De weegschaal gewogen en ....

P. van der Zwaart
W12-16/SLO, Enschede

In zijn proefschrift *Uitleggen van wiskunde* [4] stelt Sieb Kemme:
'Het werken met lineaire vergelijkingen vanuit een context moet een bijdrage kunnen leveren aan de ontwikkeling van formele vaardigheden als wel aan de vaardigheid om een vergelijking te kunnen interpreteren als een formeel-symbolische weergave van een praktische situatie.'
Kemme geeft daarbij aan dat de leerlingen bij het oplossen van vergelijkingen grote steun van het weegschaalmodel ondervinden. Aan die conclusie wil ik niets afdoen. Het gebruik van het weegschaalmodel zit mij echter niet helemaal lekker en in het volgende hoop ik aan te geven wat mij niet lekker zit en waarom. Volgens mij zit de kern in het tweede deel van de uitspraak van Kemme:
'Vergelijkingen zijn een formeel-symbolische weergave van een praktische situatie.'
Om dit uit te werken, duik ik eerst even de geschiedenis in en ik eindig in de moderne electronica.

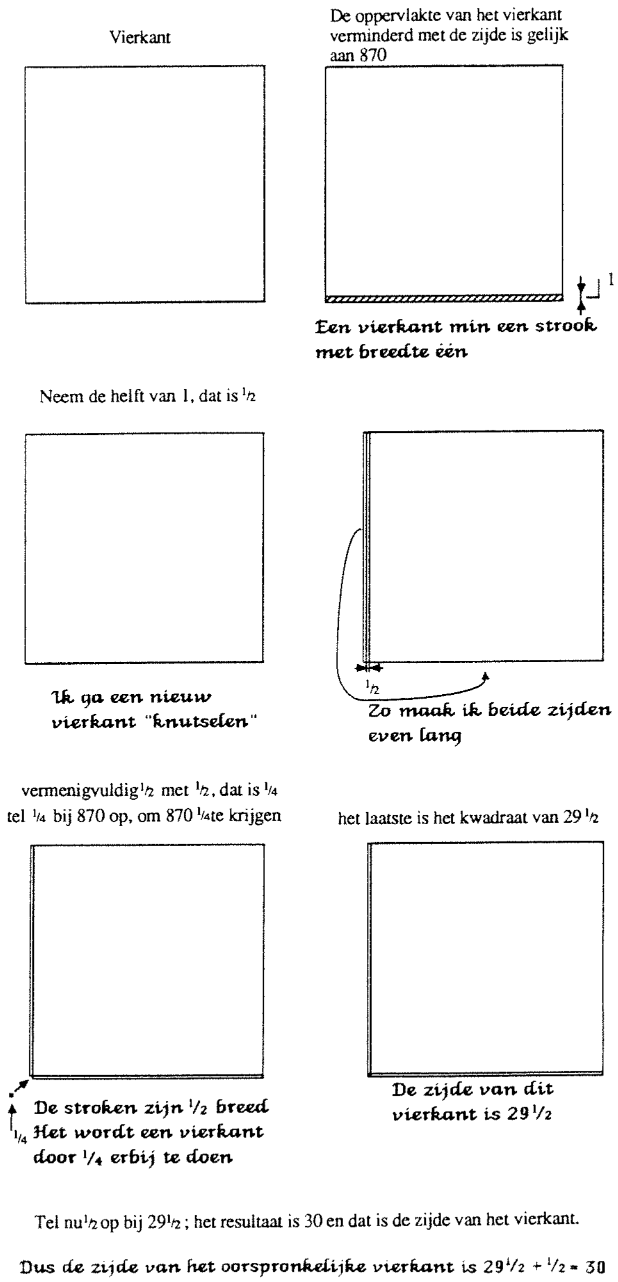
Ik start met een opgave uit de oudheid:
In een oud Babylonisch probleem moet de zijde van een vierkant worden bepaald als bekend is dat de oppervlakte van het vierkant verminderd met de zijde gelijk is aan 870.
De oplossing gaat als volgt:
'Neem de helft van 1, dat is $\frac{1}{2}$, vermenigvuldig $\frac{1}{2}$ met $\frac{1}{2}$, dat is $\frac{1}{4}$, tel $\frac{1}{4}$ op bij 870, om $870\frac{1}{4}$ te krijgen. Het laatste is het kwadraat van $29\frac{1}{2}$.
Tel nu $\frac{1}{2}$ op bij $29\frac{1}{2}$; het resultaat is 30 en dat is de zijde van het vierkant.' [2]
Van enige symboliek is bij het oplossen nog geen sprake. De rij handelingen komt eerder mystiek over. Doe het maar, dan tovert het antwoord zichzelf tevoorschijn.
Ter verduidelijking is de vertaling naar een meetkundig beeld mogelijk (zie hiernaast).

