

Kunnen kansen? Ja dus!

G. van den Heuvel
SLO, Enschede

In dit artikel een impressie van een les in een tweede klas ibo over kansen en een reflectie op de vraag of 'kans' een haalbaar onderwerp is voor leerlingen van dertien en veertien jaar.

Inleiding

U kunt zich bij de les die we hier bespreken gerust een Twents accent denken. Ze speelde zich namelijk af in de tweede klas van het ibo op het Calscollege in Enschede bij docent Wim Husken. Een gewone ibo-klas, waarin een experimenteel OWI-pakket [1], getiteld *Slim spelen*, wordt uitgetest. Een pakket over kansen, een nuttig onderwerp, dat is zeker, nieuw voor ibo, maar zeker ook weerbarstig. Er zijn veel experimenten geweest daarover in het recente verleden, maar tot nu toe steeds met weinig succes.

Ik geef eerst een indruk van het materiaal, waarna de leservaringen aan bod komen. Vervolgens komt de vraag aan de orde waar het om draait: 'Kunnen kansen?' 'Ja, dus!', zoals we zullen zien.

Het pakket

Het pakket *Slim spelen* is ontwikkeld door OWI, op basis van materiaal dat gemaakt is door IDM [2] in Bielefeld.

Opzet is om, door het werken aan een aantal spelen, de leerling wat feeling te geven voor de zaken die een rol spelen als we over *kans* praten. Dus niet direct een precisering van het empirische of theoretische kansbegrip, maar eerder een verkenning van die begrippen, op basis van intuïties van de leerling.

De leerlingen werken aan een aantal werkbladen, waarin eenvoudige spelen worden gespeeld en geanalyseerd. Met één dobbelsteen, met twee en met een kanstolletje. De spelen kennen steeds keuzemomenten, die door de leerlingen moeten worden beoordeeld: 'Welk vak kun je beter kiezen, dat waarbij je even moet gooien, of dat waarbij je vijf moet gooien'. U ziet er zo meteen een voorbeeld van. Eerst moeten de leerlingen een verantwoorde analyse maken, waarna het spel een aantal keer wordt gespeeld. Daarbij moeten de leerlingen via turven

bijhouden hoe vaak de verschillende mogelijkheden voorkomen in de praktijk. Daarna volgt een bespreking van de verkregen gegevens, uitmondend in een definitief oordeel over de situatie.

Essentiële elementen zijn:

- Er wordt gewerkt in een spelsituatie die ook daadwerkelijk wordt uitgevoerd.
- Het idee, dat je toevalsprocessen van tevoren kunt analyseren, wordt voor de leerlingen duidelijk gemaakt.
- Daarbij blijkt voor de leerlingen gaandeweg, dat een overzicht van mogelijkheden een belangrijk hulpmiddel is.
- Verificatie van een en ander gaat op een andere manier: vaak spelen en kijken hoe het afloopt.
- Dit levert twee gezichtspunten op. Aan de ene kant de constatering, dat sommige alternatieven, bijvoorbeeld 'even gooien', inderdaad vaker voorkomen dan andere, bijvoorbeeld 'vijf gooien'. Aan de andere kant de constatering dat het in de praktijk best zo kan zijn, dat degene die kiest voor vijf in plaats van even, toch een slimmere keus heeft gemaakt. Want toevallig werd er net die keer vijf gegooid.
- Door het hele gebeuren heen, blijven intuïties van de leerling bespreekbaar. Denk aan de opmerking als: 'Ik gooi nooit zes'.
- Expliciete kansberekeningen komen in het pakket niet aan de orde, het accent ligt op een kwalitatieve benadering. Het pakket is een voorbereiding op het berekenen van kansen.

