Algebra

Algebragroep W12-16 [1]
OW&OC, RU Utrecht/SLO, Enschede

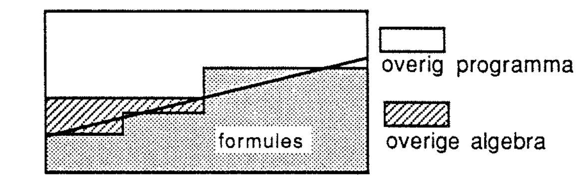
Inleiding

Om een beeld te krijgen van de diverse veranderingen in het algebraprogramma maken we eerst een vergelijking tussen de tijd die in het huidige programma voor algebra is ingeruimd en de beschikbare tijd in het W12-16 programma. Daarbij kijken we naar onderwerpen als: getalsregelmatigheden, grafieken, formules en vergelijkingen.
Een vergelijking tussen de beschrijving van het D-traject in W12-16 [2] en enkele moderne methoden levert het volgende beeld:

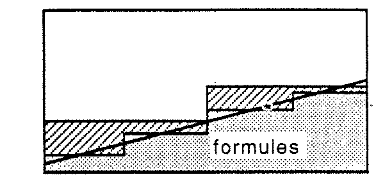
Tijd besteed aan algebra

	Moderne methoden	*W12-16*
klas 1	50%	33% (40 van de 120 uur)
klas 2	50%	33% (30 van de 90 uur)
klas 3/4	60%(lespraktijk ca 75%)	50% (65 van de 130 uur)

De hoeveelheid tijd die W12-16 reserveert voor algebra, is dus minder dan de bestede tijd in het huidige programma.
Dat geldt ook voor de hoeveelheid tijd die W12-16 aan formules en vergelijkingen toebedeelt. Ter illustratie vergelijken we het aandeel van formules en vergelijkingen in de methode *Moderne Wiskunde* en in het D-traject van W12-16 met elkaar:



Moderne Wiskunde MHV



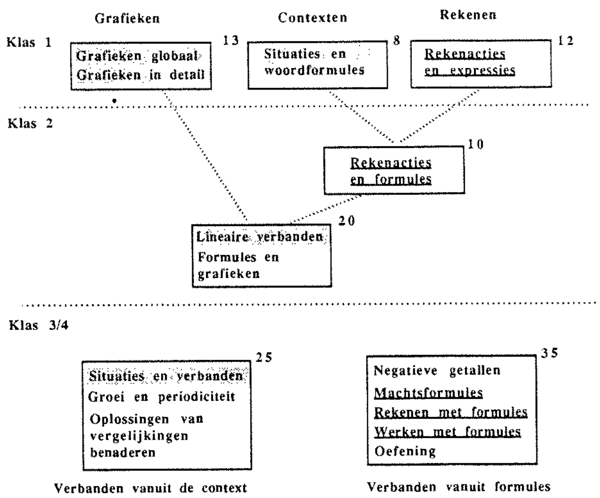
W12-16 D-traject

Globaal gezien groeit het aandeel van formules in beide programma's even snel. De rechte lijnen in het plaatje, die in beide situaties even steil lopen, accentueren dit. De totale aan formules bestede tijd in W12-16 is echter kleiner.
De vermindering van de totale tijd voor algebra is een gevolg van de keuze voor rekenen, informatieverwerking en statistiek en voor GWA (Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten).
De verminderde aandacht voor formules en vergelijkingen is een gevolg van de keuze voor een brede bestudering van verbanden. Die breedheid bestaat uit het redeneren over verbanden met behulp van de situatie, tabel, grafiek, berekeningen en formules. Verder is er in W12-16 veel aandacht voor het omwerken van de ene representatie van een verband naar de andere.
Deze breedheid geeft goede mogelijkheden om aan te sluiten bij andere delen van het programma, bijvoorbeeld bij het rekenen en met name bij procenten en verhoudingen.

Overzicht van de algebra in het D-traject

Leerlingen bouwen het kennisnetwerk rond verbanden op vanuit drie gebieden: grafieken, contexten en rekenen.
Met de opgebouwde kennis en vaardigheden gaat het programma in klas 3/4 verder. Daarbij onderscheiden we twee grote onderwerpen:
- Verbanden vanuit de context.
- Verbanden vanuit formules.