Tegenwoordig is voor wiskundig geschoolden de volgende symbolische weergave vanzelfsprekend:

$$x^2 - x = 870,$$

de oplossingsmethode staat tegenwoordig beter bekend als kwadraat afsplitsen.

Onze symbolische weergave past qua vorm precies op de formulering van het probleem:



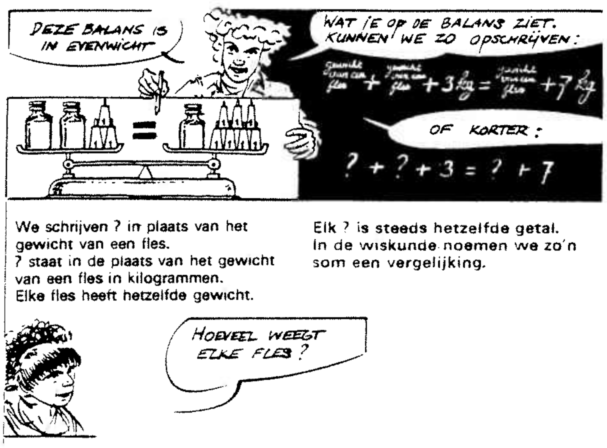
Van *oppervlakte* – *zijde* = *870* naar $x^2 - x = 870$ is niet zo'n grote stap, mits onze schrijfwijze van variabelen bekend is. Wel een grote stap is het plaatsen van oppervlakte en zijde in één berekening.
Francois Viète (1540-1603), een wiskundige die een grote bijdrage leverde aan de ontwikkeling van de symbolische algebra, wenste vergelijkingen, wat betreft de dimensies, homogeen weer te geven. Daarbij gebruikte hij de welbekende + en – tekens, echter het = teken kende hij nog niet. Hij zou:

$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$ schrijven als:

B 5 in A quad – C plano 2 in A + A cub aequatur D solido. [2]

Wat betreft de Babyloniërs veronderstelt Boyer [1] dat het gebruik van inhoud, oppervlakte en lengte in één formule gezien moet worden als een abstracte weergave van de derde, tweede en eerste macht van de variabele. Over de ontwikkeling van de notaties in de algebra zijn nog veel meer interessante zaken op te merken, ik verwijs daarvoor naar de literatuurlijst.

Even terug naar de Babylonische vergelijking. Ik haal dat probleem vooral aan vanwege de rol die de variabele daarin heeft. Met recht kan men hier spreken van een al wel bepaalde, maar nog onbekende grootheid. Het vierkant ligt vast door de gegevens; bepaal de zijde van dat vierkant.
Door de historie heen is het oplossen van vergelijkingen veelvuldig beoefend aan de hand van problemen met een onbekende in een op zich vastliggende situatie. Pas in de 17e eeuw is met Descartes, Newton en Leibnitz de variabele ook echt gaan bewegen.[3]
In veel van de gangbare wiskundemethoden heeft de variabele bij de introductie van vergelijkingen nog steeds de rol van onbekende. *Moderne Wiskunde lm* werkt met 'oplossing', *Wiskundelijn* met '?' (wat gedurende enige hoofdstukken '?' blijft), en *Getal en Ruimte lm* met 'iets' (wat heel snel een *x* wordt). De terminologie duidt er al op dat een nader te bepalen getal wordt opgespoord en dat de gevraagde uitkomsten van te voren al welbepaald zijn. Ook de situaties waaruit de vergelijkingen voortkomen, zijn veelal van het type waarin de variabele de rol van onbekende heeft. Dit gegeven bepaalt mede het goede werken van het weegschaalmodel.



