

# Uitleggen van wiskunde

F. Bouman

CSG Oude Hoven, Gorinchem

## Inleiding

Vrijdag 8 juni 1990 is te Groningen Sieb Kemme gepromoveerd tot doctor in de Wiskunde en Natuurwetenschappen. Van zijn dissertatie *Uitleggen van Wiskunde* is als nummer 12 in de reeks 'Onderzoek wiskundeonderwijs' van de vakgroep OW&OC van de Rijksuniversiteit Utrecht een handelseditie verschenen. Naar men mij meedeelde, is het enige verschil van deze handelseditie met het proefschrift de titelpagina.

In de inleiding van het boek komt de volgende alinea voor:

'Als belangrijkste eis heeft bij het onderzoek voorop staan dat het relevant moet zijn voor de dagelijkse praktijk van het wiskundeonderwijs. Dat betekent dat het onderzoek herkenbaar moet blijven voor docenten. Deze beide voorwaarden impliceren dat de onderzoeksomgeving per definitie een authentieke onderwijsomgeving is en dat theorievorming leidt tot praktische resultaten. Bovendien dient dit verslag leesbaar en begrijpbaar te zijn voor wiskundedocenten. Er zal voorzichtig moeten worden omgesprongen met wetenschappelijk jargon en gecompliceerde wetenschappelijke technieken.'

In de brief waarin Heleen Verhage, redacteur van de Nieuwe Wiskrant, mij verzocht het proefschrift te bespreken, komt de volgende zin voor:

'Sieb heeft z'n proefschrift vooral voor leraren willen schrijven, daarom willen we ook graag een bespreking van een docent.'

Beide citaten vormen voor mij de begrenzing van mijn taak. Ik hoef het boek niet te beoordelen op zijn wetenschappelijke kwaliteiten, als ik dat al zou kunnen. Ik wil in deze bespreking antwoord zoeken op de volgende vragen:

1. Is dit boek relevant voor de dagelijkse praktijk van het wiskundeonderwijs?
2. Blijft het boek herkenbaar voor docenten?
3. Leidt de theorievorm tot praktische resultaten?
4. Is dit verslag leesbaar en begrijpbaar voor wiskundedocenten?

Hierbij doet zich evenwel een probleem voor. In bovenstaande vragen komt tweemaal de lettercombinatie 'docent' voor. De vraag is, of ik namens docenten kan en mag spreken. Ik hoop dat de lezer het me niet kwalijk neemt, dat ik deze vraag bevestigend beantwoord.

## Over de inhoud

Het boek kan onderverdeeld worden in drie delen.

In het eerste deel, gevormd door de hoofdstukken een en twee, wordt een aantal voor het onderzoek relevante begrippen afgebakend, worden de onderzoeksvragen gesteld en wordt de methode van onderzoek toegelicht. Ook wordt in deze hoofdstukken veel van de literatuur die voor het onderzoek van belang is, besproken.

Het tweede deel wordt gevormd door de hoofdstukken drie tot en met zeven. In deze hoofdstukken staan steeds lesprotocollen centraal. Zo'n protocol wordt voorafgegaan door een beschrijving van de situatie en een analyse van het wiskundige onderwerp dat in het protocol aan de orde is. Het protocol wordt dan gevolgd door een uitvoerige nabespreking, waarbij het begrippenkader uit hoofdstuk een, een belangrijke rol speelt.

Het derde deel bestaat uit hoofdstuk acht. In dit hoofdstuk wordt wat in de voorgaande hoofdstukken aan de orde geweest is 'op een rijtje gezet' en wordt een aantal conclusies getrokken.

Het is in het kader van dit artikel ondoenlijk een samenvatting te geven van hoofdstuk een. Ik volsta met het opsommen van een aantal onderwerpen, dat in dit hoofdstuk aan de orde komt.

- Uitleggen versus vertellen: uitleggen heeft begrijpen tot doel, vertellen richt zich op meeleven en kennis nemen van.
- Soorten van uitleg: uitleg waarom, uitleg wat, uitleg hoe, uitleg dat.
- Uitlegstrategieën: uitleg met behulp van analogie, uitleggen met behulp van synthese, genetische uitleg, uitleg op basis van analyse.
- Structuur van de uitleg: moeilijkheid en duidelijkheid.
- *Uitleggen* is een vorm van taalgedrag waarbij de docent de bedoeling heeft het uitgelegde door de

leerling te laten begrijpen.'

- 'Begrijpen voert tot een, door de docent gewenste, vorm van gedrag van de leerling met betrekking tot het uitgelegde.'

In hoofdstuk twee worden de onderzoeksvragen geformuleerd en wordt bovendien een keus gemaakt voor een methode van onderzoek.

