Formules maken en gebruiken

Algebragroep W12-16 [1]
OW&OC, RU Utrecht/SLO, Enschede

Inleiding

Formules vormen een onderdeel van een samenhangend geheel van situatie, tabellen, grafieken en formules. In de vorige Wiskrant-special [2] gaven we een ruwe schets van de richting, waarin we het totale algebraprogramma ontwikkelen. In dit artikel richten we ons op de formules.

Formules zijn er niet zomaar, mensen maken ze. In het algebraprogramma van W12-16 is ruimte voor het proces van het maken van formules. Zeker in het begin, maar ook op andere plaatsen in het programma, besteden we aandacht aan het opbouwen van formules door leerlingen en aan het leren van formuletaal. Zijn de formules er eenmaal, dan kun je ermee redeneren en erin veranderen. Drie aspecten van het leren omgaan met formules vormen achtereenvolgens de kern van dit verhaal.

- Het eerste aspect is het onderscheiden van de rekenstappen, de eerste fase in het opbouwen van formules en het vertalen van die rekenstappen naar formuletaal.
- Dan volgt het redeneren met formules, een belangrijk aspect in het onderzoeken van verbanden met behulp van formules.
- Tenslotte het veranderen van formules, waarmee je kunt komen tot oplossingen van problemen, die wiskundig van aard zijn, of die zijn vertaald naar een wiskundig systeem met formules.

Deze aspecten bespreken we afzonderlijk om de bedoeling duidelijk te maken. We doen dat aan de hand van vele voorbeelden uit (experimenteel) lesmateriaal en observaties, om iets te laten zien van hoe het onderwijs volgens ons programma gestalte kan krijgen. Elke paragraaf besluit met een schets van de wijze waarop het besproken aspect past in de algebralijn. Daarbij beperken we ons tot het C/D-niveau.

Opbouw vanuit rekenstappen

Een formule is in de eerste plaats een handige samenvatting van berekeningen. Maar hoe kom je aan zo'n samenvatting? Welke rekenstappen maak je eigenlijk, hoe vertel je daarover en hoe schrijf je dat in formuletaal?

Rekenstappen vinden
Met de werkbladen *Stroken met getallen* is geëxperimenteerd in kleine groepjes leerlingen uit een eerste klas. Op lange, naast elkaar gelegen stroken staan rijen getallen. Die rijen vertonen een regelmaat: de stappen tussen opeenvolgende getallen zijn steeds even groot. In eerste instantie zoeken leerlingen naar getallen, die naast elkaar staan, op verschillende stroken

Op lange stroken papier heeft iemand getallen geschreven met onzichtbare inkt. Een deel van de getallen is bewerkt met een decodeerpen, die kun je dus zien.

A	B	C
.	.	.
.	.	0
1	.	0,5
2	8	1,0
3	12	1,5
4	16	2,0
5	20	2,5
6	24	3,0
7	28	3,5
.	32	.
.	.	.

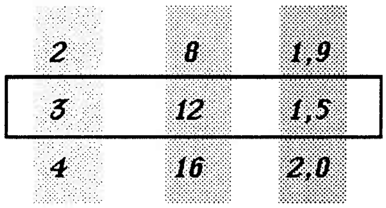
1. *Welke getallen staan volgens jou onder de stippen? Vul de strook maar in.*

2. *De stroken zijn meer dan dertig meter lang. Op welke strook kan het getal 1365 staan?*

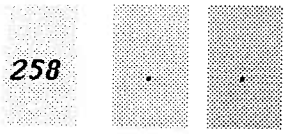
3. *Op welke stroken kan -11 staan?*

4. *Welke regelmaat zie je in de rijen getallen op de stroken? Vertel dat in woorden.*

5. *De stroken zijn precies zo neergelegd, dat er steeds getallen van verschillende stroken naast elkaar staan.*