De illustratie laat zien dat *Wiskundelijn* [6] zeer nadrukkelijk werkt met het weegschaalmodel. De leerlingen werken eerst aan een aantal opdrachten met weegschalen, waarna de weegschaal vertaald wordt naar een vergelijking.
Verder bevat de methode een aantal verhaaltjes aan de hand waarvan vergelijkingen zijn te formuleren:

Sanne heeft drie rolletjes drop en een los dropje. Joep heeft één rolletje en negentien losse dropjes. Ze hebben evenveel dropjes.

>>*Geef het aantal dropjes in een rolletje aan met ?.*

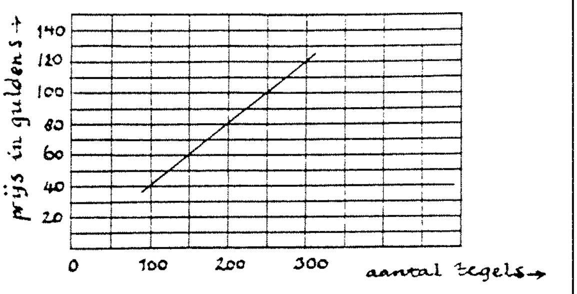
>>*Schrijf de vergelijking op.*

>>*Los de vergelijking op.*
Hoeveel dropjes zitten er in één rolletje?

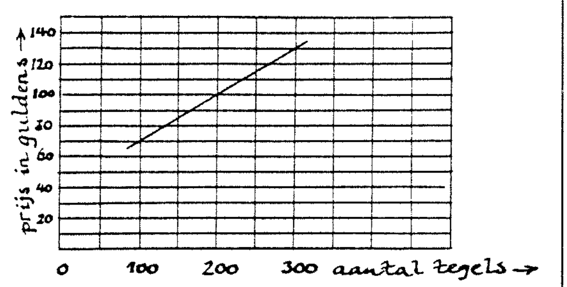
Naar verluidt werkt de weegschaal hier ook goed. Hoe kan het ook anders als het dè praktische situatie is die wordt gesymboliseerd en de andere situaties vrij eenvoudig daarnaar zijn te vertalen. (Leg de dropjes maar op de weegschaal.)
Op zich lijkt er nog steeds niets mis, maar de vraag die bij mij rijst is: moet in het huidige wiskundeonderwijs dit type situaties gesymboliseerd worden? Het is op dit punt dat de balans mij niet lekker zit. Leren wij leerlingen vergelijkingen oplossen om balanssommen of soortgelijke opgaven te kunnen maken? Bij dat type problemen heb je het antwoord nodig om de opdracht te kunnen formuleren. Als ik wil weten hoeveel dropjes in één rol zitten, maak ik een rol open en tel ze gewoon. Als je de rollen niet mag openmaken, dan weet niemand van te voren of de hoeveelheden dropjes van Sanne en Joep gelijk zijn.

Laat ik eens kijken naar een praktische situatie, die vergelijkingen genereert.
In de werkbladen *Bouwhuis/van Tegelen* [7] wordt de leerling gevraagd om een kennis te adviseren bij de aankoop van tegels. (Zie volgende pagina.)

Leerlingen moeten ook zo'n probleem kunnen vertalen naar:
Bouwhuis: *aantal* $*$ *0,40*
van Tegelen: *aantal* $*$ *0,30 + 40*
Als je het aantal tegels steeds groter neemt, bij wie moet je dan op den duur het meest betalen?
Waar haalt de een de ander in?