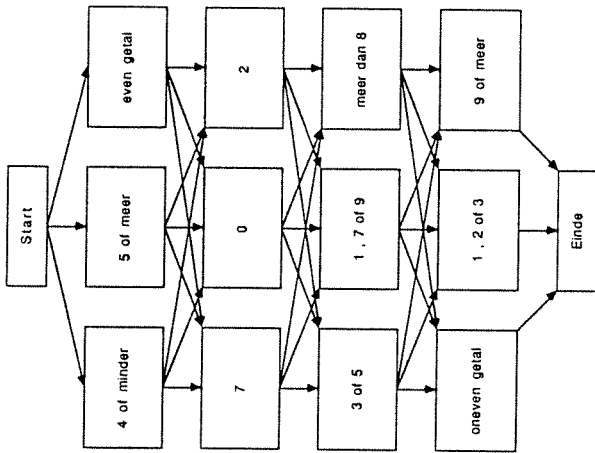
De les

De les, een leuke, viel uiteen in twee delen: een klassikale nabespreking van het werkblad van de vorige keer en een groot deel zelf werken aan een nieuw. Sfeer: de klas geïnteresseerd, zeker toen het geheel in toenemende mate ging leven, de docent die zijn zaakjes goed voor elkaar had en to-the-point wist in te spelen op de onverwachte mogelijkheden die 'ineens' ontstonden. Ik parafraseer in het vervolg enigzins.

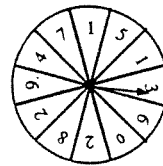
De nabespreking ging over het volgende werkblad *Met een kanstolletje*.

Met een kanstolletje

3



We spelen nu met een kanstolletje, dat wordt gedraaid.



» Wat is de gunstigste weg volgens jou? Waarom?

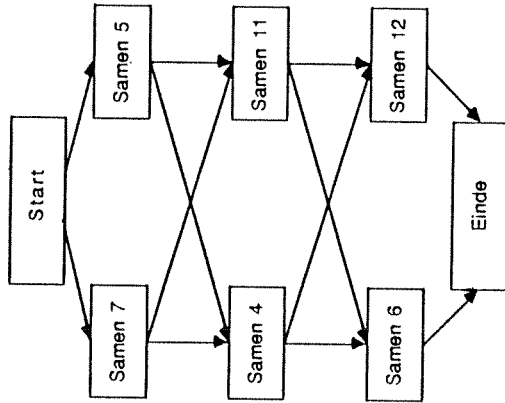
.....

» Maak zelf een tolletje en speel het spel 5 keer.

Met twee dobbelstenen

4

Nu een keer met twee dobbelstenen.



» Wat is de gunstigste weg volgens jou? Waarom?

.....

» Speel het spel een paar keer en kijk of het 'klopt'.

Docent (D): 'Hoe ging het ook alweer met één dobbelsteen, wat had de meeste kansen, een, twee, drie, vier, vijf of zes?'

Leerlingen (L) iets als: 'Allemaal evenveel'.

Waarbij wel even naar voren kwam, dat het ene groepje het vaakst vier had en het ander twee, maar netto waren de kansen wel gelijk.

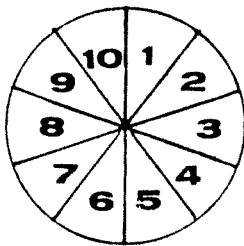
D: 'En hoe zit dat met het kanstolletje, hebben alle cijfers daar evenveel kans?'

L: 'Nee.'

D: 'Waarom dan?'

L: 'Sommige cijfers, bijvoorbeeld de 'twee' komen twee keer voor, en hebben dus meer kans.'

De eigenlijke vraag van het werkblad was niet meer zozeer aan de orde, die was de vorige les al beantwoord. De docent probeert de discussie op een iets hoger peil te brengen, door te reflecteren op het kanstolletje. Er komt een kanstolletje op het bord:

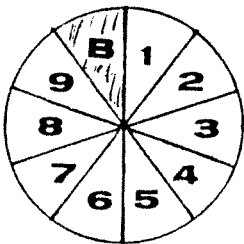


D: 'Stel je voor, je draait tien keer, wat zal dan het vaakst voorkomen?'

Eigenlijk een foute vraag, want bij tien keer draaien kun je over de kansen natuurlijk weinig zeggen, maar het probleem is duidelijk voor de klas. De leerlingen mompelen wat in de richting van 'evenveel kans allemaal', maar ineens is een jongen aan de beurt die iets herkent.

L: 'Dan kun je het beste kijken naar 'Het Rad van Fortuin'.'