Het schema op de volgende pagina brengt dit in beeld. De titels in de vakjes verwijzen naar de leerstofbeschrijving in het D-traject en de getallen geven globaal het aantal beschikbare lesuren aan.
De gestippelde onderwerpen uit het schema zijn in de jaren 80 ontwikkeld door de SLO. Voor verdere informatie over dit deel van het programma kunt u terecht in de diverse publikaties rond de functielijn en de bijbehorende materialen [3].
Het accent in ons ontwikkelwerk ligt vooral aan de kant van het rekenen en formules. De onderstreepte onderwerpen uit het schema krijgen in de loop van het project



steeds meer hun definitieve vorm. Voor de overige onderwerpen zullen we verwijzen naar voorbeeldlesmateriaal.

In het artikel *Formules maken en gebruiken* (elders in deze Nieuwe Wiskrant) staat een en ander beschreven over de opbouw vanuit rekenacties naar het werken met formules. Dat artikel geeft een kijkje in de keuken van het ontwikkelwerk binnen de algebra en van het onderwijs dat ons daarbij voor ogen staat.

Voor wij iets vertellen over de andere trajecten, stippen wij een onderwerp uit het ontwikkelwerk aan. Daarmee kan ik een aantal verschillen tussen de trajecten duidelijk maken.

Intermezzo: driemaal dezelfde formule

Eén van de belangrijke resultaten van het ontwikkelwerk is het onderscheid in de diverse rollen waarin formules optreden. Met als eerste rol: de formule als beschrijver van steeds dezelfde berekening; als tweede: de formule als beschrijver van het verband tussen variabelen; en als derde rol: de formule als een op zichzelf staand object.

In een leerboek over vaktheorie metaaltechniek voor de derde klas lbo [4] staat een verhaal over het begrip snijsnelheid bij metaaldraaien. De beitel zit vast aan een draaibank en het werkstuk draait om zijn lengteas. Het ingestelde toerental bepaalt de draaisnelheid van het werkstuk.

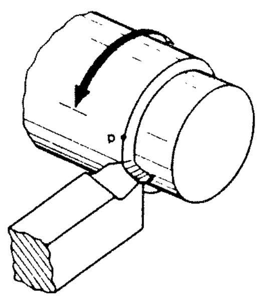
Snijsnelheid

Bij het metaaldraaien maakt het werkstuk een ronddraaiende beweging, meestal naar je toe.

Kijk eens naar de figuur hieronder. Aan de omtrek van het werkstuk is een merkteken p aangebracht. Hoe sneller je het werkstuk laat draaien, des te vaker per minuut passeert het merkteken de beitelpunt: de omtreksnelheid neemt toe. Onthoud nu het volgende:

> *Bij het draaien is de omtreksnelheid van het werkstuk de snijsnelheid.*

Er zijn nog meer factoren, maar het zal je intussen wel



Omtreksnelheid = snijsnelheid

duidelijk zijn dat het moeilijk is een vast getal op te geven voor de snijsnelheid. Door het nemen van proeven met verschillende snijgereedschappen heeft men voor vele metalen de gunstigste snijsnelheid bepaald en in tabellen vastgelegd.

In een draaitabel vind je meestal wel de gewenste snijsnelheid voor diverse materialen en ook het toerental voor een bepaalde werkstukdiameter. Op de draaibank moet je dan het toerental – dat is het aantal omwentelingen per minuut van de hoofdspil – instellen, en daarmee van het hierop bevestigde werkstuk.

Als in de tabel de snijsnelheid niet voor ons is omgerekend in het in te stellen toerental, dan kunnen we dit zelf berekenen met de volgende formule:

$$v = \frac{3{,}14 \times d \times n}{1000}$$

v = snijsnelheid in m/min;
d = diameter werkstuk in mm;
n = aantal omw/min dat het werkstuk moet maken.

Naast de tekening staat een formule. Wat voor activiteiten doen de leerlingen met deze formule?

>>*Bereken met de formule $v = \frac{\pi \times d \times n}{1000}$ de snijsnelheid (= omtreksnelheid) in m/s van een stiftsteen die een diameter heeft van d = 35 mm en waarvan het toerental n = 24000/min bedraagt; $\pi = 3\frac{1}{7}$.*

De leerlingen vullen voor d en n (en π) bepaalde waarden in. Daarna rekenen zij de bijbehorende waarde van v uit.