Deze grafiek laat zien hoeveel je moet betalen voor een bepaald soort tegels als je ze door firma Bouwhuis thuis laat bezorgen, afhankelijk van het aantal tegels dat je koopt.
Hieronder zie je net zo'n grafiek, maar dan die van firma van Tegelen.



Als je de grafieken met elkaar vergelijkt, dan zie je dat ze niet hetzelfde zijn. Dat verschil komt doordat de ene firma géén bezorgkosten laat betalen, maar iets duurder per tegel is, terwijl de andere firma wèl bezorgkosten rekent, maar een lagere tegelprijs in rekening brengt.

Een mogelijke uitwerking is dan:
Bouwhuis wordt per tegel een dubbeltje duurder, dus die zal op den duur die 40 gulden inhalen.
f 0,10 per tegel en dan f 40,– inhalen, dat gebeurt dus na 400 tegels.

Een oplossingsmethode die ver van vergelijkingen en de weegschaal vandaan blijft. Trouwens als er gewogen wordt, wat dan? De tegels of ....?
Het denkmodel is hier in feite de grafiek. Een functioneel model omdat alle aspecten van de probleemstelling erin zijn weer te geven. Verder is het leren tekenen, analyseren en interpreteren van grafieken een van de doelstellingen van het nieuwe examenprogramma. Dit geldt niet voor de weegschaal.

Verder formaliseren levert dit type redeneringen op:
Vanaf welke waarde voor p is $0{,}4 * p$ *groter dan*
$$0{,}3 * p + 40$$
de bovenste formule heeft $0{,}1 * p$ *meer en de onderste formule heeft 40 meer, uit substitutie volgt: vanaf de waarde 400.*

Of nog formeler:
Bepaal het omslagpunt bij $0{,}4 * p$ *en*
$$0{,}3 * p + 40$$

Omvorming van de formules levert op:
$$0{,}3 * p + 0{,}1 * p$$
$$0{,}3 * p + 40$$
(Vergelijk gelijke en niet-gelijke delen in de formules)

Bepaal dus het omslagpunt bij $0{,}1 * p$ *en*
40 (formeel af te leiden)

Substitutie maakt de opdracht af (vul voor p in 400). Bij lastiger waarden dan 0,1 en 40 kan dit een standaardomzetting zijn.

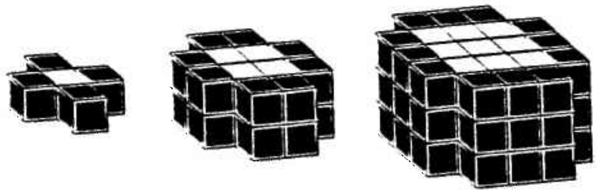
Het is de situatie zelf die wordt geformaliseerd en een model van buiten de situatie, zoals de weegschaal, blijft geheel buiten beeld.

Uit de bovenbouwdelen van de genoemde methoden blijkt dat de vergelijkingen vooral ten dienste staan van het werken met functies en dat de twee belangrijkste typen vraagstellingen die leiden tot vergelijkingen zijn:
- Gegeven een (functioneel) verband; zoek bij een bepaalde output de bijbehorende inputwaarde(n).
- Gegeven twee (functionele) verbanden; bepaal bij welke input de outputwaarden gelijk zijn.

W12-16 [5] ontwikkelt onder andere ook aan de hand van deze twee vraagstellingen, echter ruimer geformuleerd.
Binnen de eerste vraagstelling gaat het dan niet alleen om die ene bepaalde inputwaarde, maar meer om het bepalen van een heel gebied waarbij de uitkomsten niet (of juist wel) boven of onder een bepaalde waarde mogen komen en wat de betekenis daarvan is in de situatie die door het verband wordt beschreven.
In het tweede geval gaat het meestal om vragen als: wanneer haalt de een de ander in, als de variabele een bepaald gebied doorloopt welke heeft dan de gunstigste uitkomst, welke wint op den duur, enzovoorts.
Bij deze vragen speelt het dynamische aspect van variabelen een grote rol, dit in tegenstelling tot vragen rond het weegschaalmodel. Dat dynamische aspect is mijns inziens ten eerste belangrijk, omdat in de wereld om ons heen veel dynamische verbanden te zien zijn. Daarbij valt te denken aan allerlei groeimodellen. In de economie wordt veel gedacht in termen van ontwikkelingen en in diverse technische disciplines bestudeert men ook processen. Dat is één reden om meer aandacht aan lopende variabelen te geven. Een tweede minstens even belangrijk punt is dat het maken van modellen door middel van formules zinvol voor leerlingen is als de variabelen echt bewegen. Om bij Sanne en Joep te zien dat er in twee rollen achttien dropjes moeten zitten, heeft niemand formules nodig. Wil je echter het prijsverloop van het aantal tegels bekijken, of de toename van het aantal

zwarte en witte blokjes vergelijken (zie hierna), dan worden formules zeer handige hulpmiddelen. Ook de samenhang tussen tabel, grafiek en formule is duidelijk aan te geven als de variabele beweegt. Over bewegende variabelen staat ook een en ander in het artikel *En de variabelen, hoe staat het daarmee?* [5]

De techniek van kijken naar gelijke en niet-gelijke delen in een formule wordt in het experimentele pakket *Winnende Formules* [8] ontwikkeld bij het vergelijken van twee machtsverbanden. (Zie [5])
Vanuit deze rij bouwsels



rangnummer *1* 2 *3*

komen de leerlingen via *Inhoud* = *Lengte* × *Breedte* × *Hoogte* tot de volgende formules:

wit $= r * r * r$
zwart $= r * r * 4$

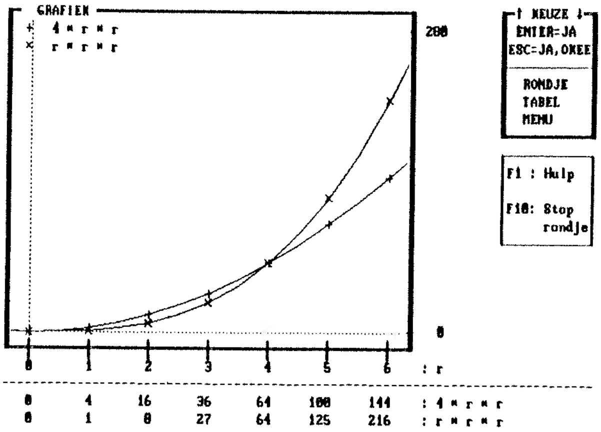
Vragen als: 'welke kleur wint op den duur' en 'bij welk bouwsel haalt de winnaar de andere in' staan ver van een formalisering als:

Los op: $r * r * r = r * r * 4$

Een weergave als hieronder is ook formeel, maar veel dichterbij het oorspronkelijke probleem geformuleerd en daarmee krachtiger:

