Een gewichtig probleem van L'Hôpital

J.A. van Maanen
Christelijk Gymnasium, Utrecht/Mathematisch Instituut, RU Utrecht

Een experiment

In dit artikel zal ik een experiment beschrijven dat ik in één van mijn klassen heb uitgevoerd. Het woord 'experiment' heeft hier een dubbele betekenis: de manier waarop ik de geschiedenis van de wiskunde in mijn onderwijs heb gebruikt, is een experiment (tenminste voor mij) en binnen dit experiment heb ik een natuurkundig experiment uitgevoerd. De klas is een zesde klas vwo wiskunde A, zestien leerlingen waarvan acht ook wiskunde B doen.

Een donderdag in februari. Het is de dag van de aangekondigde try-out voor het mondeling schoolonderzoek wiskunde A. Als de leerlingen het lokaal binnenkomen zien ze op tafel de op de foto afgebeeldde proefopstelling (met mijn hartelijke dank aan Steven Blomberg, die de uitvoering verzorgde).

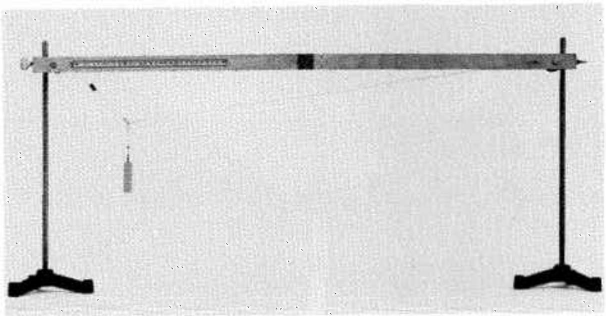


foto: OMI *fig. 1*

Op een horizontaal bevestigde lat met een schaalverdeling in centimeters zitten, negentig centimeter van elkaar, twee oogjes geschroefd. Aan het linker oogje hangt een touwtje met aan het eind een ring; de ring (over de middellijn gemeten) en het touwtje zijn samen vijftien centimeter lang. Een tweede touwtje zit aan het rechter oogje vast en heeft aan het eind een lus waaraan een gewicht gehangen kan worden. Ten opzichte van dat gewicht is het gewicht van de touwtjes en de ring te verwaarlozen. (Vanwege de wrijving zou het beter geweest zijn om in plaats van de ring een katrol te nemen, zoals in de 'blauwdruk' voor de proefopstelling die we straks nog zullen zien, maar er was zo gauw geen katrol die licht genoeg was.) Het probleem is nu: als ik het rechter touwtje door de ring haal en er vervolgens het gewicht aan hang, kun je dan de posities van ring en gewicht voorspellen als alles in rust is?

Ik heb het probleem op deze manier aan de klas gepresenteerd en heb gevraagd om er een kwartier over na te denken. Dit is in overeenstemming met de gebruikelijke gang van zaken bij ons mondeling schoolonderzoek. Daarbij krijgen de leerlingen vooraf een half uur de tijd om zich op een schriftelijk geformuleerd probleem voor te bereiden waarna een gesprek van een half uur volgt over het probleem en hun oplossing.

Wat heeft dit te maken met geschiedenis?

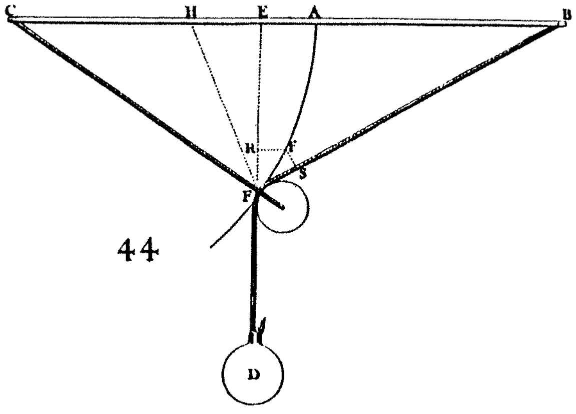
Dit probleem komt uit het eerste leerboek over differentiaalrekening, L'Hôpitals *Analyse des infiniment petits* uit 1696, een heel interessant en rijk boek dat best iets meer aandacht zou mogen hebben. Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704) had zelf, nadat hij als autodidact aan de wiskunde was begonnen, de differentiaalrekening geleerd in privélessen van Johann Bernoulli, die met zijn broer Jakob in nauw contact met Leibniz de in 1684 voor het eerst gepubliceerde ideeën van Leibniz verder uitgewerkt had. De markies en zijn leraar sloten een overeenkomst dat de laatste de eerste tegen betaling zijn nieuwste ontdekkingen zou meedelen. L'Hôpital kwam er overigens aan het eind van zijn voorwoord openlijk voor uit: 'Overigens erken ik veel te danken te hebben aan de inzichten van de heren Bernoulli, vooral aan die van de jongste (Johann), die tegenwoordig professor is in Groningen. Ik heb zonder scrupules gebruik gemaakt van hun ontdekkingen en van die van de heer Leibniz. Daarom ben ik ermee accoord dat zij voor zich opeisen wat ze er maar van willen, en ik ben tevreden met wat ze voor me over zullen willen laten.'
Na de dood van L'Hôpital openbaarde Johann Bernoulli inderdaad hoe de *Analyse des infiniment petits* tot stand was gekomen. Hij eiste voor zichzelf de ontdekking op

