getekend. Op die lijn moet dus het oogpunt liggen. Het is een lastige constructie; niet om die lijn te trekken, maar om te weten welke lijn. Je kunt dit laatste wel als karakteristiek voor dit type meetkunde zien: de eigenlijke wiskundige elementen waar het om draait zijn eenvoudig (lijn, punt, hoek), maar de situatie waarin, daar zitten de problemen.

Hoeken en kijkmeetkunde

De eerste helft van het pakket *The Drongs* bestaat uit vier gedeelten:

- inleiding, waarin onder andere het roodborstje;
- kijken en hoeken;
- meer over aanzichten;
- toepassingen, waarin onder andere de bladzijden over de rotsgroep.

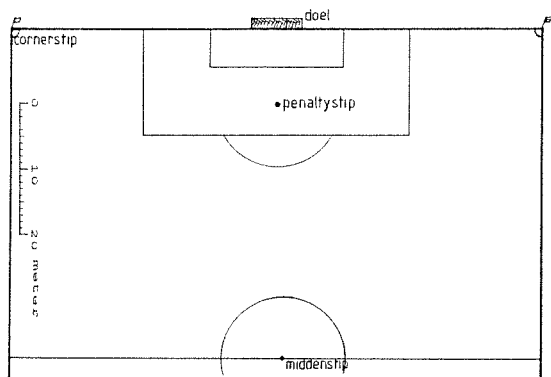
In dit gedeelte gaan we in op b. Hoeken behoren tot de standaard meetkundeleerstof en het is nuttig om te zien hoe zo'n onderwerp belicht kan worden vanuit de kijkmeetkunde.

De hoek van twee kijklijnen is een natuurlijke ingang tot hoekbegrip. Er is geen enkele storing met het begrip hoek als bijzondere plek van objecten, zoals de hoek van een huis.

En de twee kijklijnen hebben hun natuurlijke begin in het oogpunt, en lopen tot, ja tot wat gezien wordt. Het is duidelijk dat het oogpunt, het ontmoetingspunt van de lijn vanzelf de aandacht richt op 'wijd' of 'dichtbij elkaar', precies waar het om gaat bij hoeken. Niet op de totaliteit van de getekende figuur, maar op de mate van scherpte van één punt, het oogpunt, ervan.

In *The Drongs* meten we op een tekening van een voetbalveld de hoek waaronder je het doel ziet vanaf:

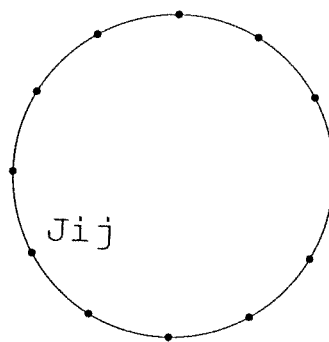
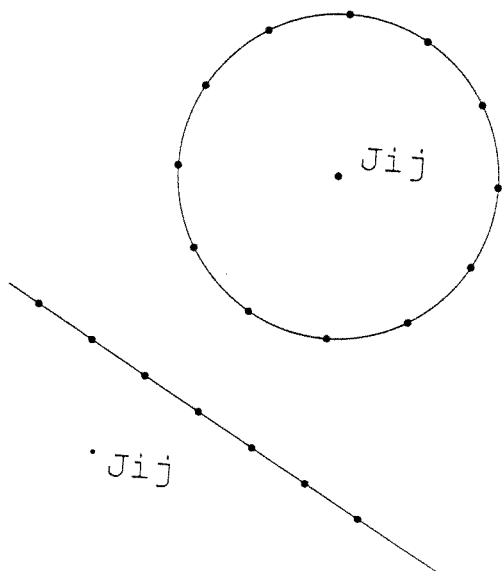
- de penaltystip;
- de middenstip;
- de cornerstip.



Leerlingen weten in hun eigen woorden te zeggen waarom je beter moet mikken vanaf de middenstip en waarom het van de cornerstip af niet ineens lukt. (Behalve met veel wind.)

Hoekbegrip is er dus wel in deze situatie, maar hoekmeten gaat nog weleens mis, voornamelijk door onoordeelkundig gebruik van geodriehoek of gradencirkel.

In de volgende versie van *The Drongs* nemen we de techniek van het meten gewoon op. Er is wel heel wat oefening mogelijk in het pakket. Zo wordt in drie situaties bepaald hoe gelijkheid van lijnstukken met gelijkheid van hoeken samenhangt.