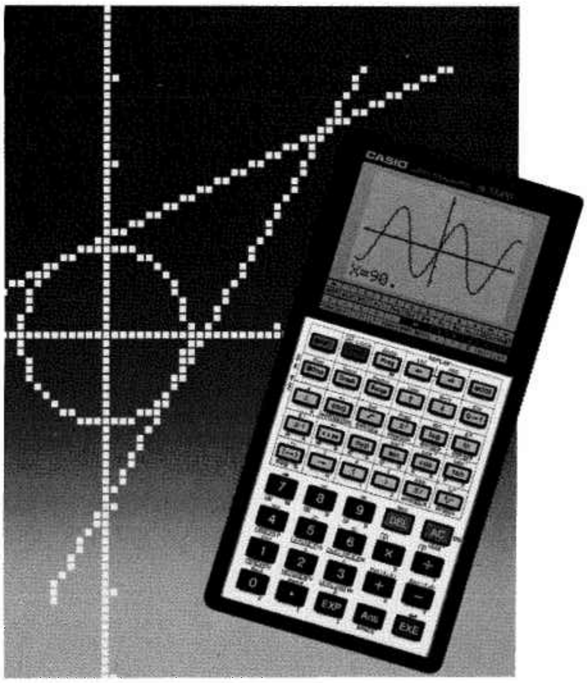
Vergelijk: $r * r * r$
$r * r * 4$

Deze formulering nodigt namelijk uit om naar de delen van de formules te kijken die verschillend zijn (bij de ene 'r' en bij de andere '4') en die te vergelijken. De gelijke delen (bij beide $r * r$) hoef je niet in de redenering te betrekken. Het oorspronkelijke doel: het vergelijken van twee verbanden, met bewegende variabelen, kan hierbij helemaal binnen beeld blijven.
Observaties in de klas gaven aan dat de leerlingen behoefte hadden aan een concreet houvast. Zij hadden daarbij echter voldoende aan de oorspronkelijke rij bouwsels: de laatste 'r' is de hoogte, dus als de hoogte vier is, dan zijn er evenveel zwarte als witte blokjes en dat is bij het vierde bouwsel. De leerlingen kwamen hier zelf tot de conclusie dat de gemaakte stap toelaatbaar is. Dat je niet hoeft te kijken naar de gelijke delen werd ook ondersteund vanuit de situatie. Lengte en breedte (in de formule de eerste twee r-en) zijn steeds hetzelfde, je hoeft dus alleen maar naar de hoogte en die 4 te kijken.
De techniek van kijken naar gelijke en niet-gelijke delen in een formule is een methode die toepasbaar is op een gebied dat veel groter is dan het vergelijken van twee lineariteiten.
Het is een methode die goed aansluit bij de redeneringen in de situaties. Wat is het verschil per stuk? Wat is het verschil in vastrecht? Lengte en breedte zit in beide formules, in de ene staat echter hoogte en in de ander een 4, enzovoorts.
De leerlingen bleken overigens na enig nadenken en zoeken prima in staat om de vraag te beantwoorden:
Zijn er nog meer waarden voor r waarbij de formules dezelfde uitkomst hebben?
Na enig zoeken, bleek '0' zonder meer juist: $0 * 0 * 0$ heeft nu eenmaal dezelfde uitkomst als $0 * 0 * 4$.
Een groot voordeel van deze benadering is, dat de oorspronkelijke situatie als houvast kan dienen bij het beantwoorden van de vragen. Een ander groot voordeel is, dat het werken met variabelen die echt bewegen, toestaat om tegelijkertijd met tabel, grafiek en formule op te werken.



De leerling kan het geheel van tabel, grafiek en formule blijven gebruiken bij het beantwoorden van vragen over de verbanden, ook als het geheel formeler behandeld wordt. Leveren redeneringen aan de hand van de vorm van de formules geen resultaat op, of voelt de leerling zich onzeker over het antwoord? De grafiek geeft een eerste aanwijzing over een moment van inhalen en met behulp van de tabel kan via aflezen of inklemmen het snijpunt meer of minder precies worden bepaald.
De computer kan bij dit 'onderzoek' door de leerlingen een grote ondersteunende rol hebben, vooral als snelle leverancier van allerlei grafieken en tabellen.
Tijdens het uitproberen van *Winnende Formules* in 3-mavo, breidde de docent de volgende opdracht uit tot alle mogelijke waarden voor r:
Welke wint op den duur en wanneer haalt de winnaar in?
$27 * r * r$
$3 * r * r * r * r$
Na de les evalueerde hij als volgt: 'Mijn leerlingen lossen vierdegraads vergelijkingen op.'

Het gelijk op werken met tabel, grafiek en formule sluit ook aan bij de mogelijkheden, zoals de graphic calculator die binnen zeer afzienbare termijn zal bieden. Gegeven twee voorschriften levert de graphic calculator de bijbehorende grafieken en specifieke punten zoals snijpunten.