Dit is de eerste rol waarin een formule kan optreden: die van voorschrift voor een berekening. Zo'n voorschrift is vaak van te voren gegeven, zoals in het leerboek. Het voorschrift kan ook ontstaan als samenvatting in formuletaal van berekeningen.

Dezelfde formule kun je ook op een andere manier gebruiken. De gewenste snijsnelheid is afhankelijk van het materiaal waarvan het werkstuk wordt gemaakt, dat kun je niet aan de formule zien. Aan de formule kun je wel zien dat, als je het toerental opvoert, de snijsnelheid ook groter wordt. En als je een werkstuk hebt dat twee keer zo dik is als het vorige, dan moet je het toerental halve-

ren om toch dezelfde snijsnelheid te krijgen. De formule laat dus zien wat het verband is tussen snijsnelheid, diameter en toerental.
Hier treedt de formule op in haar tweede rol, namelijk als beschrijver van een verband.
Tenslotte kun je afstand nemen van de berekeningen die de formule voorschrijft. In het leerboek staat dat de formule te gebruiken is voor het berekenen van het toerental. Maar om dat te kunnen doen, moet je eerst iets met de formule zelf doen. Bijvoorbeeld dit:

$$\begin{aligned} v &= \frac{3{,}14 \times d \times n}{1000} & \Leftrightarrow \\ 1000 \times v &= 3{,}14 \times d \times n & \Leftrightarrow \\ n &= \frac{1000 \times v}{3{,}14 \times d} \end{aligned}$$

De manipulaties met de formule zelf, doen de berekening die de formule voorschrijft, uit het zicht verdwijnen. En de letters kunnen net zo goed iets anders voorstellen, de formules staan los van de context. Zelfs voor het onderzoek naar consequenties in het geval $v = 0$, is de context niet nodig.
Bij deze herleiding van de formule verschijnt de formule in haar derde rol, die van object.

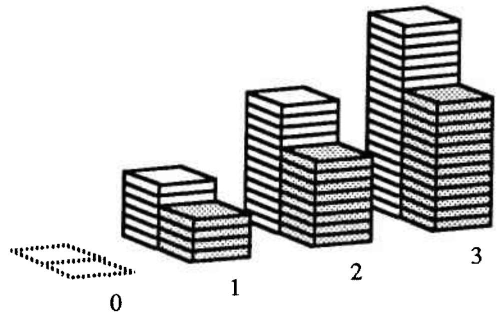
De rollen van formules in de trajecten

Op het toneel van het D-traject verschijnen formules in al hun rollen.
In klas 1 ligt het accent op rol 1: met een formule vertellen hoe je rekent. Verder wordt de overgang van voorschrift voor een berekening (rol 1) naar beschrijving van een verband (rol 2) aangezet.
In klas 2 is er bij het werken met formules nog steeds een sterke band met de berekeningen. De tweede rol komt steeds meer naar voren, vooral de grafiek is een belangrijk hulpmiddel naast de formule als beschrijver van een verband.
In klas 3 wordt toegewerkt naar het gebruik van formules in hun derde rol. Bij redeneren over de structuur van formules blijft de situatie die de formule beschrijft steeds op de achtergrond aanwezig.
Tabel en grafiek leveren mogelijkheden om de redeneringen te controleren. Met de tabel controleer je of de formules rekenen zoals je dat wilt (rol 1) en met de grafiek zie je of het verband tussen de variabelen (rol 2) is zoals je verwacht. (Zie ook het gedeelte over redeneren met formules in *Formules maken en gebruiken.*)
In de loop van klas 3 en in klas 4 komt de formule ook aan de orde zonder dat deze een bepaalde situatie beschrijft. Bij het redeneren over de formule blijft de mogelijkheid bestaan voor controle met behulp van tabel en grafiek.
Deze opbouw levert een fundament waarop leerlingen, die in hun vervolgopleiding wel met formele manipulaties te maken krijgen, prima voort kunnen bouwen.
In het B-traject treedt de formule alleen op in rol 1 en 2, waarbij de nadruk ligt op het gebruiken van de formule als hulpmiddel en als geheugensteun bij het maken van berekeningen.
In het H/V-traject komt de derde rol van de formule sterker naar voren. Een aantal onderwerpen uit de derde klas van het D-traject komen hier al in de tweede klas aan de orde. Verder is het onderscheiden van delen in een formule en daarmee redeneren, een onderdeel van het derde klasprogramma.
Bijvoorbeeld: $(a + 7)(a^2 - 4) = 0$ lezen als $A * B = 0$ en concluderen dat $(a + 7) = 0$ of $(a^2 - 4) = 0$.

Bij degenen die het huidige algebraprogramma kennen, leven diverse vragen over de invulling door W12-16. Op twee van deze vragen gaan we in.

Letterrekenen

Een veel gestelde vraag is: wat wordt er nog aan letterrekenen gedaan?
In het programma worden manipulaties ondersteund door situatie, tabel en grafiek. Zo past in de volgende figuur $4 * a$ bij het stapeltje gespikkelde tegels. De variabele a heeft in de achterliggende situatie een duidelijke betekenis.



Een formule voor het totale aantal tegeltjes is $4 * a + 6 * a$, maar ook $10 * a$. Dat is duidelijk uit de situatie.
Beide formules leveren dezelfde tabel en dezelfde grafiek. Bij deze omzetting speelt dat gegeven nog geen rol, maar bij ingewikkelder manipulaties als '$2a * 3a$ schrijven als $6a^2$' ondervinden leerlingen veel steun van tabel- en grafiekgebruik.
Pas na het ontwikkelen van dit inzicht wordt het rekenen met expressies verder ingeoefend. Op deze manier krijgt binnen W12-16 het rekenen met expressies een uitgebreide inzichtelijke onderbouwing, voordat vaardigheden worden ingeslepen.
De specifieke vaardigheden in het D-traject binnen het rekenen met expressies zijn:

1. $(a + b)(c + d)$ vervangen door $ac + ad + bc + bd$.
2. Samennemen en splitsen op +, –, ×, /, zoals:
   $2x + 3x$ vervangen door $5x$ en omgekeerd;
   $2x \times 3x$ vervangen door $6x^2$ en omgekeerd;
   $x^6 \times x^7$ vervangen door x^{13} en omgekeerd;
   ax/bx vervangen door a/b en omgekeerd.
3. Met en zonder haakjes schrijven, zoals:
   $2(t + 4)$ vervangen door $2t + 8$ en omgekeerd.

Vergelijkingen

In de discussies over het algebraprogramma horen wij vaak de vraag waar de vergelijkingen zijn gebleven. Het woord vergelijkingen gebruiken wij inderdaad ook zelden. Betekent dit, dat de vergelijkingen uit het programma worden geschrapt?
Deels wel: De begrippen vergelijking van een cirkel, of vergelijking van een rechte lijn zult u niet meer tegenkomen. De vermindering van het aantal uren voor de algebra heeft geleid tot de keuze om deze stukjes analytische meetkunde uit het oude programma niet meer op te nemen.

Vergelijkingen komen echter zeer vaak voor in een andere betekenis, namelijk als vraag over één of meer verbanden:
- bij een gegeven formule: bepaal de invoerwaarden bij gegeven uitvoerwaarden;
- bij twee gegeven formules: bepaal bij welke invoerwaarde de uitvoerwaarden gelijk zijn.

Deze vragen worden in het W12-16 programma regelmatig gesteld [5].

Bijvoorbeeld:
- De formule voor de afstand, die Corine fietst is: *traptal* × *3,7*.
  Corine heeft 500 meter gefietst. Hoe vaak zijn haar trappers rondgegaan? Gebruik de bovenstaande formule. (Niet: los die formule op!)

of:
- Welke formule wint op den duur en wanneer wordt ingehaald?
  $3 * r^2$
  $r^2 + 50$

Verschillende technieken

In het W12-16 programma hanteren we diverse technieken om de genoemde vragen te beantwoorden:
- redeneren binnen de context;
- substitueren en omzetten van basisformules;
- omkeren van machientjesketens;
- structuren van formules vergelijken;
- inklemmen van een lopende variabele (benaderen).

Een voorbeeld van redeneren in de context geeft de leerling die bij het voorbeeld van Corine zegt: 'Keer 3,7. Dus per trapperronde komt Corine 3,7 meter verder, in 500 meter gaan 500 : 3,7 is ongeveer 135 trapperrondes.'
Echter ook kan: *afstand* = *trapperrondes* × 3,7; dus 500 = *trapperrondes* × 3,7; dus *trapperrondes* = 500/3,7. De leerling die zo werkt, substitueert in een basisformule en zet deze in een geschikte vorm.
Omkeren van machientjesketens gebeurt bij de volgende oplossingsmethode:

Van afstand naar trapperronde is deze rekenstap:

trapperrondes $\boxed{\times 3{,}7}\!\!>$ *afstand*

Dus terugrekenen gaat als volgt:

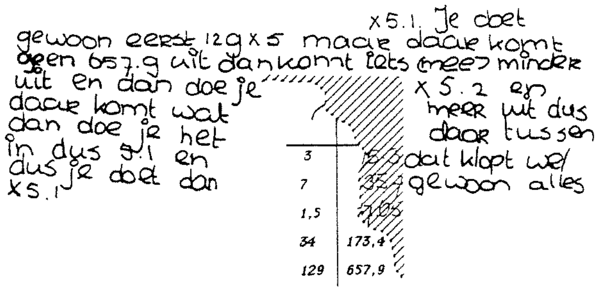
trapperrondes $<\!\!\boxed{/\,3{,}7}$ *afstand*

Het vergelijken van de structuur van formules gebeurt bij het genoemde voorbeeld:

$3 * r^2$	$r^2 + 2 * r^2$	
$r^2 + 50$	$r^2 + 50$	enzovoort.

Deze techniek is in feite gelijkwaardig met de bekende algoritmiek die berust op het weegschaalmodel.
Een elementair voorbeeld van inklemmen vindt u in de volgende opgave:

>>*Wat zou er hebben gestaan? Hoe ben je daarachter gekomen?*



Waarom zijn we zo terughoudend in het gebruik van de term vergelijkingen en de traditionele notatie? De eerste jaren van het voortgezet onderwijs, waarin leerlingen voor het eerst geconfronteerd worden met formules en waarin ze ermee leren omgaan, is het onderscheid tussen vergelijkingen en formules voor hen nog niet duidelijk. De vergelijking is in feite een formele vertaling van de hierboven genoemde vragen, die je in het kader van verbanden kunt stellen. De traditionele notatie is op z'n sterkst bij het oplossen door middel van formeel manipuleren. Deze manier van vergelijkingen oplossen komt echter in het D-traject nauwelijks aan de orde. De genoemde oplossingsmethoden worden meestal gebruikt met de situatie in het achterhoofd en dan zal vertaling naar de traditionele notatie eerder storend werken.
Het onderscheid tussen de verschillende soorten vergelijkingen is nog lastiger. Denk maar aan de vergelijkingen van een cirkel en van een rechte lijn in het platte vlak. De vraag naar het snijpunt van lijn en cirkel leidt tot de constructie van een nieuwe vergelijking, op basis van de gegeven vergelijkingen. In deze alinea heeft het woord vergelijking zelf twee verschillende betekenissen.
In het havo/vwo-traject zullen termen als functie, vergelijking en ongelijkheid echter wel ingevoerd worden. Ook zal daar meer aandacht zijn voor het inoefenen van algoritmische oplossingsmethoden. Hiermee willen we zover gaan, dat een goede aansluiting op het huidige vierde klas-programma realiseerbaar is.

Slot

Het programma-overzicht voor de algebra is klaar en vastgelegd in het *Trajectenboek*. De algebragroep houdt zich nog bezig met het uitwerken van een aantal leerstofonderdelen op leerlingniveau.
De meeste onderwerpen die vorig jaar in ons artikel [6] werden aangestipt, hebben hun plaats gevonden.

Het programma biedt naar onze mening schoolboekauteurs goede mogelijkheden om methoden te ontwerpen, waarbij leerlingen lange tijd werken aan betekenisvolle wiskunde. Dit, zonder de mogelijkheden voor uitbouw naar formele wiskunde uit het oog te verliezen.

Noten

[1] De Algebragroep bestaat uit: A.J. Goddijn; K. Gravemeijer; J.H. ten Hove; M. Riemersma en P.W. van der Zwaart.
[2] *Trajectenboek*, team W12-16, SLO, Enschede 1991.
[3] Krabbendam, H. en J. Speelpenning: *Verbanden, grafieken en functies*, SLO, Enschede 1987.
[4] Heeren, K.J. en ing. A. Heling: *Gereedschapsleer – deel 1*, Educaboek, Culemborg 1981.
[5] Zwaart, P.W. van der: *De weegschaal gewogen en ...*, Nieuwe Wiskrant, jrg. 10, nr. 3, 1991.
[6] *En de variabelen, hoe staat het daarmee?*, Algebragroep W12-16, Nieuwe Wiskrant, jrg. 10, nr. 1, 1990.