van de stelling (*Analyse* §163) dat:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(als $f(a) = g(a) = 0$, f en g in een omgeving van a differentieerbaar zijn, en als $g'(a) \neq 0$), maar te laat, want die draagt tot op heden de naam van L'Hôpital.

In L'Hôpitals eigen woorden zien het probleem en de oplossing er als volgt uit:



De 'blauwdruk' voor de proefopstelling.
(figuur 44 uit L'Hôpitals 'Analyse des infiniment petits')
fig. 2

'Zij F een katrol die vrij hangt aan het eind van een in C bevestigd touwtje CF, en D een gewicht. D hangt aan het touwtje DFB, dat over katrol F heen loopt en bevestigd is in B, zo dat de punten C en B op dezelfde horizontale lijn CB gelegen zijn. Men veronderstelt dat de katrol en de touwtjes geen gewicht hebben; & men vraagt op welke plaats het gewicht D of de katrol F zich zullen ophouden.
Het is duidelijk uit de beginselen van de Mechanica dat het gewicht D de laagst mogelijke positie onder de horizontale lijn CB zal innemen; waaruit volgt dat de loodlijn DFE een maximum moet zijn.
Noem de gegeven lijnstukken CF = a, DFB = b, CB = c & neem als onbekende CE = x.
Dan zal men hebben EF = $\sqrt{aa - xx}$, FB = $\sqrt{aa + cc - 2cx}$ & DFE = $b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ hetgeen een *maximum* moet zijn; en uitgaande van haar differentiaal:

$$\frac{c\,dx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} - \frac{x\,dx}{\sqrt{aa - xx}}$$

waaruit men afleidt $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$, vindt men na deling door $x - c$, $2cxx - aax - aac = 0$. Een van de twee wortels levert voor CE een zodanige waarde dat de loodlijn ED via de katrol F & het gewicht D loopt wanneer deze in rust zijn.'

(*Analyse*, p. 51-52)

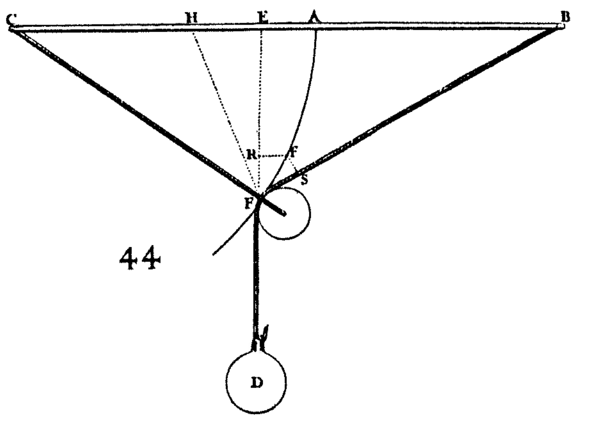
We zien dus dat de geschiedenis ons kan helpen aan interessante problemen voor een examen of voor andere doeleinden. Dat is mooi en nuttig, en iedereen zal het met me eens zijn dat we heel mooi de geschiedenis kunnen benutten als we zelf niet creatief genoeg zijn om dergelijke proeven te ontwerpen, maar is dat alles? En was dat in dit geval, bij deze klas, de enige rol die de geschiedenis speelde? Nee dat is niet zo. Om dat duidelijk te maken moet ik eerst iets vertellen over de achtergrond van het probleem.