Ik, als observator, denk even aan de kermis, maar gaandeweg het verhaal – de jongen komt nu echt op toeren, en de klas volgt hem gretig – blijkt hij iets anders voor ogen te hebben: een spel met een 'Rad van avontuur' tussen meerdere spelers, waarbij stevig geld valt te verdienen, mits er een goed antwoord wordt gegeven op een zekere vraag. Ik, eenvoudige observator, heb duidelijk hiaten in mijn kennis. Het blijkt bij navraag achteraf te gaan om het RTL4-programma 'Rad van Fortuin', dagelijks op de buis rond de klok van zeven uur. De docent was beter ingelicht en speelde prachtig in op de situatie. Hij begon om de 'tien' te veranderen in Bankroet, kortweg B:



De leerlingen zijn heel betrokken. Het blijkt ineens dat de zaak heel wat anders is komen te liggen, als de vraag aan de orde komt:

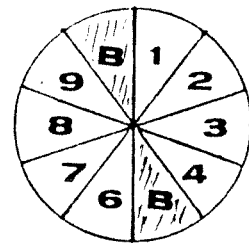
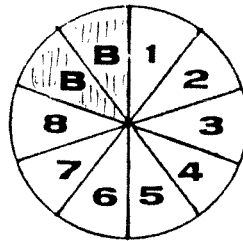
D: 'Wat heeft nu meer kans, Bankroet of 'één'?'

Eerst was alles nog zo'n beetje hetzelfde, maar nu? Is het niet zo, dat je toch wat meer kans hebt op Bankroet?

De meningen raken verdeeld. Eén leerling komt met een verhaal over het echte 'Rad van Fortuin', waarbij er rondom Bankroet allemaal hoge bedragen te verdienen vallen.

L: 'Ja, dan is het nog spannender, òf je hebt niks, òf je wint ineens een heleboel.'

Deze leerling heeft wel verstand van mediatechnieken! De docent buit de situatie uitstekend uit. Hij biedt de volgende situatie aan:



D: 'Bij welk 'Rad van Fortuin' heb je de meeste kans op Bankroet?'

Dit maakt de tongen pas echt goed los. Als de vingers opgestoken moeten worden, blijkt haast iedereen te kiezen. En er zijn er ook die weten waarom.

L: 'Ik kies voor links, want als je bij zeven bent, dan kan die nog wel op Bankroet komen, maar als je daar eenmaal voorbij bent, dan heb je ook prijs'.

L: 'Ik kies voor rechts, want links heb je heel lang kans dat het fout afloopt, maar rechts maar twee keer heel eventjes. Dus rechts.'

Er wordt over een en ander nog wat gebakkeleid en dan ineens krijgt de initiator van het gesprek een ingeving.

L: 'Het maakt niets uit.'

Eerst was hij voor links en nu is hij om. Wat zijn motieven precies zijn, wordt niet duidelijk overigens. Er volgt nog een bespiegeling over het aantal mogelijkheden door de docent, die de klas min of meer volgt, maar we zijn al zo'n kwartiertje bezig – wat kan er toch veel in zo'n tijd, als het meezit! – dus de klas moet aan de slag. We gaan over naar het volgende werkblad. Een prachtige scène ligt achter ons.

De leerlingen moeten aan de slag met het werkblad *Met twee dobbelstenen*.

De docent leidt het werkblad kort in en gaat pionnetjes en dobbelstenen uitdelen. Er is een groot verschil tussen de leerlingen te zien. Sommigen doen nauwelijks een voorspelling over de gunstigste weg en beginnen meteen te spelen, anderen puzzelen allerlei mogelijkheden eerst expliciet uit en gaan pas na lang aarzelen aan het spelen. Ik loop wat rond en registreer. Af en toe stel ik een kri-

tische vraag. De docent volgt dezelfde gedragslijn. En dan zie je een heleboel.

Er zijn leerlingen, die pas gaandeweg het spelen ontdekken, dat de verschillende mogelijkheden verschil uitmaken:

Ik: 'Wat vind je nu gunstiger, samen zes of samen twaalf?'

L: 'Dat maakt toch niks uit, soms gooi je zes, soms gooi je twaalf.'

Ik: 'Waarom?'

Mijn vraag wekt argwaan. Zijn compagnon, de spelletjes worden à deux uitgevoerd, twijfelt, hoewel hij eerst ook zo'n antwoord in gedachten had. Maar de motivering daarvan, ja, dat is lastiger. Als vanzelf komt het gesprek op de mogelijkheden die je hebt, als je met twee dobbelstenen gooit: Zes is 'één en vijf' en 'twee en vier' en 'vier en twee' en 'drie en drie', en twaalf is alleen 'zes en zes'. Dat geeft te denken! Toch maar voor zes kiezen? Ik laat ze achter met die vraag en zie op afstand, dat ze het er wel over eens worden.