De stippen zijn mensen. Jij staat bij *Jij*.

Nagegaan wordt in welke gevallen je buurmensen steeds onder dezelfde hoek ziet.

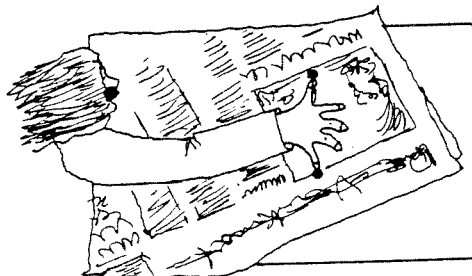
Dat dat in het derde geval zo is, wekt verbazing. Terecht!

In het eerste geval meten leerlingen 34, 35, 36 en 37 graden. Toch is er inzicht dat die hoeken gelijk moeten zijn. De stap dat je dan ook die hoek uit kan rekenen wordt niet vanzelf genomen, maar dat komt dan ook uitvoerig aan de orde in het vervolg.

Je *handspanhoek*, dat is de hoek waaronder je je uitgestrekte hand (van pink tot duim) ziet op armlengte. Je kunt die hoek meteen meten, met een vel papier en de gradenboog:

Metten van je handspanhoek

- >>Leg een oude krant op tafel. Strek je arm erop uit. Van boven ziet het er ongeveer zo uit:



- >>Laat de help(st)er nu de plaats van je pinkpunt, je duimpunt en de plek van het oog op de krant aangeven.

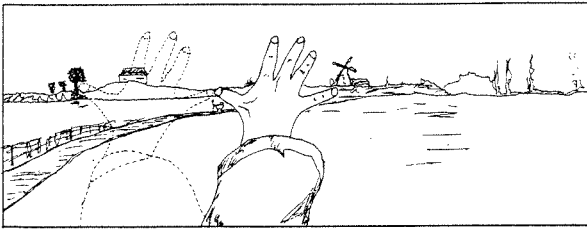
- >>Maak de tekening af met twee lijnen en meet nu de hoek tussen de lijnen.



Maar eigenlijk is dit veel leuker:

Een vol rondje handspannen

Je kunt handspannen tegen elkaar zetten. Zo:



De hand is naar rechts verplaatst. De duim is waar de pink was. Daarbij houd je iets als steun in de gaten. Hier is dat de meneer met de kinderwagen in de verte.

>> Tel hoeveel handspannen je tegen elkaar moet zetten om een vol rondje rond te gaan.

>> Nu rekenen we opnieuw uit hoeveel graden je handspan is.

Een vol rondje is 360 graden.

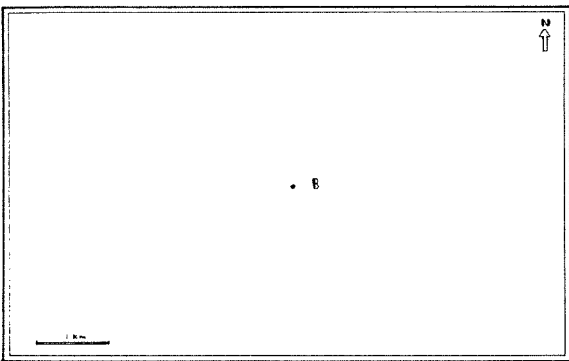
Dat is ... handspannen.

Dan is één handspar ... graden.

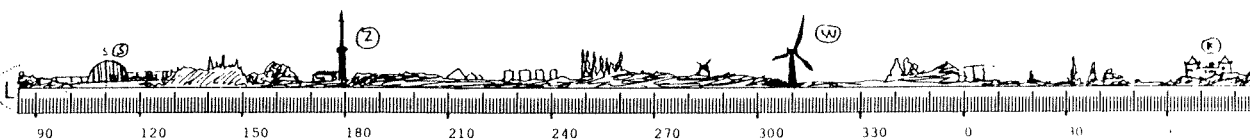
Hier functioneert de hoek van 360 graden nu eens echt! Je komt tot een merkwaardig inzicht: er is een hoek gemeten zonder meetinstrument, gewoon door tellen en rekenen! Hoeken worden ook gebruikt om richtingen te bepalen. Er is een overgang naar de hoek als richting-aangever in de volgende opgave.

Panoramastrook

Knip de panoramastrook (onder aan de pagina) uit en maak er een rondje van. (Het plaatje aan de binnenkant.)



Plaats de strook rond de brandtoren (B), met de nul naar het noorden.



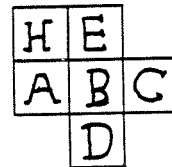
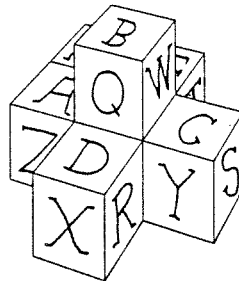
Mogelijke plekken voor de zendmast, de brug en de windmolen worden daarna bepaald.

Samenhang in de kijkmeetkunde

In het project W12-16 beginnen we al in de eerste klas met kijkmeetkunde. Kijken, tekenen en aanzichten komen voor in de pakketten als: *Zie je wel*, *Goed Gezien*, *Kubus-Make up* en *Schaduw en Diepte*.

Veelal wordt daar heel explorerend in allerlei situaties gewerkt. In *The Drongs*, we zijn nu in de derde klas, pakken we die lijn op, maar proberen de zaken wat preciezer vast te leggen. In de vierde klas, met pakketten als: *De Berg* en *De Watertoren* gaan we nog een stapje verder: wat er in de derde klas geleerd is, moet nu in andere situaties worden voortgezet.

Zo'n precieze vastlegging laat zich met het onderwerp *aanzichten* illustreren. Het verband tussen deze twee plaatjes is voor de leerlingen in mavo-3 onmiddellijk te zien:



Dat is gebaseerd op eerder oriënterend bezig geweest zijn. Nu geven we deze explicitering:

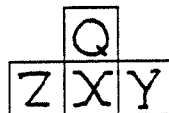
Plaatje 1: bovenaanzicht

Je kunt in dit plaatje niet zien dat letter B eigenlijk hoger ligt dan letter A.

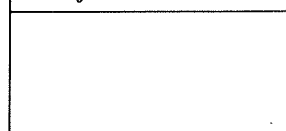
Je kunt wel zien dat letter B meer naar achter zit dan letter D.

Je kunt wel zien dat letter A meer naar links zit dan letter B.

en vragen bij plaatje 2 net zo'n blok in te vullen:



Plaatje 2: vooraanzicht



Er is natuurlijk nog plaatje 3, het zijaanzicht van rechts. Dan volgt deze opgave:

>> Vat alles samen in het volgende overzicht door de zes lege vakken in te vullen.

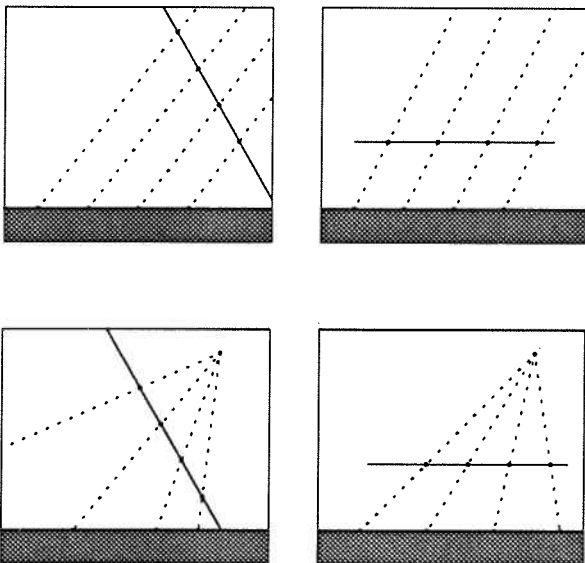
| wat is te zien | boven/onder | links/rechts | voor/achter |
|----------------|-------------|--------------|-------------|
| bovenaanzicht | Niet | Wel | Wel |
| vooraanzicht | | | |
| zijaanzicht | | | |

Het blijkt lastig te zijn dat in zo'n compacte vorm te herkennen, maar dat is juist de kern van de zaak: je weet het allemaal allang, maar maak het nu maar eens met een schema overzichtelijk, dat is weer andere koek.

Een ander punt van samenhang in de kijkmeetkunde houdt verband met het voorbeeld waar gekeken werd naar mensen op een cirkel en op een lijn.

Dat zijn als het ware de kernbeelden bij de samenhang tussen hoek en afstand. Zulke kernbeelden kwamen ook voor in het pakket *Schaduw en Diepte*. Daar gaat het onder andere om de schaduw van een touw met knopen. De knopen liggen op onderling gelijke afstanden, het licht komt van een lantaarn of van de zon.

Er zijn weer verschillende situaties mogelijk:



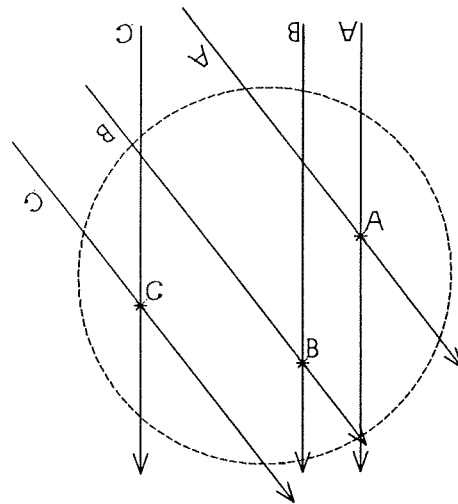
Deze kernbeelden komen terug als er meer gerekend moet worden in figuren, gerekend met verhoudingen.

De kernbeelden bij hoeken spelen impliciet ook een rol bij het latere rekenen met sinus en tangens.

Nog één verbinding tot slot van dit gedeelte.

In het cirkeltje waarin de rotsen van *The Drongs* worden getekend, tekenen we een roostertje van lijnen.

Als het ware wordt er een (scheef) coördinatensysteem gemaakt, waarmee de plekken worden bepaald.

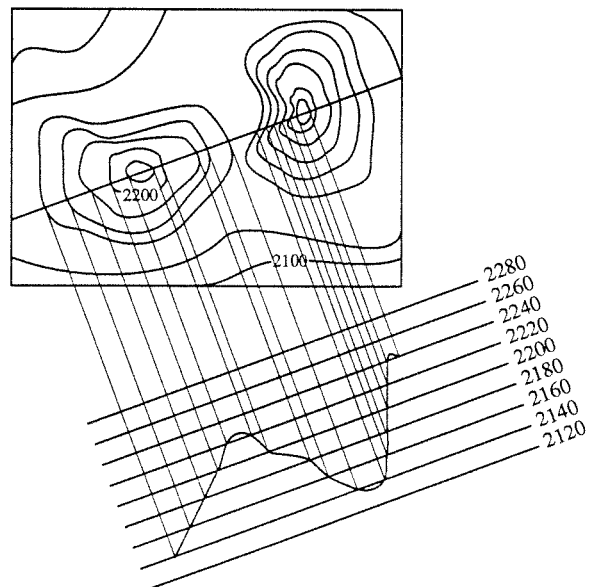


Coördinaten, ze zijn natuurlijk al eerder aan de orde geweest, maar dan vaak als vóórgegeven systeem, bijvoorbeeld van een stratennet, de nummering van huizen op een flatgebouw, enzovoort.

Hier komt de maak-het-zelf kant van coördinaten boven. Een complexe samenloop van coördinaten, kijken in diverse richtingen, werken met doorsneden, met wat wel én niet in afbeeldingen te zien is, komen we tegen in een opdracht uit *De Berg* voor de vierde klas.

Gegeven is een kaart met hoogtelijnen, een lijn op de kaart.

Gevraagd is de doorsnee door het landschap boven die lijn.



De constructie is als het ware de omgekeerde van wat bij de rotsgroep gebeurde. Nu is wél bekend waar de toppen liggen, nu moet je juist het beeld – in dit geval geen aanzicht, maar een doorsnede – construeren.

Een lastige opgave, die een brede oriëntatie op allerlei deelgebieden en de explicitering ervan veronderstelt.

Tot slot: wat is de context?

Kijkmeetkunde gaat niet over rotsen of roodborstjes. Het gaat over kijken en vooral over 'jezelf' daarin.

Kijk eens goed naar deze foto:

Marloes heeft zich even omgedraaid vanaf haar eigen plaats. Maar dat is echt niet de reden dat Kees en Martin hun boek op de kop hebben. Ze zijn bezig met de verschillende foto's van *The Drongs*. Ze draaien het boek zo, dat ze zelf vanuit het 'noorden' naar de rotsen kijken. De echte rotsen liggen zo'n 1200 kilometer hiervandaan. Het doet er niet toe. Hier kijken Henk en Martin zelf. De context? Dat ben jezelf.