- Wat valt er uit te leggen aan een onderwerp en hoe gebeurt dit?
- Waarom functioneren sommige contexten wel en andere niet bij het uitleggen van het rekenen met negatieve getallen?
- Wat zijn de verschillen in uitleg tussen drie docenten in drie brugklassen bij het leren hanteren van formules?
- Wat zijn de verschillen in het uitleggen van de formele vaardigheden tussen een tweede klas Mavo en een tweede klas Atheneum?
- Hoe verloopt een uitleg van het begrip hoek die uitgaat van het complexe aan de werkelijkheid ontleende reeds bekende begrip hoek?
- Wat is het verband tussen de moeilijkheidsgraad van een uitleg en de duidelijkheid?
- In hoeverre levert interactie een bijdrage aan de duidelijkheid van de uitleg.

Hoofdstuk drie geeft het verslag van de presentatie van twee student-leraren aan een groep collega's. De bespreking van deze presentatie centreert zich vooral om de relatie interactie-uitleg en de relatie moeilijkheid-duidelijkheid.

Hoofdstuk vier bevat onder meer een didactische analyse van de contexten 'heks' en 'treintje' (Moderne Wiskunde, deel een, vierde editie) bij de invoering van negatieve getallen en heeft als titel: *Uitleggen door analogie en context*.

Hoofdstuk vijf handelt voornamelijk over het invoeren van letters (variabelen) en formules.

In hoofdstuk zes wordt de uitleg over het onderwerp vergelijking in een tweede klas Mavo en in een tweede klas Atheneum met elkaar vergeleken.

Hoofdstuk zeven geeft een beeld van hoe het begrip hoek in de klas geïntroduceerd kan worden.

Hoofdstuk acht geeft, zoals eerder gezegd, een ordening van de conclusies uit de voorgaande hoofdstukken, met als belangrijke eindconclusie: Een aantal aspecten van uitleggen is te leren!

## Waardering

Uit alles blijkt dat deze dissertatie geschreven is door iemand die een grote kennis heeft van de didactiek van de wiskunde, die de school van binnenuit kent en die met veel respect en grote nauwgezetheid gekeken heeft naar wat docenten doen als ze iets uitleggen en naar wat leerlingen meemaken als ze iets uitgelegd krijgen. Natuurlijk kun je als wiskundedocent alleen maar blij zijn als

het onderwerp uitleggen zulk een grote aandacht krijgt: het maakt een groot deel van je beroepsleven uit!

De in het boek voorkomende didactische analyses zijn het lezen meer dan waard. Impliciet bevestigen deze analyses de stelling dat je pas in staat bent goede uitleg te geven, als je zelf het onderwerp van je uitleg door en door kent.

Een belangrijke verdienste van dit boek is dat het laat zien dat uitleggen niet een amorf begrip is waarvan je kunt zeggen: Je kunt het, of je kunt het niet. De auteur laat heel duidelijk zien dat uitleggen een activiteit is met vele aspecten en dat over deze aspecten van alles te zeggen is. Ik denk dan ook dat dit boek voor lerarenopleiders en schoolpracticum-docenten een bruikbaar hulpmiddel kan zijn. Deze conclusie past overigens niet in de opdracht, die ik mezelf in het begin van dit artikel stelde. Vroeger hoorde je nog weleens de stelling dat onderwijskundigen 'geflipte' leraren waren. Dit boek bewijst dat dat voor Kemme zeker niet geldt. Hij is een 'schoolmeester, in hart en nieren' en daar kunnen wij als veldwerkers ons voordeel mee doen.

## Enkele kritische kanttekeningen

Kemme maakt verschil, en dat is zeer relevant, tussen vertellen en uitleggen (§1.1). Ik heb zelf eigenlijk behoefte aan een verdere begripsonderscheiding.

*Vertellen* met als doel meelevens, meebelevens maar ook het zeggen van het onzegbare; bij dat laatste denk ik bijvoorbeeld aan de Bijbel, de Griekse mythologie.

*Meedelen* met als doel het verschaffen van informatie over bijvoorbeeld hoe een blikopener werkt, hoe de voortplanting van bijen verloopt.

*Uitleggen* met als doel het beantwoorden van de (al of niet uitgesproken) vraag van iemand die een verhaal niet snapt of een bepaalde mededeling niet begrijpt.

Deze nadere precisering zou §1.6 'Soorten van uitleg' duidelijker maken. Bovendien zou op diverse plaatsen in de analyse van een lesfragment het woord 'uitleg' vervangen kunnen worden door 'mededeling', hetwelk de analyses aan helderheid zou doen winnen.

De studenten, leraren en leerlingen die aan dit onderzoek meegewerkt hebben, stelden zich kwetsbaar op toen zij toestemming gaven voor het gebruik van de lesprotocollen.

Kemme gebruikt deze protocollen om iets duidelijk te maken en dat is volstrekt legitiem.

Nu het boek ook voor een groter publiek bereikbaar gesteld is, krijgen de protocollen nog een andere functie. Voor de ene lezer kunnen ze een nastrevenswaardig voorbeeld worden, de andere lezer kan ze zien als een voorbeeld hoe het niet moet.

In dit licht heb ik grote moeite met het protocol aangaande de invoering van het hoekbegrip (hoofdstuk zeven, pp. 180 e.v.). In de analyse van de uitleg – die acht mi-

nuten duurde – somt de auteur elf verschillende betekenissen van het begrip hoek op die in dit lesfragment aan de orde komen; in het vervolg herleidt hij deze elf betekenissen tot drie grondbetekenissen. Dan denk ik als leraar: 'Moet je nu echt al die betekenissen in één les aan de orde laten komen? Breng je hiermee de leerlingen niet in de opperste verwarring? Wordt hier niet gezondigd tegen een aantal zeer fundamentele didactische regels?'

Ik ben me natuurlijk bewust dat je in de (school) wiskunde niet met één hoekbegrip kunt volstaan, maar alle begrippen hoeven toch ook niet in één keer aan de orde te komen.

In hoofdstuk een (§1, 3 en 5) wordt zeer terecht een duidelijk verband gelegd tussen uitleggen en taal. Ik vind het jammer dat het door Freudenthal ingevoerde onderscheid actietaal–feitvaststellende taal niet in de beschouwing is opgenomen. Bij de analyse van een uitleg kan dit onderscheid belangrijke diensten bewijzen.

In de eerste twee paragrafen van hoofdstuk vijf wordt aandacht besteed aan variabelen en het gebruik van letters in de wiskunde. Beide paragrafen zijn zeer lezenswaard en helder. Eén aspect mis ik met spijt, maar dat hebben deze paragrafen gemeen met de meeste teksten over deze onderwerpen. Dat aspect is de betekenis van het gelijkteken:

$$\begin{aligned}2 + 2 &= 4 \\ a + a &= 2 * a \\ y &= x + 2 \\ x + 2 &= 5 \\ A &= \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

Het zal duidelijk zijn, dat de betekenis van het gelijkteken in bovengenoemde voorbeelden steeds een andere is. Mijn ervaring is, dat voor een aantal leerlingen de problemen met variabelen en letters terug te voeren zijn tot problemen met het gelijkteken.

## Conclusies

Ik heb aan het begin van dit artikel vier vragen gesteld. De eerste drie vragen kan ik zonder meer met *ja* beantwoorden.

Bij het antwoorden van vraag vier heb ik problemen. Ik vind het jammer dat de handeseditie precies gelijk is aan de dissertatie. De indeling van de dissertatie wordt bepaald door het onderzoek. Een andere rangschikking zou het boek leesbaarder maken, meer geschikt voor gebruik door studenten en leraren.

De geschetste lessituaties, met uitzondering van de presentaties van de studenten (hoofdstuk drie), zijn alle min of meer klasgesprekken. Nu vind ik klasgesprekken een groot goed, maar het boek zou aan waarde winnen als er ook een ouderwetse doccerles in geanalyseerd werd.

Ik kan me voorstellen dat er in het kader van het onderzoek geen behoefte was aan een mijns inziens ook belangrijk aspect van uitleggen, namelijk het gebruik van hulpmiddelen. In de handeseditie mis ik het node.

Weglaten van bepaalde paragrafen zou het boek geen schade doen; het uitzoeken welke delen gemist kunnen worden vereist nadere studie.

Na het bovenstaande zal duidelijk zijn dat ik vraag vier ook met *ja* beantwoord, maar dan minder van harte.

## PME 15

De vijftiende conferentie van de PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) wordt van 29 juni tot 4 juli 1991 gehouden in Assisi (Italië).

Naast plenaire lezingen en werkgroepen is er onder meer een paneldiscussie over het thema: 'Computers and the psychology of mathematics education'.

Inlichtingen zijn verkrijgbaar bij:

Conference Programme Secretary, Paolo Boero  
Dipartimento di Matematica, Università,  
Via L.B. Alberti 4, 16132 Genova (Italië).  
Tel. Italië-10-3538724  
Fax. Italië-10-3538769.

## ICTMA 5

Van 9 tot 13 september 1991 wordt de ICTMA 5 (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) gehouden in het Leeuwenhorst Congrescentrum te Noordwijkerhout.

Het thema van deze conferentie is:

*The Teaching and Learning of Mathematics by Applications*

Er zullen lezingen, workshops en korte presentaties worden gehouden.

De conferentie wordt georganiseerd door de vakgroep OW&OC. De Second Announcement is verkrijgbaar bij het ICTMA-secretariaat (Betty Dekker/Ellen Hanepen, Vakgroep OW&OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht. Tel. 030 - 611611).