Ook komt aan de orde of 'twee en vier' nou echt anders is dan 'vier en twee'. Dit soort gedachten zie je bij veel van de groepjes ontstaan. Er zijn er ook, die eerst iets kiezen als kansrijkste weg, maar die dit tijdens het spelen zelf nog eens heroverwegen.

Zoiets als: 'samen zeven' komt toch wel vaker voor in de praktijk dan 'samen vijf'. Nog eens even nadenken.

Maar voor de meeste groepjes is enige sturing wel op zijn plaats. Op die manier komt de hele groep er langzaam maar zeker toch wel achter, hoe je dit type vragen kunt bekijken.

En er is er inderdaad ook eentje, die weliswaar inziet dat 'samen vier' op meer manieren gerealiseerd kan worden dan 'samen elf', maar die toch voor dat laatste kiest. 'Want ik gooi gewoon vaak zes'. Kan natuurlijk ook! Waarom een staatslot kopen, als je niet het gevoel hebt, dat juist jouw lot, hoe onwaarschijnlijk objectief bezien ook, toevallig nou net dat half miljoen gaat winnen?!

Geen klassikale bespreking aan het eind van de les. De leerlingen zijn vrij lang, maar heel goed bezig geweest, en de kern van het verhaal, het zoeken naar mogelijkheden in een kanssituatie, is overal wel aan de orde gekomen. Volgende les komt de docent er vast op terug.

Kunnen kansen? Ja dus!

Wat steek je nou op, als ontwikkelaar, van zo'n les? Ik som een aantal punten op:

- Allereerst de conclusie, dat het onderwerp Kans haalbaar is onder zekere voorwaarden, ook op ibo. Het intrigeert de leerlingen en daagt ze uit tot redeneren over, op het eerste oog, slechts gevoelsmatig te benaderen zaken.
- De spelvorm, waarbij analyse gekoppeld wordt aan ervaring, en waarbij die ervaring ook wordt geregis-

treerd, is een goede introductie op het onderwerp voor deze groep leerlingen.

- Het is een goede zaak, om ruimte te geven aan de leerlingen om zich te oriënteren op het begrip kans. De aanpak, waarin zowel intuïtieve noties, alsook aanzetten tot empirisch en theoretisch kansbegrip een rol spelen, is een goede.
- Bij de oriëntatie is het van belang, om niet te snel te focussen op een precieze afbakening van het theoretische en/of empirische kansbegrip. De gedachten, dat een analyse van mogelijkheden en/of vaak spelen van het spel meer inzicht geven bij de beoordeling van de kans-vraag, is in eerste instantie ruim voldoende. Precisering van deze gedachten in begrippen is nog veel te vroeg.
- Door in eerste instantie meer kwalitatief over kansen te praten, zonder dat deze gekwantificeerd worden in getallen, is het onderwerp haalbaar voor de leerlingen. Ze krijgen zo de ruimte om zich een beeld te vormen van de aspecten die spelen bij kansvraagstukken, zonder daarbij gestoord te worden door de ruis van de berekeningen.

En wat leren ze dan eigenlijk? Die vraag is niet helemaal afdoende te beantwoorden, op basis van het voorgaande, maar we kunnen er wel enige vermoedens over geven.

- De leerling leert, dat op het oog ongrijpbare zaken, zoals het gooien met dobbelstenen, niet slechts te analyseren vallen vanuit ideeën als 'kun je niets van zeggen', of 'zes gooi je niet zo vaak', maar dat ze ook door hen te analyseren vallen op een meer rationele manier. Dit is voor veel leerlingen verrassend.
- Bij zo'n analyse kan een verkenning van de mogelijkheden die kunnen optreden een belangrijke rol spelen. Zo'n analyse is niet meteen zelfstandig haalbaar voor alle leerlingen, maar wel met behulp van de docent. In situaties als met een dobbelsteen – wij zouden zeggen, in situaties met gelijke kansen voor de diverse alternatieven, maar die terminologie blijft hier buiten schot – is het uitgangspunt dat de mogelijkheid die het vaakst optreedt ook het meeste kans heeft, een acceptabele en logische voor de leerling.
- Een andere mogelijkheid is, om de situatie te verkennen via het vaak spelen van het spel. Daarbij zie je, dat de ene mogelijkheid vaker voorkomt dan de andere. Een soort bewijs van een analyse als hierboven beschreven.
- Deze bewijsvoering kan de leerling voor een groot deel zelfstandig uitvoeren. Hierbij maken we de kanttekening, dat de bijbehorende statistische technieken om de resultaten van de spelsituaties te registreren, aandacht vragen.
- Tegelijk ervaart de leerling, dat de uitkomsten van bovenstaande analyses geen zekerheden zijn. Ook al is de ene mogelijkheid kansrijker dan de andere, toch blijft het heel wel mogelijk dat de minder kansrijke in de werkelijkheid op gaat treden.

En wat betreft de docent in de classesituatie:

- Bij dit onderwerp is de ruimte nodig voor enerzijds meer geleide bespreking van de problematiek, anderzijds zelf experimenteren met het onderwerp. De leerling moet worden uitgedaagd. Dit vraagt tijd, deskundigheid en geduld, maar het is wel nodig, als u niet over de hoofden van de leerlingen heen wilt praten.
- Wees verdacht op ongedachte vragen en intuïties bij de leerling. Voor veel leerlingen zijn de zaken aanmerkelijk minder triviaal dan u misschien zou denken. Bovendien speelt in dit soort zaken allerlei, laat ik maar zeggen bijgeloof, een rol bij veel leerlingen. Het is voor hen een verrassing, dat er ook anderszins over kansen te praten valt.
- Ook hier geldt, dat ervaringen van de leerlingen zelf een belangrijke inspiratiebron zijn, om de leerlingen nader te motiveren. Het voorbeeld van het 'Rad van Fortuin' is een heel fraaie wat dat betreft. Speel daar op in als u de kans krijgt.

Al met al een positieve conclusie over het onderwerp

kans dus, dat natuurlijk nog verder uitgebouwd moet worden. Een voor de hand liggende mogelijkheid is, om de gehanteerde modellen om situaties in kaart te brengen, nader te verkennen.

Daarbij kunnen kansen voorshands kwalitatief blijven worden behandeld. En daarna, ach, laten we niet te ver vooruit lopen: 'Kunnen kansen? Ja dus!'

Literatuur

- [1] OWI: Ontwikkeling Wiskunde IBO: een project van SLO in opdracht van het ministerie, waarin bruikbaar lesmateriaal en een leerplanvoorstel voor IBO wordt gemaakt.
Informatie: Francien Morshuis, SLO, tel. 053-840356.
- [2] IDM is een onderzoeksinstituut van de universiteit in Bielefeld dat, in opdracht van OWI, onderzoek doet naar het leren van wiskunde bij zwakke leerlingen. Daarvoor is onder andere dit materiaal ontwikkeld. OWI zelf heeft dat materiaal bewerkt voor de Nederlandse situatie.

OW&OC Tien jaar

Op 14 september aanstaande wordt het tienjarig bestaan van de vakgroep OW&OC gevierd. We nodigen u uit om hierbij aanwezig te zijn. Op deze dag zal het werk van de vakgroep in enkele plenaire lezingen en een aantal werksessies gepresenteerd worden. Als speciale gast zal Alan Schoenfeld een voordracht houden. Aan het eind van deze dag hopen we de nieuwe naam van de vakgroep bekend te kunnen maken. Tevens zal het eerste exemplaar van Freudenthals laatste boek worden uitgereikt. De dag wordt besloten met een drankje.

Deze feestelijke bijeenkomst vindt plaats in Transitorium I, Universiteitscentrum De Uithof, Utrecht.

De kosten voor deze dag, inclusief koffie/thee, lunch en drankje, bedragen f 25,-.

U kunt zich aanmelden voor 'OW&OC Tien jaar' door middel van (een kopie van) het hiernaast afgedrukte kaartje. U ontvangt te zijner tijd het definitieve programma en een lunchbon.

S.v.p. invullen en opsturen naar vakgroep OW&OC, t.a.v. Mw. A. van der Heiden, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Ondergetekende meldt zich aan voor de dag **OW&OC Tien jaar**:

naam:

instantie:

adres:

telefoon:

en verklaart f 25,- overgemaakt te hebben naar giro 3105662 t.n.v. OW&OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, onder vermelding van **OW&OC Tien jaar**.