

Doorsneden Doorzien

L.M. Doorman/M. Wijers
OW & OC, RU Utrecht

Inleiding

'Is dit wiskunde? Daar krijg ik honger van!', aldus een leerling van de Christelijke Scholengemeenschap Revisius in Deventer, bezig met het pakket *Doorsneden*. Dit pakket en de bijbehorende software *Doorzien* zijn op deze school in het voorjaar van 1991 in twee mavo 2 klassen door de docenten Eibert Theunissen en Ellie Lammertsma uitgeprobeerd.

'Daar krijg ik honger van!' is niet zo'n gekke uitspraak. Als je het pakket doorbladert, kom je nogal wat foto's en tekeningen van etenswaren tegen. Het gaat over doorsneden en wat ligt dan meer voor de hand dan beginnen met bekende doorsneden. Het snijden van brood heeft iedereen weleens gedaan. En als je het al niet zelf gedaan hebt dan weet je in ieder geval wel welke vorm de doorsnede kan krijgen als je een boterham afsnijdt.

In dit artikel maken we duidelijk wat de plaats is van het pakket rond doorsneden in de meetkundelijn. We geven een beschrijving van het pakket en de bijbehorende software. Hierin zijn de ervaringen op het Revisius verwerkt. Deze ervaringen geven ook enkele aanwijzingen voor het verbeteren van de materialen.

Plaats in de meetkundelijn

Twee kerndoelen van de basisvorming zijn:

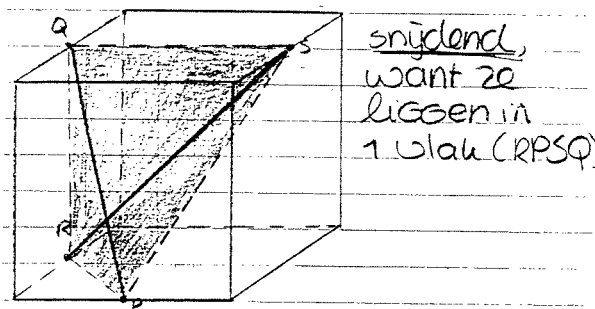
1. De leerlingen kunnen vlakke afbeeldingen van ruimtelijke figuren, zoals foto's, plattegronden, landkaarten, bouwtekeningen lezen, interpreteren, ruimtelijk zich voorstellen en weergeven op papier of scherm.
2. De leerlingen kunnen concreet handelen aan de hand van voorstellingen van ruimtelijke figuren en aan tastbare voorwerpen. Zij kunnen uitslagen, patronen en dergelijke maken en vlakken uit ruimtelijke figuren op schaal (na)tekenen.

In het nieuwe leerplan van W12-16 heeft de ruimtemeetkunde een plaats gekregen [1]. Vanaf klas 1 wordt gewerkt aan het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht, bijvoorbeeld in het pakket *Kubus Make-up*. In klas 2 gebeurt dit in het pakket *Doorsneden* ondersteund met de

software *Doorzien*. Later, in klas 3 en 4, wordt op doorsneden teruggekomen in het pakket *De Berg*.

Het je kunnen voorstellen hoe een (afgebeeld) voorwerp in elkaar zit en een verband zien tussen vlakke en ruimtelijke figuren, heeft in het dagelijks leven veel praktische toepassingen. Daarnaast bereidt het voor op technische vervolgoopleidingen en de ruimtemeetkunde bij wiskunde B in de bovenbouw van havo en vwo.

De ruimtemeetkunde in wiskunde B bestaat vooral uit het uitvoeren van constructies in afbeeldingen van ruimtelijke situaties, en het maken en interpreteren van tekeningen van ruimtelijke objecten [2]. Hiervoor is het hebben van ruimtelijk inzicht een noodzaak gezien onderstaande redenering van een leerling uit 4 havo.



Het pakket Doorsneden

Gekozen is voor een pakket rond doorsneden, omdat vanuit iets alledaags als het doorsnijden van voedsel en hout, gewerkt kan worden naar moeilijkere vragen over bijvoorbeeld doorsneden in een kubus. Hierbij worden alleen vragen gesteld over vormen. De leerlingen hoeven geen kennis te hebben van coördinaten in de ruimte. Het pakket begint met opgaven over afbeeldingen van voedsel, omdat bijna iedereen zich van die afbeeldingen de ruimtelijk situatie kan voorstellen.

Via deze ingang komen twee aspecten van de ruimtemeetkunde aan bod:

- Het herkennen van ruimtelijke voorstellingen in 'platte' plaatjes.
- Het zien liggen van (snij)vlakken in ruimtelijke objecten.

Dit gaat aan de hand van twee typen opgaven:

1. Gegeven een voorwerp en een snijrichting, gevraagd de doorsnede op een bepaalde plaats. Hierbij wordt ook aandacht besteed aan loodrecht op elkaar staande doorsneden, bijvoorbeeld:

>> *Wat zie je als je een appel door het steeltje doormidden snijdt? Maak een tekening.*

Je kunt een appel ook anders doorsnijden. Bijvoorbeeld loodrecht op de vorige snijrichting.

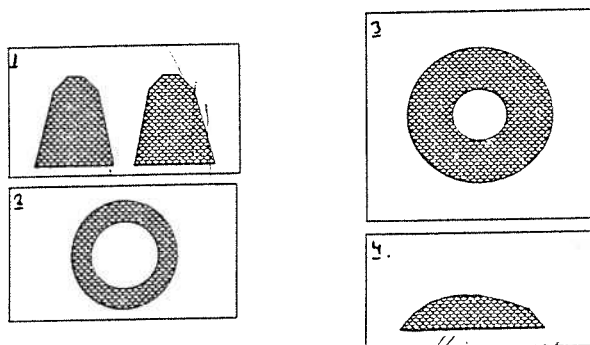
>> *Maak een tekening van zo'n doorsnede door het midden van een appel.*

2. Gegeven een of meer doorsneden van een object, bepaal de snijrichting en de plaats waar gesneden is. Een voorbeeld hiervan is de volgende opgave afkomstig uit de toets die op het Revius afgenomen is.

Tulband



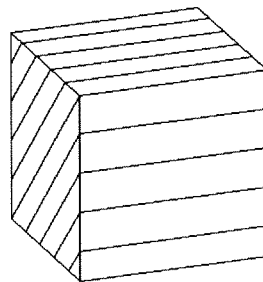
Hieronder zie je vier doorsneden van deze tulband. Leg van elke doorsnede uit hoe je die kunt krijgen. Geef hierbij steeds aan (in woorden of in een plaatje) waar je moet snijden en in welke richting.



1 = verticaal gesneden
 2 = horizontaal gesneden bovenaan
 3 = horizontaal gesneden onderaan
 4 = verticaal gesneden

In dit verband komen ook parallelle doorsneden voor. Mogelijke vragen daarbij gaan over het al of niet veran-

deren van de vorm van de doorsneden. Hierop wordt doorgedaan bij het werken met de kubus.



Je ziet hier een kubus. De lijnen geven de plaats aan waar de kubus doorgesneden wordt.

>> *Welke vormen krijgen de doorsneden? Teken er een.*

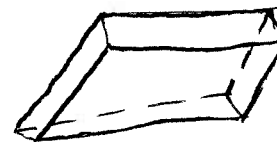
Door afwisselend te werken met plaatjes (tweedimensionaal), ruimtelijke objecten (driedimensionaal) en mogelijke doorsneden (tweedimensionaal) wordt het ruimtelijk voorstellingsvermogen geoefend.

Drie problemen

Tijdens het werken met het pakket in de klas kwamen drie opvallende problemen naar voren. Het eerste probleem betreft de betekenis van de term doorsnede. Deze term sluit aan bij het dagelijks spraakgebruik: 'teken de dwarsdoorsnede', 'hier zie je de lengtedoorsnede van...'. Onderschriften bij allerlei technische tekeningen, plaatjes in atlanten, enzovoort. Deze terminologie is de meeste leerlingen wel bekend. Toch blijkt het begrip doorsnede voor leerlingen moeilijk. Bij het doorsnijden van voorwerpen houd je 'hompjes' of 'plakken' over. Veel leerlingen tekenen daarom dit:



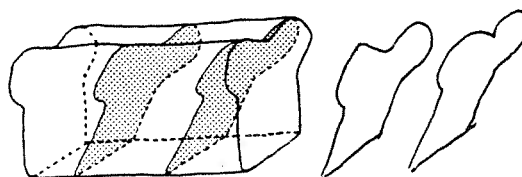
Een hompje appel

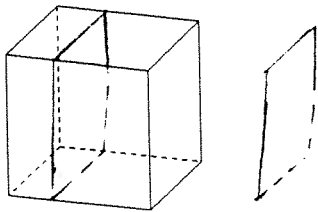


Een hompje kubus

Zolang er in de 'logische richting' wordt gesneden, loodrecht op de kijkrichting, tekenen leerlingen de doorsnede zonder diepte. Deze twee soorten tekeningen kunnen gebruikt worden om duidelijk te maken wat er met de term doorsnede bedoeld wordt.

Het tweede probleem is dat het 'plat' zien van doorsneden niet zonder moeite gaat. Dit doet sterk een beroep op het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Zelfs bij een bekende context als brood is dat toch behoorlijk lastig. Daarvan getuigen de volgende voorbeelden.





Het laatste probleem dat opduikt is er een op het gebied van taal. Iemand anders duidelijk maken hoe je moet snijden om een bepaalde doorsnede te zien te krijgen valt niet mee. Recht, verticaal, horizontaal, schuin, nee... anders schuin, je moet het ding anders neerzetten.... Taal is hier niet toereikend en tekeningen vaak ook niet!

Concreet materiaal

Vooraf bij de twee laatste problemen doet de noodzaak tot gebruik van concreet materiaal zich al snel voelen. Een brood, of iets anders min of meer in de vorm van brood (agenda, doosje, of iets dergelijks), ondersteunt het voorstellingsvermogen. Het aanwijzen van snijrichtingen op een concreet object kan bij het formuleren helpen.

'Moeten er dan etenswaren de klas in? Dat geklieder en die verspilling van voedsel wil ik niet hebben.' Een zeer voorstelbare reactie van veel docenten. Nog afgezien van de genoemde bezwaren brengt het werken met concreet materiaal heel wat voorbereiding en organisatie met zich mee. Niet iedereen zal daarvoor voelen, terwijl het bijna noodzakelijk bleek te zijn.

Er zijn echter ook alternatieven om concreet materiaal een rol te laten spelen. Een deel van de opdrachten kan door leerlingen thuis uitgevoerd worden. Elke leerling zal vermoedelijk wel de kans krijgen om thuis een brood, een appel, een wortel, een worst, een banaan of nog iets anders door te snijden en dan als wiskundehuiswerk een tekening van een doorsnede te maken.

Deze tekeningen kunnen een volgende les dan eventueel weer gebruikt worden om na te gaan of iedereen nu weet wat een doorsnede is.

Het is ook mogelijk om bij elke tekening de klas te laten raden van welk voorwerp de doorsnede afkomstig is en in welke richting er gesneden is. Een andere mogelijkheid is een demonstratie door de docent. Hiermee wordt in ieder geval de rommel en de organisatie beperkt. Het laten zien van een voorwerp, zonder het echt door te snijden biedt leerlingen ook al steun bij het zich voorstellen van de vorm van een doorsnede. In plaats van etenswaar is het ook mogelijk om modellen van ander materiaal te gebruiken, hout, klei, oasis (voor planten), enzovoort.

Demonstraties in de vorm van tekeningen of foto's geven een minder ruimtelijk beeld. Een goede aanvulling is bijvoorbeeld het maken van een soort stripverhaal, waarin een voorwerp wordt doorgesneden en vervolgens de doorsnede in beeld komt. Een creatieve leerkracht zal vast geen moeite hebben deze verzameling van alternatieven uit te breiden.

Software: Doorzien

In het pakket *Doorsneden* wordt bij de stap naar de kubus het computerprogramma *Doorzien* ingezet. Het programma wordt gebruikt bij het zichtbaar maken van doorsneden in de kubus en andere meetkundige vormen. Het werken met dit programma zou je 'half-concreet' kunnen noemen. Hoewel de plaatjes op het scherm, net als tekeningen ook maar plat zijn, geven ze toch een ruimtelijk effect. Het ruimtelijke effect van de op het scherm geprojecteerde figuren wordt vooral veroorzaakt doordat je de figuren zelf kunt manipuleren. Je kunt een figuur draaien, vergroten of verkleinen. Daardoor krijg je grip op de ligging van de figuur in de ruimte. Twee leerlingen waren bijvoorbeeld een hele tijd bezig te zoeken naar de grootst mogelijke driehoek als doorsnede in de kubus.



Ze maakten hierbij bewegingen voor het scherm in de ruimte, waarbij een van hen zei: 'nu naar achteren...'; de cursor op het scherm bewoog echter naar boven. In het programma worden geen coördinaten in de ruimte gebruikt. Het draaien van de figuur gaat met de pijltjestoetsen.

In eerste instantie is op deze plaats in het pakket *Doorsneden* gewerkt met bouwplaten van kubussen waarin doorsneden getekend waren.

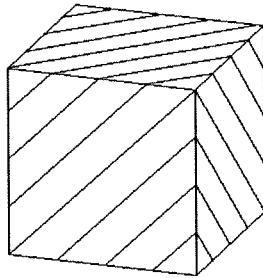
Er is echter voor softwareondersteuning gekozen, omdat het je voorstellen van doorsneden in de kubus moeilijk bleek. Bij het echt snijden van de kubus heb je het nadeel dat je niet altijd maar weer opnieuw kan snijden (als er überhaupt snijbare kubussen in het lokaal aanwezig zijn). Op papier kan het wel voorgedaan worden via plaatjes van kubussen met erin en ernaast de verschillende doorsneden. Dan blijft er echter weinig te onderzoeken over voor de leerlingen. Het zelf construeren van doorsneden in plaatjes is op dat moment namelijk nog te ingewikkeld, terwijl het redeneren over de mogelijke vormen al wel mogelijk is.

De computer is een goed instrument om leerlingen in tweetallen zelf te laten onderzoeken welke vormen je als doorsnede in de kubus krijgen kunt. Daarom is gekozen voor een open omgeving die uitnodigt tot experimenteren. Vervolgens kunnen de verschillende oplossingen vergeleken en besproken worden.

Doorzien is geen programma waarin een aantal opgaven in een multiple-choice vorm zijn klaargezet. Het programma is een hulpmiddel dat gebruikt wordt naast de opgaven uit het pakket. Wel blijkt dat leerlingen vooral in het begin behoefte hebben aan 'echte' kubussen naast het scherm.

Een opgave is:

Je kunt zo'n kubus natuurlijk ook in andere richtingen doorsnijden, bijvoorbeeld:

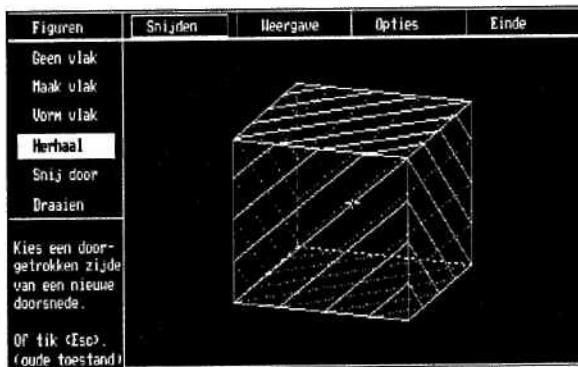


Bij het programma is ook een kubus aanwezig waarin één van deze doorsneden getekend is. Deze heet KUBUS_3.

>> *Haal KUBUS_3 op (in menu **Figuren**).*

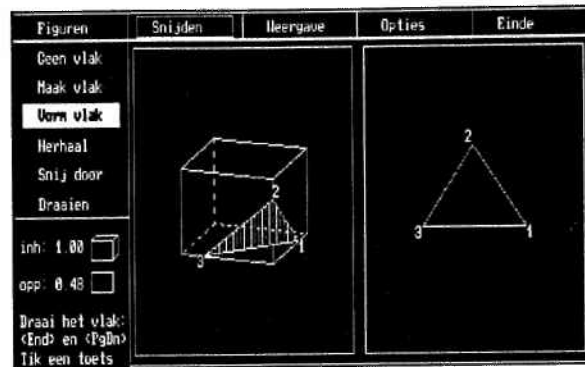
>> *Bekijk welke verschillende evenwijdige doorsneden voorkomen (**Herhaal**).*

Bij het onderzoeken maak je in het programma gebruik van de opdrachten **Herhaal** en **Vorm vlak** in het menu **Snijden**. De leerling begint met een kubus waarin een van de doorsneden in de gegeven richting getekend is. Na de opdracht **Herhaal** worden er meer doorsneden evenwijdig aan de vorige getekend.



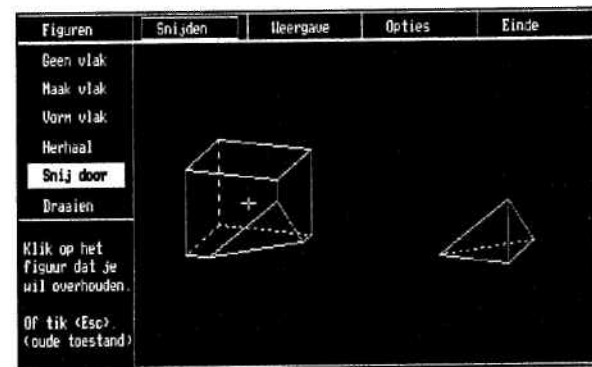
Een van de getekende doorsneden kun je nu kiezen. De gekozen doorsnede kun je uit de kubus halen met de opdracht **Vorm vlak**. De afdruk hieronder laat zien wat er dan op het scherm staat.

Verrassende doorsneden worden gevonden. Een leerling: 'Leuk om te zien dat ook een zeshoek als diagonaalvlak kan' (bij de kubus). Dacht ze dat alle doorsneden diagonaalvlakken zijn, of suggereert de ligging van



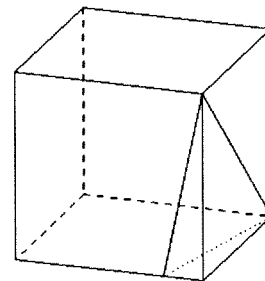
de zeshoek iets van een diagonaalvlak (schuin door de hele kubus)? Taal is ook hier belangrijk. Vanzelf komen begrippen zoals diagonaalvlak, evenwijdig en loodrecht aan de orde.

Bij bovenstaande opgave wissel je de opdrachten **Herhaal** en **Vorm vlak** af. Een andere mogelijkheid voor het zien van de doorsnede is de opdracht **Snij door**. De kubus wordt dan echt door de aanwezige doorsnede in twee delen verdeeld.



Ook wordt er van leerlingen gevraagd de gevonden doorsnede in een kubus op het werkblad te tekenen. Bijvoorbeeld bij de volgende opgave:

Hieronder zie je de kubus doorgesneden in een nieuwe richting:



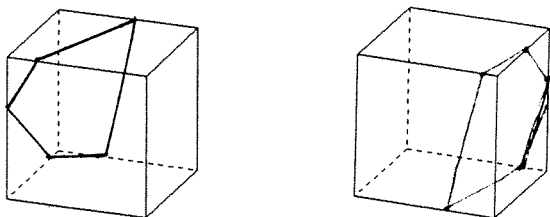
>> *Maak deze doorsnede met het programma, gebruik de opdracht **Maak vlak**.*

*Je kunt de kubus ook in deze richting in plakjes snijden (met **Herhaal**).*

Als het goed gegaan is zijn er doorsneden met de vorm van een vijfhoek.

>> Teken de gevonden vijfhoek in de kubus op je werkblad.

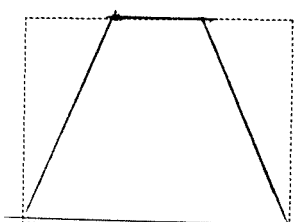
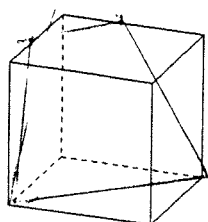
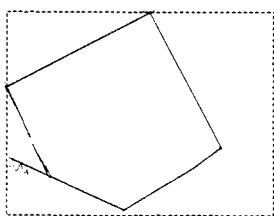
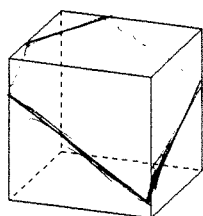
Dit levert wisselende resultaten:



Tot slot staat er in de werkbladen een opgave waarin gevraagd wordt de mogelijke vormen van doorsneden van de kubus te onderzoeken. De antwoorden leveren genoeg stof voor het bespreken van de gevonden vormen. Zie onderstaande voorbeelden:

Ligging in de kubus:

Vorm:



Meer over Doorzien

Het programma *Doorzien* is een open omgeving. Het biedt geen opgaven aan, maar is een hulpmiddel naast de werkbladen. De bediening is eenvoudig. Voor een docent zonder ervaring kan het echter toch een hele organisatie betekenen. Het is dan altijd mogelijk om een paar leerlingen met computerervaring als hulp in te schakelen.

Bij het experiment op het Revius hebben we het werken met *Doorzien* als volgt georganiseerd. De laatste les voor het practicum heeft de docent een demonstratie van

het programma gegeven. De docent vertelde iets over de (menu)structuur van het programma, en behandelde de eerste opgave van de werkbladen. Zo'n demonstratie is een ideaal uitgangspunt voor een onderwijsleergesprek. Tijdens het practicum werkten de leerlingen in tweetallen aan de computer. Ze bleken veel tijd te nemen voor het verkennen van het programma. Dit is zeker geen verloren tijd.

Hiermee leren ze de mogelijkheden van het programma doorzien, daarnaast wennen ze aan de afbeelding van de kubus op het scherm. Voor deze verkenning zal tijd uitgetrokken moeten worden.

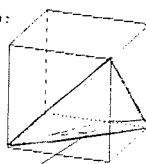
Tot slot

Tot slot hebben we de docenten een aantal voorbeelden van toetsopgaven gegeven. Twee van deze opgaven zijn in een proefwerk verwerkt. Eén daarvan is de opgave over een tulband, die eerder in dit artikel is opgenomen. De tweede opgave laat zien hoe de activiteiten achter de computer in de toets zijn verwerkt:

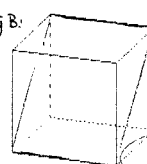
Opgave

- Kun je een kubus in steeds dezelfde richting doorsnijden (net zoals bij 'Herhaal' met de computer), zodat alle doorsneden de vorm hebben van een driehoek? ANTWOORD: *Ja*
Zo ja, teken dan in een van onderstaande kubussen hoe je moet snijden.
- Kun je een kubus in steeds dezelfde richting doorsnijden (net zoals bij 'Herhaal' met de computer), zodat alle doorsneden de vorm hebben van een rechthoek? ANTWOORD: *Ja*
Zo ja, teken dan in een van onderstaande kubussen hoe je moet snijden.
- Kun je een kubus in steeds dezelfde richting doorsnijden (net zoals bij 'Herhaal' met de computer), zodat alle doorsneden de vorm hebben van een vierkant? ANTWOORD: *Nee*
Zo ja, teken dan in een van onderstaande kubussen hoe je moet snijden.

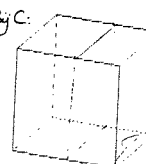
Bij A:



Bij B:



Bij C:



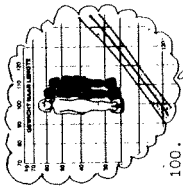
De ervaringen met *Doorsneden* en *Doorzien* zijn zodanig, dat dit onderwerp zeker een plaats kan krijgen in de tweede klas. Het gelijktijdig ontwikkelen van leerstof-onderdelen en bijbehorende software biedt garantie voor een goede onderlinge afstemming. Hoewel het pakket ook zonder het programma gebruikt kan worden, biedt de software een wezenlijke verrijking.

Noten:

- [1] Zie het artikel *Je kunt niet met een boogje kijken* elders in deze Nieuwe Wiskrant.
- [2] Zie *Perspectief in het havo B-programma* van A. Roodhardt, Nieuwe Wiskrant 10e jrg. nr. 2, 1990.

Mijn vader vindt dat ik om 8 uur 's avonds naar bed moet. Ik ben het daar niet zo mee eens, dat begrijp je wel. "Ja", zegt hij dan, "jij behoort 11 uur per dag te slapen. Ik ken een vuistregel die zegt dat het aantal uur dat je moet slapen evenveel is als 16 m'n de helft van je leeftijd."

- a. Hoe oud is iemand die volgens de vuistregel 11 uur moet slapen?
- b. Hoe lang zou vader volgens deze vuistregel slapen?
- c. Zeg iets in het algemeen over deze vuistregel. Voor wie zou die bestemd zijn? Voor wie levert de vuistregel belachelijke slaaptijden?



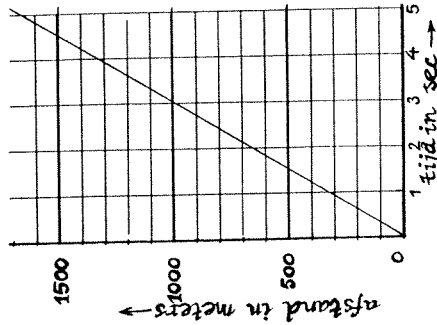
- d. Een andere vuistregel zegt: het aantal kilogram dat je mag wegen is je lengte in cm m'n 100. Onderzoek deze vuistregel. Wat vinden jullie ervan?



- e. Kennen jullie zelf nog van dit soort vuistregels? Schrijf ze op. Bespreek ze met elkaar.

Tamar is aanwezig bij een pop-concert in de openlucht dat 'live' of de radio wordt uitgezonden. Het is zo druk dat ze wel op tweehonderd meter van het podium afstaat. "Hé", zegt ze, "ik hoor de muziek door m'n radiootje eerder dan in het echt. Wat raar is dat." Kunnen jullie dat verklaren?

Als het onweer kun je er achter komen hoe ver de onweersbui van je vandaan is. Als je de bliksem gezien hebt duurt het meestal even voordat je de donder hoort. Hoe langer dat duurt, hoe verder de bui weg is. Vandaar dat je sommige mensen tijdens een onweersbui seconden kunt zien tellen. Het grafiekje hieronder laat zien welk verband er is tussen de afstand tot de onweersbui en het aantal seconden tussen bliksem en donder.



Gebruik de grafiek om de volgende vragen te beantwoorden.
 Als er 1 seconde tussen bliksem en donder zit, hoe ver is de bui dan van je vandaan?
 En als het 2 seconden duurt? En als het nog een seconde langer duurt?
 Hoe ver is de bui van je vandaan als het 10 sec. duurt?
 Bedenk een vuistregel waarmee je de afstand kunt berekenen als je het aantal sec. weet.

- e. Bedenk ook een vuistregel waarmee je het aantal seconden kunt berekenen als je de afstand weet.
- f. Als je in een goede echoput roept: "Hoe heet de burgemeester van WEZEL?", dan krijg je je antwoord even later, laten we zeggen na 0,2 sec. Kunnen jullie uitrekenen hoe diep die echoput is?