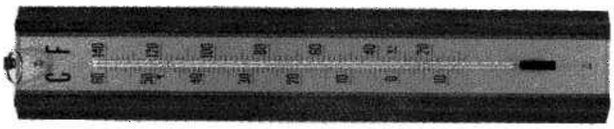


a *Op strook A staat het getal 258. Welke getallen op de andere twee stroken staan daarnaast?*
b *Hoe ben je aan je antwoord bij a gekomen?*



Vraag 5 dwingt de leerlingen te zoeken naar de overgang van strook naar strook. In deze situatie is het vinden van de rekenstappen geen probleem. Dat is echter niet altijd zo gemakkelijk. In het volgende geven we twee voorbeelden van mogelijke strategieën voor het vinden van rekenstappen, die niet zo voor de hand liggend zijn.

Hoe moet je de oven instellen als je in een Engels recept leest dat de temperatuur 350F moet zijn, terwijl de thermometer niet verder gaat dan 140F? Welke rekenstappen moet je maken voor het omrekenen van Fahrenheit naar Celcius?



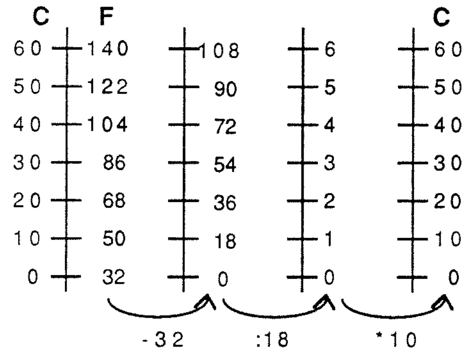
De foto van de thermometer legden wij enkele brugklassers voor. Het fragment uit de observaties laat zien hoe de leerlingen redeneerden:

Jelle: '... doortrekken van de lijn naar boven en dan 140 verdubbelen, dat wordt 280 en dan nog 70 erbij, dus 60 graden Celcius en dan nog eens 30 erbij, dat wordt ...'

Jeroen: '... Als je dit nou verdriedubbelt, dan doe je dit ook driemaal dan kom je hier uit op 420 en dan kom je hier uit op 180.
En dan hoef eh dat, eh even kijken, 420, 300, 340 en dan 10 erbij ...'

Ze hielden er blijkbaar rekening mee dat de getallen op de schaal van Fahrenheit grotere stappen maken dan die op de Celciusschaal. En ze trokken de lijn door als zouden de nulpunten van de schalen bij dezelfde temperatuur zijn geplaatst.

We gaan even mee met de leerlingen: stel je nu een schaalverdeling voor die even grote stappen maakt als de Fahrenheitschaal, maar die de nul bij het vriespunt van water heeft staan, net als de Celciusschaal. Hoe ziet die nieuwe schaalverdeling er dan uit? Met welke berekening kom je vanuit de Fahrenheitschaal bij de nieuwe schaal? En hoe ga je van die nieuwe schaal naar de Celciusschaal? Hoe groot zijn eigenlijk de stappen op de schaalverdelingen? We beginnen met het uitdunnen van de schaalverdelingen, zodat alleen de temperaturen zijn aangegeven, die je op beide schalen exact kunt aflezen. Via tussenschalen komen we dan uit bij de Celciusschaal:

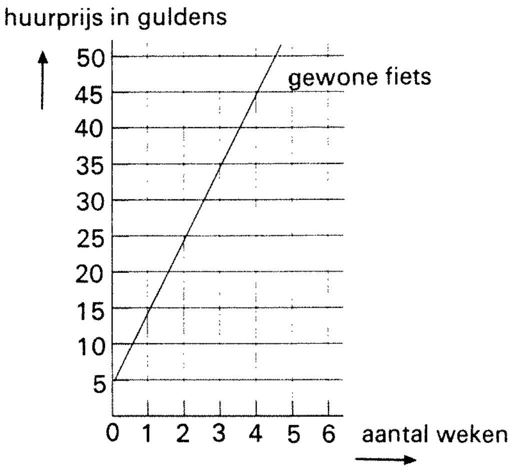


Hiermee hebben we een serie bewerkingen gevonden om te rekenen van Fahrenheit naar Celcius. De vraag over de oventemperatuur is vrijwel opgelost.

Soms kun je de rekenstappen vinden door te zoeken in het samenspel van situatie, grafiek en berekeningen daar omheen. In de methode *Wiskundelijn*, deel 2a, vinden we een voorbeeld daarvan:

Het fietsverhuurbedrijf 'de Peddelaar' gebruikt grafieken om de klanten te laten zien hoeveel het huren van een fiets kost.
De kosten hangen af van:
- *het soort fiets;*
- *het aantal weken dat men de fiets huurt.*

Op deze grafiek zie je hoeveel het kost als je een gewone fiets huurt.



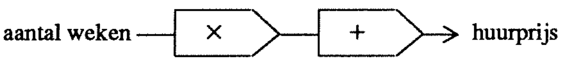
a. *Neem de grafiek over in je schrift. Ga tot tien weken op de horizontale as.*

b. *Hoeveel rekent 'de Peddelaar' voor een gewone fiets die je vijf weken huurt? Wat kost het als je de fiets zeven weken huurt?*

c. *Voor elke week langer huren betaal je hetzelfde bedrag extra. Hoe groot is dat bedrag?*

d. *Wat is het vaste bedrag dat je altijd moet betalen?*

e. *Welke ketting van machientjes hoort bij de grafiek?*



f. *Welke formule hoort hier bij?*
– is het aantal weken;
– h is de huurprijs.

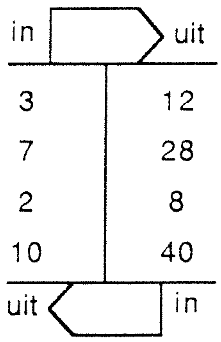
In de context is een vast- en een variabel deel te onderscheiden. Door de berekeningen krijgen die delen vorm in de getallen. De grafiek geeft hierbij de informatie en is een ondersteuning in de controle van de berekeningen.

Rekenstappen verwoorden

Bij de stroken met getallen vertellen de leerlingen eerst met woorden welke rekenstappen van strook naar strook worden gemaakt. Vervolgens vertalen ze dat naar machientjes.

Er is een machientje, waar je de getallen van strook A in kunt voeren. Het berekent dan de naastliggende getallen van strook B. Kijk maar naar de tabel.

a. *Welke berekening maakt dat machientje? Vul dat in bij de tabel.*



Welke berekening maakt het machientje dat terug rekent van strook B naar strook A?

En tenslotte naar formules.

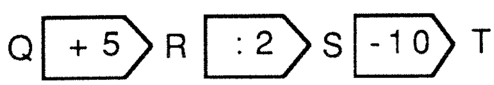
Hoe reken je van . . . naar . . .	A	B	C
A	....	A x 4	A : 2
B	B	....	....
C	C	....	....

Voor het invullen van het overzicht van formules laten sommige leerlingen zien dat ze ook echt die machientjes gebruiken: de rekenstappen, waarvoor in de opgaven nog geen machientjes gemaakt zijn, vertalen ze eerst in machientjes ('dat is gemakkelijk joh, dan heb je de formule zó'). Die vormen dus een uitstekend middel om te komen tot formules. Dat geldt ook voor leerlingen die nooit eerder met machientjes in aanraking zijn geweest. Bij de experimenten met de werkbladen kunnen ook die leerlingen er snel moeiteloos mee werken en gebruiken ze machientjes bij het opbouwen van formules.

Onderweg hebben de leerlingen een overgang gemaakt in het rekenen. Gaat het bij opgave 5 om rekenen met getallen afzonderlijk, zodra ze machientjes gebruiken om de formules te vinden, rekenen ze met alle getallen op de strook tegelijk. Die berekeningen controleren ze aan de hand van willekeurige getallen op de stroken.

Van volgorde naar structuur

De volgorde van de rekenstappen in een machientjesketting ligt voor de hand. Bij formules is dat ingewikkelder. In *Stroken met getallen* worden de overgangen tussen de stroken Q, R, S en T vertaald naar deze machientjesketting:



Leerlingen maken een formule bij de ketting:

$Q + 5 : 2 - 10$.

In de formuletaal, zoals we die in de wiskunde hanteren, betekent dat iets anders dan zij bedoelen.
Dit staat er:

$$Q + 5 : 2 - 10$$

En dit bedoelen ze:

$$Q + 5 : 2 - 10$$

Zodra ze merken dat de rekenmachine niet het gewenste antwoord geeft als de berekeningen achter elkaar uitgevoerd worden, bedenken ze dat er haakjes bij moeten. Een van de leerlingen schrijft dit op:

Q + 5 (: 2) – 10.

Ze moeten nog leren lezen en schrijven in formuletaal. De rekenmachine gebruikt formuletaal en het apparaat voert de bewerkingen alleen achter elkaar uit als je telkens op de =-knop drukt.

Door haakjes te zetten verandert de structuur van de formule. Voor de verkenning door leerlingen van de weg van formule naar uitkomst en van structuren in formules, is lesmateriaal in de maak. Dat zal bestaan uit een deel dat los van de computer gebruikt kan worden en een deel waarbij met het computerprogramma RM [3] wordt gewerkt. Docenten kunnen dan kiezen voor één van beide uitwerkingen.

RM is een rekenmachine, die een som gewoon kan uitrekenen (de tekst in het gearceerde vlak is ingetypt):

```
Tik som in:    3 * 7 - 5 * 2
                                    11
```

Maar ze kan ook laten zien hoe ze rekent:

```
Tik som in:

<<<< DOEVOOR    AAN-gezet   >>>>

Tik som in:       3 * 7 - 5 * 2

---------------------------------------
.  .  .  .   3 * 7            = 21
.  .  .  .   5 * 2            = 10
.  .  .  .   21 - 10          = 11
---------------------------------------
                               11
```

Leerlingen kunnen met dit programma oefenen in volgorde van bewerkingen. Dat is nodig, want we willen van 'volgorde van bewerking' naar 'structuur'. Een plaatje illustreert de overgang:

$$7 * 8 - 9 * 6$$

Een opgave voor leerlingen is dan: voeg kringen toe bij deze sommen:

$31 * 125 - 124 * 3$

$15 - 14 * 13 + 12$

De kringen geven, van binnen naar buiten toe, steeds grotere samenhangende delen van de 'formule' te zien. Zo wordt de structuur zichtbaar. Die structuur maakt niet alleen duidelijk in welke volgorde de rekenstappen worden gemaakt, maar kan ook steun zijn bij het veranderen van formules. Daarover komt straks meer.

Rekenstappen in de algebralijn

In de eerste klas krijgt het vinden en verwoorden van rekenstappen met behulp van machientjes, speciale aandacht. De vertaling naar formules met één variabele, beperkt zich in eerste instantie tot één of twee rekenacties. De machientjes (kettingen) en de bijbehorende formules zullen leerlingen ook in hogere klassen goed kunnen gebruiken bij het oplossen van problemen in situaties.

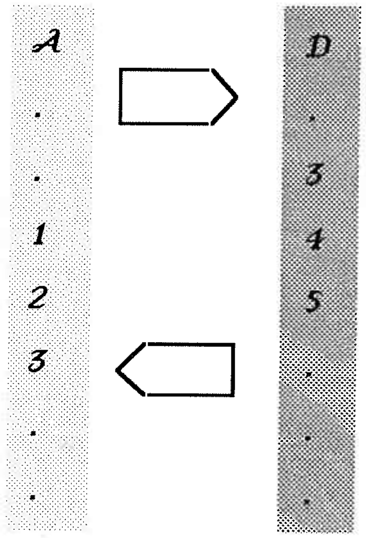
De overgang van volgorde naar structuur in rekensommen zonder variabelen, begint in de eerste klas. Bij die overgang vervaagt het denken in rekenstappen en voorrangsregels, en ontstaat het denken in samenhangende delen van formules. In de tweede klas worden daarbij ook expressies met één variabele betrokken. In de derde- en vierde klas kunnen leerlingen gebruik maken van de structuur bij het substitueren van variabelen of getallen in delen van de formule. Dan is er ook aandacht voor het analyseren van meer ingewikkelde formules op structuur en op rekenacties.