L'Hôpital had in zijn boek een bepaalde bedoeling met dit probleem. Hij gebruikte het in zijn pogingen om zijn collega-wiskundigen en natuurkundigen te overtuigen dat de differentiaalrekening, die in die tijd gloednieuw en nog niet overal geaccepteerd was, een gezonde en krachtige methode was. Hij deed dat door de nieuwe analytische oplossing van het probleem te vergelijken met een klassieke oplossing. De klassieke oplossing maakte gebruik van de optelling van krachten met de parallellogramregel en het feit dat een lichaam in rust is als de resulterende kracht die op het lichaam werkt nul is. Deze natuurkundige argumenten leiden via de meetkunde van het probleem, waarbij een of andere hulplijn moet worden getrokken (in L'Hôpitals figuur lijn HF), tot de conclusie dat enkele hoeken gelijk moeten zijn. Daarna wordt de oplossing gevonden door een combinatie van gelijkvormige driehoeken en wat algebra. Een echt trucmatige oplossing. De analytische oplossing gebruikt het principe van minimalisering van potentiële energie, hetgeen gewoon betekent dat het gewicht een zo laag mogelijke positie probeert te vinden. Het enige dat L'Hôpital dus had te doen was het invoeren van een coördinatenstelsel, de verticale afstand uit te drukken in termen van de horizontale afstand en die te maximaliseren door te differentiëren. Op deze manier is de oplossing heel rechtstreeks, ze hangt niet van een trucje af maar alleen van een kort algoritme.
Samengevat: niet alleen de wiskunde maakt dit gewichtsprobleem zo interessant, maar juist ook de motivatie die erachter zit. Voor ons is het één van de problemen uit een lange lijst van toepassingen van de analyse, voor L'Hôpital was het een middel om de aanvaarding en de invoering van de analyse te bevechten.

Het proef-schoolonderzoek

De klas wist dat ik een vrijwilliger zou vragen naar het bord te komen om ondervraagd te worden, terwijl de rest als een soort publiek kon toekijken. Mag ik u nu voorstellen aan Redmer? Hij bood zich aan als vrijwilliger. Redmer is één van de acht leerlingen in de groep die zowel wiskunde A als B doen, bovendien heeft hij ook natuurkunde in zijn pakket. Hij leek dus een geschikte kandidaat. Zijn eerste opmerking was dat hij het probleem nog niet had opgelost, maar dat hij wel een stukje op weg was gekomen. Ik vroeg hem dus wat hij allemaal had bedacht. Hij tekende een schets op het bord en koos de niet-analytische aanpak, die tot op zekere hoogte overeenstemde met de pre-analytische oplossing van L'Hôpital. Redmer bekeek een aantal krachten, beginnend met het gewicht D, die hij in horizontale en verticale componenten ontbond. Dit nam ongeveer tien minuten in beslag en toen liep hij vast.
Bij een eerdere gelegenheid had ik de klas al verteld zich geen zorgen te maken als dit zou gebeuren. Met een goede reactie op een aanwijzing zouden ze alsnog een goed schoolonderzoek kunnen maken. Redmer liep dus vast en ik was in tweestrijd, want er waren twee verschillen-

de aanwijzingen die ik hem kon geven. De ene aanwijzing was dat ik hem kon leiden naar de klassieke meetkundige oplossing met zijn netwerk van gelijkvormige driehoeken en bijbehorende algebra. Door de andere aanwijzing, naar de analyse, zou hij een heel ander standpunt moeten innemen en moeten proberen het probleem met behulp van analyse op te lossen. Ik besloot tot het laatste en wel om twee redenen.
In de eerste plaats blijven de klassieke meetkundige methoden ingewikkeld. Je hebt er gelijkvormige driehoeken bij nodig, of goniometrie, en als de meetkunde van het probleem is uitgezocht dan blijft er altijd nog wat algebra te doen. De meetkundige oplossing van L'Hôpital zelf is in feite nogal trucmatig. Die kan echter zodanig gewijzigd worden dat je het zonder een hulplijn kunt aanpakken en alleen maar gebruik hoeft te maken van het feit dat de verticale en horizontale componenten van de krachten die op F werken samen nul zijn. Redmer had min of meer deze aanpak gekozen, maar hij was nog maar net begonnen om de meetkundige gegevens te gebruiken.
In de tweede plaats koos ik voor de oplossing met behulp van analyse, omdat analyse met toepassingen één van de hoofdonderwerpen van wiskunde A is.
Redmer nam mijn advies ter harte en hij loste het probleem – afgezien van enkele rekenfouten – rechtstreeks op.
De – licht gewijzigde – oplossing van Redmer (en van L'Hôpital, zie hierboven) ziet er als volgt uit.



Gegeven: CB = 90 cm; CF = 15 cm. Neem 15 cm als lengte-eenheid, dan is CF = 1.
Voer coördinaten in zodat:

C(0,0) E(x,0) B(6,0) D(x,y)

Noem l de lengte van het koord met het gewicht (dus: BF + FD = l).
Het probleem wordt: wanneer is y zo groot mogelijk?
Nu geldt: y = EF + FD. We kunnen EF en FD in x uitdrukken:

$EF^2 = CF^2 - CE^2 = 1 - x^2$ dus:
$EF = \sqrt{1 - x^2}$

FD kan worden bepaald via FD = l – BF:

$BF^2 = EF^2 + EB^2 = (1 - x^2) + (6 - x)^2$ dus:
$BF = \sqrt{37 - 12x}$
waarmee:
$FD = l - \sqrt{37 - 12x}$

Nu weten we y:
$$y = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{37 - 12x} + l$$
Deze y moet zo groot mogelijk worden gemaakt, dus bepaal $\frac{dy}{dx}$:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{6}{\sqrt{37 - 12x}}$$

Nemen we $\frac{dy}{dx} = 0$, dan volgt daaruit na enig rekenwerk, de vergelijking:

$$12x^3 - 73x^2 + 36 = 0.$$

Een derdegraads vergelijking. Redmer merkte hier op dat hij een probleem had, tenzij hij een wortel kon raden. En inderdaad, hij vond dat $x = 6$ voldoet, dus:

$$12x^3 - 73x^2 + 36 = (x - 6)(12x^2 - x - 6) = 0\,.$$

Dat is gelijkwaardig met:

$x = 6$ (niet acceptabel), of $x = -\frac{2}{3}$ (evenmin acceptabel), of $x = \frac{3}{4}$ (daar is hij!!).

Dus CE = $\frac{3}{4} \cdot 15 = 11{,}25$ (cm) en hieruit kan de maximale lengte van ED worden berekend. Redmer kwam al voor het eind van de les tot dit resultaat. De slotvraag was natuurlijk of de voorspelde waarde van CE wel klopte met de gemeten waarde. En inderdaad, de overeenstemming was heel goed.

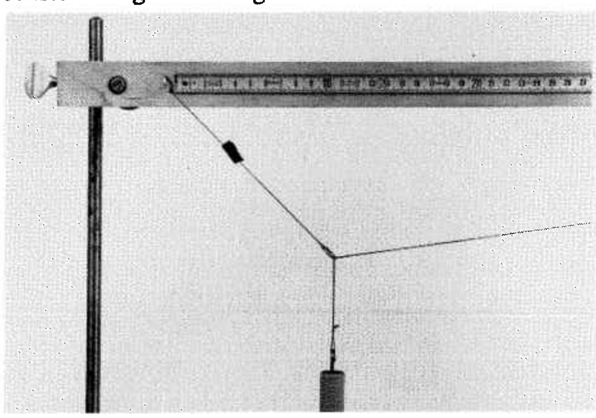


foto: OMI *fig. 3*

In de detailopname van de proefopstelling is voor CE een iets grotere, maar nog steeds zeer redelijke waarde af te lezen (11,7 cm ongeveer).
Bij een nauwkeuriger uitvoering van de proef (met een lichtgewicht katrol in plaats van de ring, en met een linker oogje dat horizontaal staat, zodat het samenvalt met het begin van de schaalverdeling, en dat niet zoals op de foto schuin naar beneden wijst), verwacht ik een nog betere overeenkomst tussen de voorspelde en de gemeten waarde.

Tot zover de beschrijving van de try-out en de wiskunde die erin voorkwam. In de volgende paragraaf ga ik terug naar de vraag wat de rol is van de geschiedenis in deze vorm van wiskundeonderwijs.

Hoe kun je geschiedenis gebruiken in de wiskundeles?

Tot dit punt speelde de geschiedenis slechts één rol: het diende als een bron van inspiratie voor de docent. Geen prominente rol, maar toch ook geen slechte. Maar dit was nog maar het eerste bedrijf. In de volgende les, een dag later, ging het doek open voor het tweede bedrijf. Ik gebruikte deze les om enkele aspecten van de try-out te bespreken. De belangrijkste reacties van de leerlingen waren:

- het probleem was moeilijk maar wel leuk;
- meer specifiek: het was vooral moeilijk een goed begin te vinden, maar men was het erover eens dat het na de aanwijzing vrij gemakkelijk was om verder te gaan;
- veel leerlingen vonden het een leuk soort probleem, omdat ze wiskunde konden toepassen in een realistische situatie, het was niet weer één van die vele papieren problemen waar het boek vol mee staat.

Mijn bijdrage tot de discussie over het proef-schoolonderzoek bestond uit een korte samenvatting van de wiskunde en uit het verklappen van de herkomst van het probleem. Ik vertelde de klas dat het al voorkwam in het eerste leerboek over differentiaalrekening, ik liet hun het probleem zien op fotokopieën van de originele uitgave uit 1696 van de *Analyse* en ik benadrukte de overeenkomst tussen de try-out en de beweegredenen van L'Hôpital om het probleem in het boek op te nemen. Redmer begon met de klassieke aanpak met krachten. Dat werkte niet, tenminste niet snel genoeg. Toen schakelde hij over op de analyse-aanpak, die snel tot succes leidde. De overeenkomst met L'Hôpital, die zijn collega's in zijn boek precies deze aanpak adviseerde, is opmerkelijk.

De vraag blijft natuurlijk hoe geschikt dergelijke problemen met een natuurkundige context zijn binnen het wiskunde A-onderwijs. Dat zal sterk afhangen van de rol die de natuurkunde speelt. Als die rol, zoals hier, beperkt blijft tot het gebruiken van de dagelijkse ervaring dat een gewicht onder invloed van de zwaartekracht 'naar beneden wil', lijkt het me zeker verantwoord. Bovendien is een leerling met natuurkundige kennis daardoor niet a priori in het voordeel. De fysicus (die de resultante van krachten nul stelt) heeft het namelijk zeker zo moeilijk als de wiskunde A-leerling die handig de analyse toepast. Met die moraal had L'Hôpital het probleem namelijk voor zijn *Analyse* uitgezocht.

Samengevat

Tenslotte wil ik proberen aan te geven wat de geschiedenis heeft bewerkstelligd in dit geval en wat het kan bewerkstelligen in andere gevallen:

- Geschiedenis is een bron van interessante wiskunde. Zelfs als je – als leraar – in de les geen gebruik maakt van oude documenten, dan nog kan lezing ervan een stimulerende bezigheid zijn.
- Vergelijken van onze hedendaagse wiskunde met oude technieken stelt ons in staat de waarde van onze moderne methoden te bepalen en deze waarde zichtbaar te maken aan onze leerlingen.
- Geschiedenis laat zien dat wiskunde meer is dan een verzameling van waarheden en feiten. In het hier besproken voorbeeld was een wiskundig probleem een onderdeel van een propagandacampagne. Het was een wapen dat door de jongere generatie werd gebruikt tegen de onhandige gangbare methoden. Laat er over het woord 'onhandig' geen misverstand bestaan. L'Hôpital vond de oude methode onhandig omdat hij een betere had. Toen de eerdere methoden om extreme waarden te bepalen (van Descartes en Fermat) rond 1640 werden uitgedacht, waren ze het summum van moderne wiskunde.
- Dankzij de propaganda van L'Hôpital heeft de analyse de oude methoden vervangen en kunnen problemen over extreme waarden tegenwoordig bijna zonder nadenken worden opgelost. Soms maakt dit de analyse tot een stomvervelend vak (voor docenten èn leerlingen). In feite is L'Hôpitals 'gewichtige' probleem één van die vervelende problemen uit de toegepaste analyse. Maar zo'n probleem krijgt kleur als je het bekijkt vanuit het Grijze Verleden.
- Geschiedenis lokt een discussie over de wiskunde uit, over de methoden, over de waarde voor de mensheid. Het helpt de leerlingen met nadenken over wat ze nu aan het doen zijn.

Volgens mij gebeurde er iets essentieels in dit proefschoolonderzoek. Geschiedenis heeft wat tekening gebracht in het vlakke gezicht van de wiskunde. Het is een oud gezicht en oude gezichten hebben tekening nodig. Dus laten wij die aanbrengen!

Noot

Wie belangstelling heeft voor het integreren van geschiedenis in het wiskundeonderwijs leze de 'Newsletter' van de International Study Group on the Relations Between *History* and *Pedagogy* of *Mathematics*.
Zend voor kosteloze toezending een kaartje naar onderstaand adres:

Jan van Maanen
Rijksuniversiteit Utrecht/Mathematisch Instituut
Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht.