Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid

K. Gravemeijer
OW&OC, RU Utrecht

De strategieën die de leerlingen bij het oplossen van algebra-opgaven gebruiken verschillen nogal eens van de oplossingsmethoden die wij zelf zouden kiezen. Er zijn grofweg twee typen verschillen. In het ene geval maken de leerlingen geen gebruik van handige standaardprocedures, in het andere geval kiezen ze te snel voor een standaardprocedure in een situatie waar dat nu juist niet handig is. [1]

Vaak pakken de leerlingen een opgave op een primitieve manier aan. Dan wordt de vergelijking:

$$2x = 3$$

opgelost door naar een getal te zoeken waarvan het dubbele 3 is.
Bij: $x + 5 = 7$
zoekt de leerling het getal dat je bij 5 op moet tellen om 7 te krijgen.
En: $(x + 6)^2$
wordt volledig met de boogjesmethode (papegaaienbek) uitgewerkt, hoewel de merkwaardige produkten allang bekend zijn:

$$(x-6)^2 = (x-6)(x-6) = x^2 - 6x - 6x + 36 =$$
$$= x^2 - 12x + 36$$

Soms gebruiken de leerlingen de standaardprocedures dus niet. In andere gevallen gebruiken ze ze weer ten onrechte. Wenger (1987) ondervond dit toen hij een zestigtal studenten deze opgave voorlegde:

los v op uit: $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$

De meeste studenten kiezen de verkeerde procedure. Een aantal begint met door $\sqrt{u}$ te delen, anderen brengen alles naar een kant. Meer dan een kwart probeert de wortels te verdrijven door te kwadrateren. Slechts één op de vier ziet dat het een eenvoudige lineaire vergelijking is en brengt alles met v naar links:

$$v\sqrt{u} - 2v\sqrt{1+u} = 1$$

waarna:

$$v[\sqrt{u} - 2\sqrt{1+u}\ ] = 1$$

en:

$$v = \frac{1}{\sqrt{u} - 2\sqrt{1+u}}$$

volgt.
De studenten waar het hierover gaat hadden zo'n drie jaar highschool-wiskunde achter de rug. Toch 'zien ze niet wat er staat'.
Ervaren oplossers kijken meer globaal naar dit soort opgaven en zien dan zoiets als:

$$v\mathrm{A} = 1 + 2v\mathrm{B}$$

Dan is de oplossing verder eenvoudig: de termen met v naar een kant brengen en v isoleren.

Er zijn tal van opgaven die sterk vereenvoudigd kunnen worden door meer globaal te kijken. Denk bijvoorbeeld aan een opgave als:

$$(x-2)^2 - 18(x-2) + 9 = 0$$

Indien je dit 'ziet' als:

$$p^2 - 18p + 9 = 0$$

is deze opgave veel eenvoudiger dan wanneer je begint met haakjes wegwerken.
Zo zijn er meer voorbeelden te bedenken. Waar het om gaat is het 'globaal kijken' wat ervaren oplossers spontaan doen en de meeste leerlingen juist niet.

Soorten oplossingsvaardigheid

Er zijn grofweg drie manieren waarop een opgave aangepakt kan worden: informeel, routinematig of deskundig. Hoewel het een het ander natuurlijk niet hoeft uit te sluiten.
De oplossingsmethoden die de leerlingen zelf bedenken worden *informele strategieën* genoemd. Meestal zijn deze oplossingsmethoden primitiever en meer aan de si-

tuatie gebonden dan de *formele oplossingsmethoden* die de leerlingen standaard aangeboden krijgen. Een vergelijking als $2x = 3$ oplossen door te zoeken naar het getal dat voldoet aan 'twee keer het getal is drie', is een voorbeeld van een informele strategie.
Een essentieel kenmerk van dit type methoden is dat de leerlingen, dankzij het concrete karakter van de oplossing, begrijpen wat ze doen. Dat is waarschijnlijk ook de reden waarom ze voor deze strategieën kiezen, het zijn strategieën die ze vertrouwen.

Het routinematig werken steunt vaak op *ingeslepen routines*. Bij de opgave 'los v op uit $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$' zetten deze routines de leerlingen op het verkeerde spoor. De leerlingen denken een bepaald type te herkennen en deze herkenning werkt als heuristiek: 'Oh, deze opgave kun je denk ik oplossen door ...'
Nu kan het herkennen van opgavetypen heel handig zijn, maar hier gaat het om blinde generalisaties; de leerlingen gaan teveel af op uiterlijke kenmerken. Dergelijke routines kunnen ontstaan doordat nieuwe kennis te snel wordt ingevoerd, waardoor de leerlingen terugvallen op onbegrepen regeltjes. Ook kunnen ze het gevolg zijn van eenzijdige oefenstof. Zo ontdekte de hierboven aangehaalde Wenger dat de schoolboeken in het algemeen slechts één type vergelijkingen met wortels bevatte, namelijk opgaven van het type $\sqrt{x+p} - \sqrt{x+q} = r$ (met voor p, q en r steeds wisselende getallen). De leerlingen slijpen zo een oplossingsmethode in die uitsluitend bruikbaar is voor heel specifieke gevallen. [2]

Algebraïsche deskundigheid uit zich onder meer in 'globaal kijken'. In het voorbeeld van Wenger worden de wortelexpressies even tussen haakjes gezet en pas later weer ingevuld. Ik noem dit 'globaliseren' en 'substitueren' om de twee kanten van de medaille aan te duiden, het veralgemeniseren en het invullen.
Een ander aspect van algebraïsche deskundigheid is de manier waarop het concept 'lineariteit' functioneert. De totale aanpak van $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$ wordt gestuurd door de constatering dat de vergelijking lineair is in v. Dit idee van lineariteit roept strategieën op als 'het *samennemen* van de termen waar v in voorkomt' en 'het *isoleren* van v'. In samenhang met het globaliseren kan dit concept bijvoorbeeld ook de weg naar de oplossing van $4x^2 + 18 = 7x^2$ wijzen, wanneer geconstateerd wordt dat deze vergelijking lineair is in $[x^2]$.
Dit vraagt een fundamenteler begrip van lineariteit dan dat van de leerling die lineariteit alleen verbindt met de vergelijking van de rechte lijn.

'Globaal kijken' als doelstelling

In het project W12-16 wordt onderzocht of we zoiets als *globaal kijken* niet tot doelstelling kunnen verheffen. In het vervolg van dit artikel richt ik mij verder op deze doelstelling.
Het ontwikkelen van een globale kijk op algebraïsche (of rekenkundige) uitdrukkingen komt in de plaats van het inoefenen van standaardprocedures voor standaardgevallen. Het gaat dan om de structuur en de dynamiek van deze uitdrukkingen.
De leerlingen moeten bijvoorbeeld weten hoe je een uitdrukking als $5 + 7 * (18 - 2)$ of $5 + 7 * (18 - x)$ open kunt breken. Dus dat deze gelezen kan worden als $5 + [\underline{7 * (18-2)}]$ of als $5 + 7 * [\underline{(18-2)}]$ maar niet als $[\underline{5+7}] * (18 - 2)$. Zo'n stuk wat tussen haakjes gezet kan worden noemen we een totaalobject. Het kunnen afzonderen van totaalobjecten is een voorwaarde voor het globaliseren en substitueren.
Daarnaast vinden we dat de leerlingen ook zicht moeten krijgen op de relatieve orde van grootte van de verschillende totaalobjecten. In het pakket *Winnende formules* moeten ze bijvoorbeeld kunnen beredeneren dat:

$$n * n * n$$

op den duur (als n heel groot wordt) groter wordt dan

$$4 * n * n$$

(zie Goddijn; 1990). Bovendien dienen de leerlingen te leren kijken naar samenhangen; bijvoorbeeld: hoe x en y samenhangen als $x + y = 6$, of als $x * y = 6$?

Leren globaliseren en substitueren

Bij een globale kijk op formules en dergelijke gaat het niet in de eerste plaats om een vaardigheid. Het gaat vooral om een houding, om de neiging eerst te kijken hoe de gegeven uitdrukking in elkaar zit.
Kunnen de leerlingen dit leren?
Volgens mij kan dat via indirect leren.
Bij leren wordt in het algemeen gedacht aan intentioneel leren: de leerling leert datgene waar zijn aandacht op gericht is. Maar naast dit intentionele leren speelt zich ook een onbewust leerproces af.
Het meest duidelijke bewijs van zo'n onbewust leerproces is wel het ontstaan van de onhandige heuristiek zoals hierboven beschreven. Deze heuristiek was het gevolg van een eenzijdig opgave-aanbod; blijkbaar hebben de leerlingen daar impliciet de algemene kenmerken uitgehaald en de oplossingsprocedure gegeneraliseerd.
Indirect leren kan natuurlijk ook positieve effecten hebben. Zuidema en Weber (1990) laten bijvoorbeeld zien hoe belangrijk het indirecte leren is bij de werkwoordsspelling. Het blijkt dat ervaren spellers de geleerde spellingregels niet bewust toepassen. Het nalopen van alle regels zou het schrijven van teksten ook te veel vertragen. De spelling verloopt in het algemeen automatisch, maar de speller ontwikkelt een heuristiek die hem waarschuwt wanneer hij in de fout zou kunnen gaan.
Spellingfouten kunnen gemakkelijk ontstaan wanneer de persoonsvorm van een bepaald werkwoord bijna identiek is aan het voltooid deelwoord. Dit is bijvoorbeeld het geval bij het werkwoord vervolgen: 'Eenzaam vervolg*t* hij zijn weg. Wordt vervolg*d*'. Hier moet de schrijver zich ervan vergewissen of hij met een voltooid deelwoord of met een persoonsvorm van doen heeft. Blijkbaar ontwikkelen de meeste spellers een heuristiek

die hen bij dit type werkwoorden waarschuwt.
Zuidema en Weber (1990) veronderstellen dat het indirecte leren dat hieraan ten grondslag ligt, versneld kan worden. Zij ontwikkelen hiervoor een computerprogramma dat de leerlingen systematisch waarschuwt wanneer er zo'n probleemgeval in een tekst voorkomt.

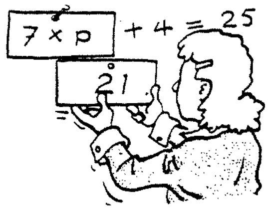
Voor de algebra willen we een computerprogramma ontwikkelen dat de leerlingen stimuleert tot globaliseren en substitueren. Het programma wordt voorlopig algebra-editor genoemd. De editor ondersteunt het omwerken en herformuleren van formules door gebruik te maken van frames.
De belangrijkste functies zijn het:
- met frames afdekken van totaalobjecten, bijvoorbeeld:
  $3 + 4 * (x - 3)^2 = 147 \Rightarrow 3 + \boxed{} = 147$;
- substitueren van totaalobjecten, door het invullen van frames;
- herschrijven van formules (kopiëren en veranderen).

De werking van deze drie functies is nader uitgewerkt in het voorbeeld hieronder.

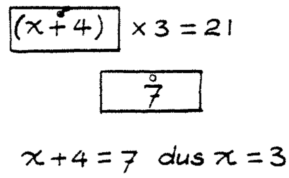
Het doel van het programma is niet de leerlingen te leren substitueren, het programma is bedoeld als gereedschap. Leerlingen die weten dat je màg substitueren worden door de beschikbaarheid van dit hulpmiddel gestimuleerd om dat ook te dóen. Dat versterkt dan weer de neiging tot globaal kijken.

Informele strategieën

Een bijkomend voordeel is dat de leerlingen – net als bij de bordjesmethode van Moderne Wiskunde (Bosman, e.a.; 1989) – informele strategieën kunnen gebruiken.



Moderne wiskunde blz. 224.



Moderne wiskunde blz. 225.

Deze manier van werken kan voorbereid worden met de zogenoemde 'puzzelsommen' [3] die zijn opgenomen in het pakket *Praktisch Rekenen* (Gravemeijer & Querelle; 1988).
Hier wordt gestart met wat we dubbelsommen genoemd hebben:

Voorbeeld:

Actie	*Op het scherm*	*Toelichting*
Intypen vergelijking	$3 + 4 * (x - 3)^2 = 147$	
Globaliseren: afdekken van $4 * (x - 3)^2$	$3 + \boxed{} = 147$	De leerling geeft met de muis aan dat $4 * (x - 3)^2$ afgedekt moet worden. Wat is afgedekt wordt in het geheugen opgeslagen.
Onbekende bepalen		Bedenken of berekenen dat er 144 op de plaats van het frame moet staan.
Vergelijking aanpassen: verwijderen van '3 +' en veranderen van '147' in '144'	$\boxed{} = 144$	Met behulp van de muis wordt 3 weggehaald en wordt 147 in 144 veranderd.
Substitueren: $\boxed{} = 4 * (x - 3)^2$	$4 * (x - 3)^2 = 144$	Door 'aanklikken' van het frame vraagt de leerling de computer het frame weer te vervangen door het oorspronkelijke totaalobject.
Globaliseren: afdekken van $(x - 3)^2$	$4 * \langle\rangle = 144$	
Onbekende bepalen		
Vergelijking aanpassen: verwijderen van '4*' en veranderen van '144' in '36'	$\langle\rangle = 36$	
Substitueren: $\langle\rangle = (x - 3)^2$ enz.	$(x - 3)^2 = 36$	

$6 + 6 = 10 + 2$	is dat waar? ....
$13 - 8 = 7 + 7$	is dat waar? ....
$3 \times 5 = 20 - 5$	is dat waar? ....
$17 + 5 = 5 + 17$	is dat waar? ....

De leerlingen moeten daarna zelf dubbelsommen bedenken, onder andere onder de volgende randvoorwaarden:

>> *Bedenk dubbelsommen waar twee keer hetzelfde getal in voorkomt.*

>> *Bedenk dubbelsommen waar drie keer hetzelfde getal in voorkomt.*

Daarna wordt de leerlingen gevraagd de dubbelsommen om te zetten in puzzelsommen door één of meer gelijke getallen af te dekken.

Maak een dubbelsom: $10 + 5 = 3 \times 5$

Dek de gelijke getallen af: $10 + \square = 3 \times \square$

Dan is dit de raadselsom: $10 + \square = 3 \times \square$

Welk getal past in het hokje?

Bij het oplossen van de puzzelsommen kunnen de informele strategieën goed tot ontwikkeling komen.
Later kan ontdekt worden dat er speciale puzzelsommen zijn, zoals de puzzelsommen waarbij elk getal voldoet. Daar gaat het eigelijk om herleiden. Deze sommen kunnen onderzocht worden en kennis van het herleiden kan vervolgens ingezet worden om nieuwe puzzelsommen te bedenken en op te lossen. In combinatie met het globaliseren en substitueren kunnen hier standaard strategieën voor het oplossen van vergelijkingen uit afgeleid worden.

$$\square = \square$$
$$\Leftrightarrow 3\square = 3\square$$

kan bijvoorbeeld gegeneraliseerd worden naar:

$$\boxed{} = \boxed{}$$
$$\Leftrightarrow 3\boxed{} = 3\boxed{}$$

en

$$\square = \square$$
$$\Leftrightarrow \square + 7 = \square + 7$$

kan gegeneraliseerd worden naar iets als:

$$\boxed{} = \boxed{}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{} + 3x = \boxed{} + 3x$$

Voor de meeste leerlingen lijkt mij dit type redeneringen echter te abstract. Dan zie ik meer in strategieën als:

$$3x + 7 = 5x + 2$$
$$\Leftrightarrow 2x = 5,$$

al dan niet expliciet ondersteund door een substitutiemethode:

$$[3x + 2] + 5 = [3x + 2] + 2x.$$

Of in de redenering dat de twee leden van een vergelijking gelijk zijn wanneer hun verschil nul is.

$$10 - 5x = 3x - 2$$
$$\Leftrightarrow 10 - 5x - (3x - 2) = 0$$

We stoten daarbij overigens op een variant van de *'min-maal-min'-regel.* Hoewel je zou kunnen zeggen dat bij de uitwerking van $-(3x - 2)$ de vermenigvuldiging -1 maal -2 uitgerekend moet worden, gaat het hier niet echt om het vermenigvuldigen van negatieve getallen. In feite is het zo dat je $3x$ met 2 moet verminderen voor je het van het totaal afhaalt.
Door nu:

$$\boxed{} - (3x)$$
en $$\boxed{} - (3x - 2)$$

te vergelijken, kan ingezien worden dat de uitkomst in het tweede geval 2 groter wordt. Dat je met andere woorden ook eerst $3x$ kunt aftrekken en er daarna 2 bij op kunt tellen. Naast de gebruikelijke didactische ingangen biedt het globaliseren en substitueren dus een extra mogelijkheid het rekenen met negatieve getallen voor te bereiden.

Besluit

Met steun van het globaliseren en substitueren kunnen de leerlingen langer gebruik blijven maken van informele strategieën. Zelfs een opgave als:

$$3 + 4 * (x - 3)^2 = 147$$

kan dan informeel opgelost worden. Het aanleren van standaardprocedures kan dus uitgesteld worden, waardoor er meer tijd beschikbaar is om de leerlingen de standaardprocedures zelf te laten ontwikkelen. Met opgaven als:

$$1 + \boxed{} = 1000$$

of:

$$100 / \boxed{} = 2$$

en dergelijke kunnen we de leerlingen geleidelijk aan op het spoor zetten van de inverse bewerking. Ook het omkeren van actieketens kan hier een nuttige functie vervullen (zie Goddijn; 1990).
Uiteraard moeten we wel bedenken dat deze oplossingsmethode ook beperkingen heeft. We moeten er vooral voor oppassen de leerlingen niet te misleiden met het

idee dat alle mogelijke vergelijkingen zo opgelost kunnen worden.

Het onderzoeken van de mogelijkheden en de beperkingen van zo'n aanpak zal dan ook zeker een onderdeel van het programma moeten vormen, net als het ontwikkelen van aanvullende procedures.
Aan de andere kant moeten we de mogelijkheden van deze methode ook weer niet onderschatten. Er is een grote verscheidenheid aan opgaven waarbij 'x opgelost' kan worden, mits de getallen in de opgave gelukkig gekozen zijn. Bijvoorbeeld:

>>*Los x op uit:*

$$\begin{aligned}
15 + 14/(x+1) &= 22\\
15 + \boxed{} &= 22\\
\boxed{} &= 7\\
14/(x+1) &= 7\\
14/\boxed{} &= 7\\
\boxed{} &= 2\\
x+1 &= 2\\
x &= 1
\end{aligned}$$

of:

Los x op uit:

$$\begin{aligned}
(x+2)(x+3) &= 12\\
[\underline{x+2}] * ([\underline{x+2}]+1) &= 12\\
\boxed{} * (\boxed{}+1) &= 12\\
\boxed{} &= 3 \text{ (als je alleen met positieve getallen rekent)}\\
[\underline{x+2}] &= 3\\
x &= 1
\end{aligned}$$

Noten

[1] Met dank aan Bram Lagerwerf voor zijn opmerkingen bij een eerdere versie van dit artikel.

[2] Al deze opgaven zijn op een standaard manier op te lossen omdat er na handig kwadrateren maar één term overblijft die x bevat:
(1) $\sqrt{(x+p)} - \sqrt{(x+q)} = r$
(2) $\sqrt{(x+p)} = \sqrt{(x+q)} + r$
(3) $(x+p) = (x+q) + r^2 + 2r\sqrt{(x+q)}$
(4) $p - q - r^2 = 2r\sqrt{(x+q)}$
enzovoort.

[3] Naar een idee van Herscovics & Kieran (1980).

Literatuur

[1] Bosman, e.a.: *Moderne Wiskunde 1 lm*, 1989.
[2] Goddijn, A.: *En de variabelen, hoe staat het daarmee?*, Nieuwe Wiskrant jrg. 10 nr.1, pp. 12-20.
[3] Gravemeijer, K. en N. Querelle: *Praktisch Rekenen 1 & 2*, uitgave W12-16; Utrecht/Enschede; 1988.
[4] Herscovics, N. en C. Kieran: *Constructing meaning for the concept of equation*, Mathemathics Teacher; vol. 73 (1980), pp. 572 - 580.
[5] Wenger, R.: *Cognitive Science and Algebra Learning*, in: A.H. Schoenfeld (eds.): *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, London; 1987.
[6] Zuidema, J. en J. Weber: *Automatiseren van het spellen door incidenteel leren*, in P.R.J. Simons en J.G.L.C. Lodewijks: *Technologie/methodologie*, Onderwijs Research Dagen 1990, Nijmegen, ITS, 1990.