Redeneren met formules

Formules gebruik je bij het bestuderen van verbanden. Ook tabellen, grafieken en de context spelen daarbij een rol. Het reserveren met formules zal in eerste instantie in nauwe samenhang met de context plaatsvinden. In een later stadium zullen grafieken en tabellen bij die redenering betrokken worden.
Over het redeneren vanuit tabellen en vanuit de context vertellen we iets meer. Daarnaast kunnen de elementen waaruit een formule is opgebouwd, steun zijn in het redeneren met formules. Enerzijds zijn dat de rekenstappen, uitgebeeld door machientjes, anderszijds is dat de structuur van de formule. Redeneren met formules kan

dus ook vanuit machientjes en vanuit structuren. Ook daarover vertellen we meer in het vervolg van deze paragraaf.

Tabellen
De grootte van de stappen op strook *A* is 1 en door te vermenigvuldigen met 4 worden die stappen (op strook *B*) vier keer zo groot. In de formule vind je het getal 4 terug als vermenigvuldigingsfactor. Ook een verschuiving van getallen op een strook vind je terug, namelijk als optelling of aftrekking. Omgekeerd is een vermenigvuldiging of een deling in een formule een indicatie van verandering in stapgrootte. En een optelling in een formule verandert niet de stapgrootte, maar doet de getallen opschuiven, zoals in opgave 11 uit *Stroken met getallen.*



11 a Op strook D staan dezelfde getallen als op strook A, maar ze zijn iets verschoven.
Welke getallen staan onder de puntjes?
b Naast 365 op strook A, staat een getal op strook D. Welk getal is dat? Hoe kom je daaraan?

Door allerlei activiteiten komen leerlingen tot dergelijke redeneringen. Op den duur komen de redeneringen los te staan van de stroken en kunnen leerlingen die toepassen in diverse situaties. Zoals bij de thermometer met zijn dubbele schaalverdeling, of in tabellen.

De opgaven uit *Stroken met getallen* zijn bedoeld voor de eerste klas. Dat betekent niet dat iedere brugklasser bovenstaande redeneringen terstond op touw moet kunnen zetten. Het is wel de bedoeling dat ze aan het eind, in klas 3/4, kunnen redeneren in termen van stapgrootte en verschuiving, om te komen tot een formule voor een lineair verband.

Context
Soms kun je uit overeenkomstige structuur in formules conclusies binnen de ene context afleiden uit de andere context. Het volgende voorbeeld komt uit het pakket *Trappers.* Daarin onderzoeken leerlingen het verband tussen het aantal keren dat de trappers van hun fiets rond gaan en de afstand die ze dan afleggen. In het pakket worden regelmatig personen ten tonele gevoerd die allerlei uitspraken doen over hun uitkomsten. Zo heeft Corine als formule voor haar fiets gevonden *afstand : 3,7 = traptal*. De daarop volgende opdrachten gaan uitgebreid in op de verschillende constanten voor verschillende fietsen en de gelijkwaardigheid van formules. Corine kan voor haar fiets net zo goed de formule *afstand = 3,7 × traptal* gebruiken. Verderop in het pakket raken Corine en Arjen in gesprek. Ze vragen zich af of een redenering die binnen de fietscontext evident is, ook opgaat voor de cirkel waarvan de omtreksformule is gegeven:

omtrek = π × *diameter*.

>>Hoe zal Corine haar uitspraak controleren? Voert ze die controle uit? Heeft ze gelijk?

Het herkennen van de overeenkomsten in de vorm van de formules is hierbij essentiëel. Daarvoor moeten leerlingen niet alleen afstand kunnen nemen van de contexten waarin die parallel niet terug te vinden is, maar ook van formules zelf.

Machientjes
Tabellen werken goed om vanuit de structuur in verticale richting te komen tot de structuur in horizontale richting, zoals eerder in deze paragraaf is beschreven. Machientjes (één of meer) zijn een uitstekend middel om zicht te krijgen op de horizontale samenhang. Zo zijn machientjes niet alleen een steun in het maken van formules, maar ook in het redeneren met formules. De machientjes die heen en terug rekenen tussen twee stroken, zijn sterk aan elkaar gekoppeld. Daarmee ontstaat ook een koppeling tussen de formules $A \times 4$ en $B : 4$ (zie het schema met formules uit *Stroken met getallen*). In het schema wordt dat visueel ondersteund door de diagonale ligging van de formules. Formules kunnen dus bij elkaar horen doordat ze dezelfde verbinding maken, alhoewel ze in tegengestelde richting rekenen. Dit besef komt leerlingen goed van pas als ze later vlot bepaalde omvormingen moeten kunnen maken. We denken daarbij aan

bijvoorbeeld:
$A \times 3 = B \Leftrightarrow B : 3 = A$ of $C + 23 = D \Leftrightarrow D - 23 = C$
Het is wel belangrijk dat de omvormingen steeds controleerbaar blijven (bijvoorbeeld door de vertaling naar machientjes).

Structuren in formules

In het pakket *Winnende Formules* komt de volgende opgave voor:

a. Welke kleur wint op den duur deze formules?
zwart: $40 * r * r$
wit: $\frac{1}{2} * r * r * r$
b. Bij welke rangnummers is de verliezer groter?

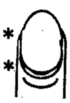
In het begin werkt de eerder geïntroduceerde context van de blokkenbouwsels als ondersteuning voor redeneringen rond de vraag over wie wint, maar op den duur kijken leerlingen meer naar de structuur van de formules. Dat blijkt uit dit fragment uit een lesverslag:

Volgens mij zijn ze gelijk als r gelijk is aan 80.
Kijk maar, dit stuk is steeds hetzelfde:

$* r * r$
$* r * r$

En als je hier 80 invult, komt er hetzelfde uit.

$40 *$
$\frac{1}{2} * r *$



In het voorgaande hebben de leerlingen al bedacht dat als je r kleiner maakt, $\frac{1}{2} * r$ ook kleiner wordt, en omgekeerd, als r groter wordt, $\frac{1}{2} * r$ ook groter wordt.

Redeneren in de algebralijn

Zodra leerlingen de eerste formules hebben gemaakt, redeneren ze ermee. Terugkijkend naar het maken van het schema met formules in *Stroken met getallen*, verbinden ze formules met elkaar via de machientjes die heen en terug rekenen. In de eerste klas zijn de redeneringen sterk verbonden met de berekeningen op basis waarvan de formules zijn gemaakt. In de tweede klas komen formules in hun rol van beschrijvers van verbanden sterker naar voren en zijn de redeneringen meer gekoppeld met de situaties. Tabellen, grafieken en de context zijn dan betrokken bij de redeneringen. In de derde en de vierde klas zullen steeds meer redeneringen gebaseerd worden op de structuur van de formule. Op dat moment hanteren leerlingen de formules in hun rol van object. Echter, de link naar de andere representaties en naar de berekeningen waaruit de formules zijn opgebouwd, blijft bestaan. Ze kunnen daarmee formules ook aanspreken op hun rol als voorschrift voor een berekening (bij machientjes en tabellen) of als beschrijver van een verband tussen variabelen (gerepresenteerd door grafieken).

Veranderen in formules

Waarom zou je formules willen veranderen? Er zijn heel wat redenen te verzinnen. We noemen de belangrijkste redenen op:

- de formule heeft onhandig lange namen, dat is zoveel schrijfwerk en je herkent de structuur van de formule dan niet zo gauw;
- de formule zelf is onhandelbaar lang waardoor je de berekening moeilijker onthoudt;
- de formule rekent andersom; je hebt eigenlijk de inverse formule nodig;
- een andere formule van hetzelfde verband past beter bij het probleem dat je moet oplossen;
- je wilt twee formules met elkaar vergelijken en je ziet meer als je één van de twee, of allebei, anders opschrijft;
- je wilt de formule aanpassen, omdat de situatie verandert;
- je wilt van twee formules één maken;
- de structuur van de formule wil je helder maken, zodat je de formule in delen kunt gebruiken.

Wat moet je dan allemaal kunnen? We geven enkele voorbeelden.

Namen veranderen

Zolang leerlingen bezig zijn met het construeren van formules, hebben ze de vrijheid om hun eigen namen te kiezen voor de variabelen. Op die manier houden ze contact met de betekenis van de variabelen in de context. Bij de blokkenbouwsels in *Winnende Formules* bijvoorbeeld, geven veel leerlingen als formule voor de witte blokken: *lengte * breedte * hoogte*. In de loop van de tijd wordt dat: *rangnummer * rangnummer * rangnummer*, maar in hun rederingen is het ene rangnummer het andere niet: het eerste rangnummer blijft de lengte, enzovoort. Na enige tijd reduceert rangnummer tot r en uiteindelijk kunnen ze redeneren met formules met andere letters die niet meer in verband te brengen zijn met de blokkenbouwsels. Voor dit proces van naamsverandering en -verkorting hebben leerlingen telkens weer tijd nodig. In het algebraprogramma is ruimte voor het betekenis geven aan letters in formules.

Bij het veranderen van namen blijft de structuur van de formule onveranderd. Dat is niet het geval in de volgende voorbeelden.

Variaties op een formule

Een verband kun je beschrijven met een formule. Maar soms is een variant op de formule beter te gebruiken voor je probleem. Hoe kom je tot die variant als machientjes en tabellen niet te gebruiken zijn? De context zelf kan helpen in het zoeken naar varianten zoals in *Trappers*. Het getal 3,7 in de formule van Corines fiets functioneert in de context als parameter, de constante factor, die gebonden is aan de fiets (dat er niet direct rekening gehouden wordt met fietsen met versnellingen is voor de leerlingen geen probleem: ze kiezen gewoon een bepaalde versnelling). Door *afstand* te delen door *traptal* berekenen leerlingen die factor voor de fiets van Jaap, die langs de stoeprand fietst en trottoirbanden telt: *Hij wil weten hoe ver hij komt per trapperronde. Als zijn* *rechtertrapper twee keer rond is gegaan, is hij zeven trottoirbanden verder. Een trottoirband is een meter lang.*

a. Hoeveel meter legt Jaap af per trapperronde?

b. Hij fietst 18 trapperrondes. Hoeveel meter is hij verder gekomen?

Sommige leerlingen komen al snel tot een algemene formule voor hun fiets: *afstand = traptal × fietsgetal*. Binnen de context van het fietsen ligt de omvorming van die formule voor de hand:

fietsgetal = afstand : traptal
traptal = afstand : fietsgetal

De gelijkwaardigheid van deze formules is door de context gemakkelijk te verifiëren. De formules zijn alle drie goede beschrijvingen van het verband tussen afstand, fietsgetal en traptal.

Een ander voorbeeld komt uit de wereld van de blokkenbouwsels. De bouwsels bestaan uit witte en zwarte blokken waarvan de aantallen een eenvoudige samenhang vertonen, te vertalen in drie gelijkwaardige formules:

totaal = zwart + wit
zwart = totaal – wit
wit = totaal – zwart

Ook binnen deze context is de equivalentie vanzelfsprekend.

Bovenstaande voorbeelden zijn vormen van de basisformules A = B + C en D = E × F en hun equivalenties. In feite is er sprake van een verband tussen drie variabelen, die afhankelijk of onafhankelijk zijn naar gelang de gehanteerde formule. Het is niet de bedoeling dat leerlingen op het C/D-niveau zonder meer de andere vormen vanuit de formules zelf kunnen afleiden. Een context die de omvormingen ondersteunt, blijft een rol spelen.

Splitsen en samennemen

Het getal 8 kun je schrijven als produkt van 2 en 4. Dit opsplitsen in twee factoren kun je ook met formules doen. Bij het vergelijken van formules kan dat handig zijn, zoals in het voorbeeld van de opgave uit *Winnende formules* waarin leerlingen $\frac{1}{2} * r * r * r$ splitsen in $\frac{1}{2} * r$ en $r * r$.

Veranderen in de algebralijn

Al bij de introductie van formules kunnen leerlingen naar hartelust de namen veranderen. Daarmee worden de namen die aan de variabelen gegeven worden, gerelativeerd. Dat is belangrijk, juist in de beginfase van het leren omgaan met formules, maar ook bij de introductie van iedere nieuwe situatie.

In klas 2 wordt het veranderen van formules onderbouwd door de voorstelling van de verandering in de situatie, zoals in *Trappers*. Het accent op het veranderen van formules ligt in klas 3/4.

In de eerste paragraaf beschreven we activiteiten waarmee leerlingen ervaringen opdoen in het zoeken naar structuur in formules. Eén van de activiteiten is kringen zetten in een rekensom. Dat kan ook met formules en dat gebeurt ook in klas 3/4. In het veranderen van formules op basis van de structuur in de situatie of in de formule, bereiken we de grens van het C/D-niveau.

Slot

Mensen maken formules. Daarmee doelen we op twee aspecten: mensen construeren zelf de formules en mensen ontwikkelen formuletaal. In dit artikel hebben we geprobeerd duidelijk te maken hoe leerlingen formules kunnen construeren en hoe wij denken dat ze dit kunnen leren.

Formules construeren kan vanuit het rekenen of vanuit de structuur in de context. Vaak zal het een mengeling zijn, maar voor de duidelijkheid maken we die scheiding.

Om goede redeneringen rond formules te kunnen opbouwen heb je een scala aan voorstellingen nodig die betekenis geven aan de formules. Die voorstellingen zijn tabellen, grafieken en de context zelf, maar ook de rekenstappen waaruit de formules zijn opgebouwd en de structuren die te herkennen zijn in de formules. Ze vormen een steun in het redeneren met formules en vaak ook vertrekpunt van waaruit de redeneringen ontstaan. Hoezeer leerlingen die steun nodig hebben merken we tijdens experimenten zoals die met *Winnende Formules* en het vervolgpakket *Dubbel op*, waarbij ze pas echt vertrouwen op hun uitkomsten, als ze zien dat zowel de tabellen als de grafieken voldoen aan hun verwachtingen.

In de opbouw van ons algebraprogramma houden we er rekening mee dat het herkennen van structuren in formules een basis heeft in het rekenen. In de eerste paragraaf beschreven we hoe leerlingen kunnen komen van volgorde in rekensommen en formules, naar structuur in rekensommen en formules. Op zichzelf vereist het herkennen van structuur een hoog abstractieniveau. Leerlingen in het vwo zullen dan ook meer doen met structuren in formules dan leerlingen in het lbo.

Noten

[1] De Algebragroep bestaat uit: A.J. Goddijn, K. Gravemeijer, J. ten Hove, M. Riemersma en P. van der Zwaart.

[2] *En de variabelen, hoe staat het daarmee?* Algebragroep W12-16; Nieuwe Wiskrant, jrg. 10, nr. 2, september 1990.

[3] RM is een programma uit het *Alcor*-pakket. Tot dat pakket behoort ook *Tabel*, waarmee tabellen en bijbehorende grafieken kunnen worden gemaakt.