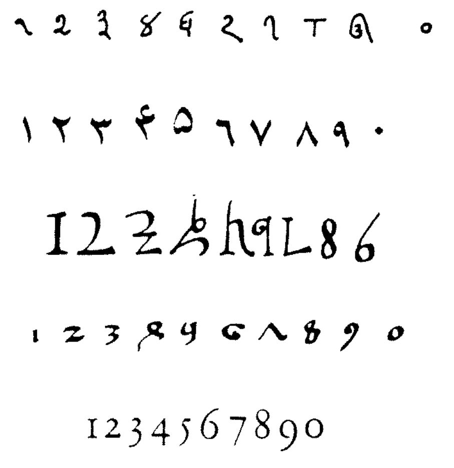
Over de geschiedenis van de cijfers

J.P. Hogendijk
Vakgroep Wiskunde, RU Utrecht

Het rekenen met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 is voor ons de gewoonste zaak van de wereld. Aan de geschiedenis van dit onderwerp zit echter heel wat meer vast dan men op het eerste gezicht zou denken.
Misschien zijn sommige van de volgende verhalen bruikbaar in de les om de leerlingen er nog eens van te doordringen dat de wiskunde banden heeft met de cultuur, en dat de wiskunde door mensen gemaakt is.
We bespreken hier alleen de schrijfwijze van de natuurlijke getallen, hoewel over andere getallen (bijvoorbeeld breuken) ook veel te zeggen zou zijn.

De moderne schrijfwijze van getallen komt in volwassen vorm het eerst voor in India, in de zesde eeuw na Christus. De vorm van de cijfers 1, 2, ..., 0 was verschillend van de onze, ze lijken veel op de bovenste rij cijfers in onderstaande figuur. Dit is niet wezenlijk en daarom kunnen we zeggen dat het moderne systeem in wezen 1500 jaar oud is. Toen was er echter al een lange ontwikkeling aan voorafgegaan.



Enkele voorbeelden uit de ontwikkeling van de moderne cijfers. Van boven naar beneden:
Indiase cijfers uit 875 na Chr.
Moderne Oostarabische cijfers
Middeleeuwse cijfers uit 975 na Chr.
Middeleeuwse cijfers uit de 12e eeuw na Chr.
Moderne cijfers uit 1541.

Het moderne systeem wordt een positiestelsel genoemd, omdat de waarde van elk symbool afhangt van zijn positie. De 4 in 403 staat voor 4 honderdtallen en hij heeft dus een andere waarde dan de 4 in 64. Met precies dezelfde twee symbolen kunnen we ook het getal 46 schrijven, dat iets anders betekent dan 64. Het voordeel van het systeem is dat het met behulp van slechts tien symbolen mogelijk is willekeurig grote getallen te schrijven.

Terug naar India, en nog verder terug in de tijd.
Rond 300 voor Christus werden in India getallen in het Brahmi-systeem geschreven. De symbolen voor 1 tot en met 9 waren voorlopers van de latere cijfers. In de volgende uitleg, die alleen over het principe van het systeem gaat, neem ik eenvoudigheidshalve aan dat ze er precies zo uitzagen als tegenwoordig. Er was geen symbool dat met 'onze' 0 overeenkomt en daarom waren voor 10, 20,..., 90 nieuwe symbolen nodig (zeg: A, B, C, D, E, F, G, H, J; de precieze vorm doet er hier ook niet toe) en voor 100 tot en met 900 weer nieuwe symbolen (zeg: α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι).
Het Brahmi-systeem is geen positiestelsel, want de waarde van bijvoorbeeld β hangt niet af van zijn positie. We zouden 223 kunnen schrijven als βB3, maar ook als Bβ3 of 3Bβ, enzovoort. Het stelsel heeft als bezwaar dat we alleen getallen tot 999 kunnen weergeven. We kunnen dan wel nieuwe symbolen uitvinden voor 1000, 2000, ..., 9000 (voor 1000 is dat inderdaad gedaan), maar dan is er alweer een nieuwe bovengrens, namelijk 9999, enzovoort.
Omstreeks 500 na Christus heeft een Indiase geleerde de eerste negen getallen uit het Brahmi-systeem genomen, een symbool 0 daaraan toegevoegd, en zo de moderne schrijfwijze voor natuurlijke getallen gecreëerd. Wie dit geweest is, is niet bekend en ook weten we niet hoe hij (of zij) op dit lumineuze idee gekomen is. Het kan een onafhankelijke ontwikkeling geweest zijn, maar invloeden uit China of uit Babylon (via Griekenland) kunnen ook een rol hebben gespeeld.
De vorm van de nul zou op het laatste kunnen wijzen, want in het Grieks was er ook een symbool voor nul, namelijk een rondje, de eerste letter van het woord *ouden*

(niets). De Chinezen hadden een soort positiestelsel en ook de Babyloniërs (al 2000 voor Christus!) hadden een positiestelsel met grondtal 60, dat aan de Griekse astronomen bekend was en nu nog in onze graden, minuten en seconden voortleeft.
Het *symbool* 0 betekent eigenlijk 'geen' en geeft aan dat er een lege plaats is, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt. In 103 staan één honderdtal en drie eenheden, maar bij de tientallen staat er niets, die positie is dus leeg. De invoering van het *getal* 0 is een heel andere, netelige kwestie waarop we hier maar niet zullen ingaan.

Hoewel 'onze' cijfers uit India stammen, worden ze vaak de Arabische cijfers genoemd. Dat komt omdat 'wij' (de Westeuropese wereld) ze via de Arabische cultuur hebben leren kennen.
Omstreeks 775 na Christus werden de 'Indiase getallen' aan het hof van de kalief van Baghdad bekend, en rond 830 is er een beroemd leerboekje over geschreven door de wiskundige Muhammad Al-Khwarizmi (uit de streek Khwarizm, ten zuiden van het inmiddels bijna uitgedroogde Aralmeer in de huidige Sovjetunie). Het boekje werd algauw in het (Islamitische) Spanje bekend en nadat het noorden en midden van Spanje door de Christenen veroverd waren, werd het omstreeks 1150 in het Latijn vertaald.
Wij hebben hieraan ook nog twee Arabische woorden overgehouden. Omdat het boekje begon met 'Al-Khwarizmi zei', in het Latijn 'Dixit Algorismi', gebruiken wij het woord algorisme voor rekenmethode. Dit woord wordt vaak verder verbasterd tot 'algoritme', hoewel het echt niets met logaritme of het Griekse woord arithmos (= getal) te maken heeft.
Ook het woord 'cijfer' is van Arabische oorsprong. Het symbool voor 0 werd in het Arabisch *sifr* (= leegte) genoemd. De nul kreeg altijd veel aandacht omdat hij een moeilijk aspect van het systeem was, en zo kwam het dat ook de andere symbolen (eigenlijk ten onrechte) met het woord cijfer werden aangeduid.
De oorspronkelijke betekenis van het woord sifr is wel bewaard in het Franse en Engelse zero (via Latijn: zephirum).

Misschien denkt u dat de Arabische wereld en middeleeuws Europa enthousiast het nieuwe systeem aannamen, vanwege de vele voordelen die het, zoals wij weten, bezit. Zo is het niet gegaan. De Arabische astronomen hielden vast aan hun 60-tallige systeem met de letters van het alfabet. Anderen schreven liever alles in woorden uit, zoals in 'tweeëntwintig'. Een extra bezwaar van het moderne systeem was dat het in het begin ingericht was op het rekenen met zand, en dat was moeilijk en vies.
We berekenen als voorbeeld 289 maal 67 in een bakje met zand of op een leitje met weinig ruimte, volgens Al-Khwarizmi. (Papier was in de eerste eeuwen schaars en veel te duur.) We beginnen met de getallen boven elkaar te schrijven, zodat het laatste cijfer van 67 onder het hoogste cijfer van 289 komt te staan. Daarna voeren we de volgende procedure (de stappen a, b, c) drie keer uit:

a. *bereken 67 maal het meest linkse resterende cijfer van 289;*
b. *veeg het meest linkse resterende cijfer uit, zet het meest rechtse cijfer van het zojuist uitgerekende produkt op de plaats daarvan, tel de hogere cijfers van het produkt op bij de cijfers aan de linkerkant van het zojuist uitgewiste cijfer;*
c. *verschuif de 67 een plaats naar rechts.*

Zo komt er in ons zandbakje successievelijk het volgende te staan:

289	13489	18769	19363
67	67	67	67

De deling is nog lastiger.
Een ander bezwaar lag in het feit dat de vorm van de nieuwe symbolen 1, 2, ..., 9, niet vastlag (zelfs tegenwoordig kan men op de markt in Arabische landen nog voor onaangename verrassingen komen te staan, als men niet weet dat de gedrukte 2 er hetzelfde uitziet als de handgeschreven 3).
Een voordeel van het systeem is dat zeer grote getallen gemakkelijk geschreven kunnen worden en de voorstanders maakten hiermee propaganda. Al-Khwarizmi en anderen gebruikten bijvoorbeeld de beroemde schaakbordopgave: Op het eerste vakje van een schaakbord ligt één graankorrel, op het tweede liggen twee korrels, op het derde vier, enzovoort.
Hoeveel korrels liggen op het hele bord? Het antwoord is met behulp van 'onze' cijfers gemakkelijk te geven:

$$1 + 2 + \ldots 2^{63} = 2^{64} - 1 = (((16^2)^2)^2)^2 - 1 =$$

$$= 18446744073709551615$$

Met andere systemen was dit veel moeilijker!
We gaan nu naar middeleeuws Europa. Ook daar werd het systeem in eerste instantie niet enthousiast ontvangen. Men gebruikte liever de abacus (telraam) met steentjes (calculi, vandaar ons 'calculus') om te rekenen en de Romeinse cijfers om het resultaat op te schrijven. Iedereen gebruikt nu eenmaal het liefst de methode die hij van jongsafaan geleerd heeft.
De wiskundige Leonardo Fibonacci (1180 - ca. 1250), tegenwoordig vooral bekend door de Fibonaccigetallen, zag echter de voordelen van 'onze' cijfers boven andere systemen in. In 1202 schreef hij een boek over dit onderwerp, onder de misleidende titel 'Liber Abaci', met vele voorbeelden uit de koopmanspraktijk. Hiermee werd wel belangstelling gewekt, maar de problemen waren nog niet uit de wereld. Omdat de vorm van de cijfers nog niet vastlag (de boekdrukkunst was nog niet uitgevonden) waren er veel mogelijkheden tot fraude en in Florence werd het in 1299 zelfs wettelijk verboden de nieu-

we cijfers bij het boekhouden te gebruiken, op straffe van een hoge boete.
Toch hebben de ontwikkelingen in Italië tot gevolg gehad dat onze cijfers zich hebben doorgezet. In de veertiende eeuw werden ze op de Italiaanse 'businessschools' ingevoerd, zodat de jonge generaties kooplieden erin werden getraind. Na de uitvinding van de boekdrukkunst omstreeks 1450, werden de vormen van de cijfers gestandaardiseerd zoals we ze nu kennen.

Het zal nu duidelijk zijn, dat de moderne manier om natuurlijke getallen te schrijven, het resultaat is van een lange en boeiende ontwikkeling waaraan door vele volkeren en culturen is bijgedragen. Dit geldt ook voor het Nederlands cultuurgebied, want het rekenen met decimalen achter de komma is in West-Europa in 1585 door de Nederlander Simon Stevin ingevoerd (nadat het al eerder in de Arabische wereld was ontdekt, maar dat wist Stevin niet).

Het bovenstaande is maar een kleine greep uit de geschiedenis. Veel meer gegevens over 'onze' cijfers en over de getalsystemen van alle mogelijke andere culturen zijn te vinden in het zeer leesbare boek *De wereld van het getal* door J. Ifrah (onlangs in het Nederlands vertaald). Van harte aanbevolen!