Het nut van een dergelijk gebruik van de graphic calculator? De gebruiker van het apparaat moet beschikken over de hier geschetste kennis en vaardigheden. Met een dergelijk gebruik van de graphic calculator wordt de toegang geopend naar een zeer groot gebied van de wiskunde. W12-16 werkt hier al naar toe, door middel van gebruik van de computer. Nu nog de invoering van de graphic calculator. Wat betreft de prijsontwikkeling (deze Casio fx 7000G kost *f* 299,– en er komt een Hewlett-Packard aan van ongeveer *f* 180,–) zou dat al snel kunnen gebeuren. De gebruikersvriendelijkheid van de huidige apparaten is echter nog niet groot genoeg.

Nog even terug naar het begin: 'Vergelijkingen zijn een symbolische weergave van een praktische situatie.' Waar het statische situaties betreft, met een nog onbekende maar wel bepaalde variabele, voldoet de metafoor van de weegschaal uitstekend. De balans is echter een metafoor voor de stappen die je doorloopt tijdens het oplossen van een lineaire vergelijking. Daarmee geeft de balans wel een methode aan, maar geeft de leerling vaak geen mogelijkheid om die methode terug te voeren tot de oorspronkelijke situatie.
In het moderne wiskundeonderwijs worden namelijk steeds vaker situaties onder de loupe genomen met een lopende variabele. Dergelijke situaties verdienen een brede aanpak met gebruik van tabellen, grafieken en formules en formaliseringen vanuit de oorspronkelijke situatie. Op deze wijze heeft de leerling mogelijkheden voor houvast tijdens de diverse fasen van het leerproces. Verder kan zo een groot gebied van de wiskunde geïntegreerd worden bestudeerd.
De weegschaal te licht bevonden? Naar mijn mening moet aan dat apparaat in ieder geval niet een te groot gewicht worden toegekend. Voor de toekomst reken ik meer op de graphic calculator.

Literatuur

[1] Boyer, Carl B.: *A history of mathematics*, Wiley and Sons, New York, 1968.

[2] Eves, H.: *Great moments in mathematics before 1650*, Mathematical association of America, 1983.

[3] Eves, H.: *Great moments in mathematics after 1650*, Mathematical association of America, 1983.

[4] Kemme, S.L.: *Uitleggen van wiskunde*, Utrecht, 1990.

[5] Algebragroep W12-16: *En de variabelen hoe staat het daarmee?*, Nieuwe Wiskrant W12-16 special, 10e jrg. nr. 1, 1990.

Geciteerd lesmateriaal:

[6] Bodegraven, D. e.a.: *Wiskundelijn deel 1b*, Jacob Dijkstra, Groningen.

[7] Krabbendam, H. en J. Speelpenning: *Regelrecht*, SLO, Enschede, 1987.

[8] Zwaart, P. van der: *Winnende Formules*, SLO, Enschede, 1990.

Ondersteunend of Ondermijnend

Onder dit motto wordt op het 27e Nederlands Mathematisch Congres (4 en 5 april 1991 aan de Erasmus Universiteit Rotterdam) een symposium gehouden over de mogelijkheden van Computer Ondersteund Onderwijs (COO) in de wiskunde op het MO en HBO.

In twee voordrachten worden softwarepakketten behandeld waarmee wiskundeopgaven exact kunnen worden opgelost. In een forumdiscussie komt de toekomst van het wiskundeonderwijs met betrekking tot COO aan de orde. Tevens zijn er computerdemonstraties.

Het symposium vindt plaats op vrijdag 5 april 1991, 9.00 - 11.00 uur.

Overige programmaonderdelen op deze dag omvatten een voordracht en films over het leven en werk van H. Freudenthal, beroepsvoorlichting voor studenten, een voordracht over de grenzen tussen wiskunde en informatica.
Nadere inlichtingen: tel. 010 - 4082231 (alleen maandag en woensdag), zie ook de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap.