

Werktitel: informatie en modellen

Informatie- en modellengroep W12-16 [1]
OW & OC, RU Utrecht/SLO, Enschede

Waarover gaat het?

Op dit moment (juni 1990) verkeert Nederland in de oranjekoorts. Er is een ongelooflijke hoeveelheid prullaria te koop. Merchandising heet dat met een vakterm. De handel gaat er van uit dat ieder huishouden straks minstens drie attributen aan zal schaffen. Of er goed verdiend gaat worden, hangt uiteraard voor een belangrijk deel af van de prestaties van 'onze jongens' bij het WK voetballen in Italië. In elk geval is er, nog voor er één bal getrapt is, al voor zeker dertig miljoen gulden in handelswaar geïnvesteerd en de verwachting is dat de opbrengsten de vijftig miljoen zullen overstijgen. Een woordvoerder van het door de KNVB ingehuurde adviesbureau zegt hier verder over: 'Haalt Nederland de tweede ronde, dan zullen de opbrengsten met 20 tot 25 procent stijgen. Halen we de kwartfinale, dan verwacht ik een verhoging tot 50%'. Over wat daarna nog allemaal mogelijk is, spreekt hij zich wijselijk liever niet uit. Overigens, voor wie geen WK meer kan zien wordt er wel een anti-wk-busreis aangeboden.[2]

De paragraaf die u zojuist heeft gelezen staat bol van de kwantitatieve informatie, waarvan de herkomst nogal onduidelijk is. Misschien heeft de woordvoerder van het adviesbureau een goede intuïtie en weet hij die om te zetten in de bovenstaande beweringen. Maar het is ook mogelijk, dat de uitspraken zijn gedaan op grond van een model, dat het koopgedrag van de Nederlandse burger bij belangrijke sportevenementen beschrijft. Het één hoeft het ander trouwens niet uit te sluiten, intuïtie gecombineerd met kennis zal waarschijnlijk wel tot de beste uitspraken leiden.

Door de media worden we voortdurend overspoeld met dergelijke min-of-meer gekwantificeerde informatie. Nog een kleine greep uit de actualiteit: de Cito-computers zijn op zoek naar de cesuur bij het examen; onze milieu-minister onderzoekt mogelijkheden om ons afval te beperken; volgens de berekeningen van het Centraal Bureau voor de Statistiek, zal het niet meevallen om de koppeling tussen lonen en uitkeringen te betalen.

Allemaal belangrijke zaken, waar een hoop wiskunde aan te pas komt. Bij het verwerken van gegevens wordt

statistiek gebruikt. Voorspellen met modellen, mogelijkheden tellen en 'wegen' bepalen, zijn aan de orde van de dag. Omgaan met informatie en modellen, het wordt steeds belangrijker in het dagelijkse leven, in het bedrijfsleven, maar ook in de voortgezette opleidingen. De opkomst van de computer speelt daarbij zeker een rol. Mede onder invloed van de informatietechnologie zijn dit soort zaken steeds belangrijker geworden. Waar vroeger vooral werk was voor theoretici, liggen nu de praktische toepassingen voor het oprapen. Het bijkomende rekenwerk is gelukkig niet meer zo'n belemmering als voorheen.

Informatie en Modellen in W12-16

Binnen het W12-16 project werken we aan een leerstoflijn die voorlopig als werktitel heeft: *Informatie en Modellen*. Bij dit leerstofonderdeel willen we de leerlingen, op hun eigen niveau, laten zien hoe wiskunde gebruikt wordt in de maatschappij, als op basis van informatie met modellen gewerkt wordt. We halen onze onderwerpen uit statistiek, kansrekening, grafentheorie en combinatoriek. In het huidige programma is voor dit soort zaken vrijwel geen aandacht, afgezien van het onderdeel statistiek, dat echter een zeer bescheiden plaats inneemt. Modelleren met grafieken en verbanden laten we hier buiten beschouwing, dat valt onder de algebralin.

Informatie en modellen is bij uitstek een gebied met zicht op de toekomst. Een eerstegraadsvergelijking los je in 2000 ook wel op met een rekenmachine, maar wat begrip van informatie en modellen zal dan eens te meer nodig zijn. Een nieuw programmaonderdeel voor twaalf- tot zestienjarigen dus, met nuttige kennis voor later en een heleboel mooie wiskunde. En natuurlijk ook met gebruik van de computer, die op dit gebied niet meer weg te denken is.

In de nu volgende paragrafen geven we een korte karakteristiek van de verschillende deelonderwerpen en hun onderlinge samenhang.

Statistiek

Statistiek is een oude bekende in het programma, maar het is wel de bedoeling dat dit onderdeel een ander ge-

zicht krijgt. Met een summiere behandeling van enkele standaardtechniekjes zal in de toekomst niet meer kunnen worden volstaan. De bedoeling is het accent te verleggen naar het kunnen doorzien van de vele vormen van grafische representatie die in de huidige maatschappij over ons worden uitgestort. Dat betekent: allerlei (vreemdsoortige) tabellen en grafieken kunnen lezen en begrijpen, zo mogelijk vanuit een kritische houding. Hierbij denken we bijvoorbeeld aan informatie zoals die wordt verstrekt in het Statistisch Zakboek van het CBS en in de Consumentengids.

Schets van een opgave (in het leerlingenmateriaal is een en ander wat verder uitgewerkt):

Een tabel uit de Consumentengids met de resultaten van een test over lekkerbekjes:

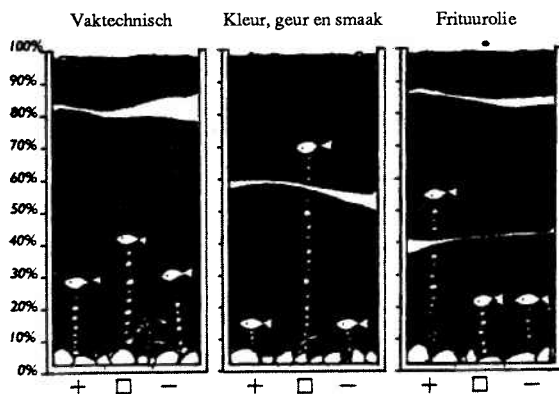
LEKKERBEKJES

VERKOOPPUNT	LAATSEZONER LAATSEZONER LAATSEZONER	LAATSEZONER LAATSEZONER LAATSEZONER	LAATSEZONER LAATSEZONER LAATSEZONER	LAATSEZONER LAATSEZONER LAATSEZONER	LAATSEZONER LAATSEZONER LAATSEZONER
OP 14 MARKTEN	65-115-232	14,20-18,20-24,20	2- 4- 8	2-10-2	8-4-2
BIJ 8 VSKAARREN ¹⁾	86-146-272	13,80-18,20-24,50	2- 6- 0	0- 5-3	4-2-2
IN 18 VSWINKELS ²⁾	47-121-214	15,00-18,70-26,80	7- 7- 4	4-13-1	10-3-5
40 VERKOOPPUNTEN	47-125-272	13,80-18,40-26,80	11-17-12	6-28-4	22-9-9

1 Inclusief veldkassen 2 Inclusief supermarkten

In de kolommen staan steeds rijtjes van drie getallen.
>> Ga per kolom na wat de betekenis van die getallen is.

>> Bij de tabel hoort de volgende grafiek.
Wat brengt die precies in beeld?



De kwaliteit van lekkerbekjes in procenten

Verder streven we ook na dat leerlingen iets weten van het gebruik van statistisch materiaal voor het doen van voorspellingen. Hiervoor is de context bevolkingsgroei gekozen [3]. Het voordeel van deze context is het tijdloze karakter, gecombineerd met de nimmer afnemende actualiteit.

Het zou helemaal mooi zijn als er ruimte is om leerlingen zelf een klein onderzoekje te laten uitvoeren. Binnen de projectscholen zijn al enkele ervaringen op dit gebied. Zo hebben de leerlingen uit klas 3 van de proefschool Greydanus in Zwolle in het kader van een werkweek onderzoek gedaan naar het woon-werkverkeer in een plaats in Duitsland. Enkele groepjes leerlingen van de Radboudmavo te Oldenzaal hebben voor een schoolonderzoek eveneens eigen onderzoekjes uitgevoerd.

Verder ligt inzet van computer bij statistiek voor de hand, maar binnen het project zijn we er nog niet aan toegekomen dit onderdeel verder uit te werken.

Voorspellen

In het verleden zijn diverse pogingen om kansrekening in de onderbouw te behandelen gestrand [4]. We willen hier niet een zoveelste poging aan toevoegen. Wel vinden we het wenselijk dat bij wiskunde iets gedaan wordt met het gegeven dat nu eenmaal veel zaken in het leven gedeeltelijk of geheel door het toeval bepaald worden. De bedoeling is dat leerlingen een model maken (bijvoorbeeld een boomdiagram) voor iets wat zich in de toekomst kan afspelen en aan de hand daarvan redeneren over de waarschijnlijkheid van verschillende mogelijkheden. Dit klinkt misschien wat abstract, daarom een schets van een opgave:

De stand in de voorronden voor het WK in groep 3 is op 1 november 1989:

Sovjet Unie	7 gespeeld	9 punten
Turkije	7 gespeeld	7 punten
Oostenrijk	7 gespeeld	7 punten
Oost Duitsland	7 gespeeld	7 punten
IJsland	8 gespeeld	6 punten

Het programma is nog: Sovjet Unie - Turkije en Oostenrijk - Oost Duitsland. De beste twee gaan naar Italië naar het wereldkampioenschap.

>>Maak een boom van mogelijkheden.
>>Doe een uitspraak over de kansen van de verschillende ploegen om zich te plaatsen.

Het aardige van dit onderwerp (eigenlijk van wedstrijden in het algemeen) is, dat je vooraf uitspraken kunt doen over de uitslag en de kansen van de diverse deelnemende ploegen daarbij en dat de gebeurtenis waarin je geïnteresseerd bent zich vervolgens ook daadwerkelijk voltrekt. Je kunt je voorspelling achteraf dus toetsen aan de werkelijkheid. Dat is heel wat boeiender dan munten, dobbelstenen en vazen met balletjes.

Uit het voorbeeld blijkt ook dat het vooral gaat om een meer kwalitatieve aanpak en niet om uitgebreide rekenexercities. Anderzijds willen we enig telwerk niet uit de weg gaan. Onder het kopje 'combinatoriek' komen we hierop terug.

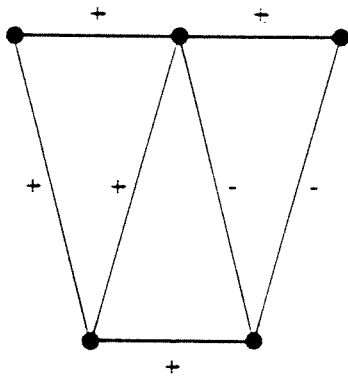
Grafentheorie

Het werken met grafen loopt als een rode draad door de leerstoflijn *Informatie en Modellen* heen. Een graaf in de wiskunde bestaat uit een stel punten die verbonden kunnen zijn door lijnen.

Een belangrijk thema bij *Informatie en Modellen* is het vertalen van een situatie naar een graaf en weer terug. Geografische contexten liggen voor de hand, reden om ook aandacht te besteden aan het verschil tussen een kaart en een graaf [5].

Overigens komen ook niet-geografische situatie aan bod, zoals blijkt uit de volgende opgaven:

>> *Het verhaal en het plaatje hieronder horen bij elkaar. Zet de namen uit het verhaal op de goede plaats in het plaatje.*



Marloes en Wim, die allebei erg muzikaal zijn, spelen in dezelfde band en kunnen goed met elkaar opschieten. Wim was vroeger nogal dik bevriend met Fred, maar dat botert de laatste tijd absoluut niet meer. Fred trekt veel op met Suus, maar Suus en Wim, daar komt altijd ruzie van. Fred, Marlies en Henk vormen een vriendenclubje, ze gaan al jaren met elkaar op vakantie.

>> *Tegen een vriend(in) kun je zeggen: 'Jouw vriend(inn)en zijn mijn vriend(inn)en, jouw vijanden zijn mijn vijanden.'*
Klopt dat hier?

Voor de eerste vraag weten de leerlingen allerlei aardige strategieën te verzinnen. Beginnen met één persoon en dan proberen, werken vanuit twee personen, maar bijvoorbeeld ook driehoeken van personen maken en die inpassen in de graaf.

Routeproblemen

Op dit moment hebben we in overweging het werken met grafen voor de derde of vierde klas toe te spitsen op de zogenaamde routeproblemen. Of dit een geslaagde keus is, staat nog ter discussie. Omdat dit onderwerp wellicht vrij onbekend is, besteden we er hier toch alvast wat aandacht aan.

Bij routeproblemen zijn de verbindingen in een graaf voorzien van een zeker gewicht (vaak afstand, tijd of kosten) en is het doel een route door de graaf te vinden die aan bepaalde voorwaarden voldoet. Uit de verschillende typen problemen die mogelijk zijn hebben we er twee uitgekozen: de kortste weg en het handelsreizigersprobleem. In het eerste geval gaat het erom in de graaf de kortste weg tussen twee punten te vinden, in het tweede geval is het doel de kortst mogelijke rondreis langs alle punten van de graaf te vinden. Ogenschijnlijk twee vrijwel identieke vragen, waarvan de eerste binnen de

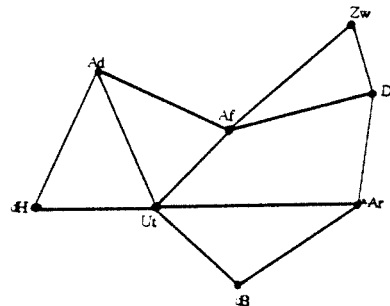
wiskunde goed is opgelost, maar de tweede tot op heden nog niet! Daarmee wordt zichtbaar dat wiskunde een levend vak is en niet een 'af' systeem.

Schets van een opgave over de kortste weg:

Een stukje van de afstandstabel uit het spoorboekje:

	Af	Ad	Ar	dB	dH	Dv	Ut	Zw
Amersfoort	-							
Amsterdam	45	-						
Arnhem	51	79	-					
Den Bosch	69	87	62	-				
Den Haag	81	63	118	108	-			
Deventer	58	113	45	107	139	-		
Utrecht	21	39	58	48	60	79	-	
Zwolle	66	111	76	135	147	31	87	-

Een graaf bij deze tabel:



>> *Hoe ver is het volgens de tabel van Zwolle naar Den Bosch?*

>> *Schrijf de bijbehorende afstanden uit de tabel bij de verbindingen.*

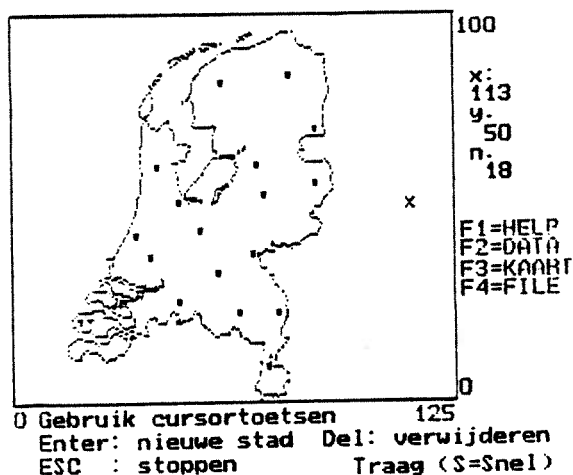
>> *Er zijn verschillende routes mogelijk van Zwolle naar Den Bosch. Welke?*

>> *Welke route heeft de NS gekozen? Hoe kun je dat afleiden uit de tabel?*

>> *In de tweede kolom staan twee fouten. Welke zijn dat, als je weet dat de opgegeven afstanden voor Amsterdam-Utrecht en Amsterdam-Den Haag in elk geval goed zijn?*

Bij dit onderdeel wordt ook gewerkt met enkele computerprogramma's, met behulp waarvan de verschillende manieren om routeproblemen aan te pakken door visuele animaties zichtbaar worden gemaakt. Dan blijkt dat het gezond verstand het tot op zekere hoogte wint van de computer. Pas als de grafen die onderzocht worden groot zijn, is de rigide aanpak volgens een algoritme doeltreffender dan de eigen intuïtie. Het blijkt voor leerlingen een aangename ervaring te zijn om te merken dat hun eigen oplossing beter is dan die van een computer! Vervolgens wordt dan nog ingegaan op de vraag hoe de computer precies te werk gaat, volgens welk voorschrift (algoritme). Er is aandacht voor wat algoritmen zijn en wat hun kwaliteit is.

Schets van een opgave uit *Routeproblemen* aan de hand van een beeldschermafdruk van de module *Handelsreiziger* uit het programma ORSTAT [6]:



Op de kaart staan de achttien studiecetra van de Open Universiteit getekend. Stel je voor dat een vrachtauto spullen moet afleveren op de achttien centra.

>> Probeer een zo zo goed mogelijke rondreis langs de achttien plaatsen te vinden.

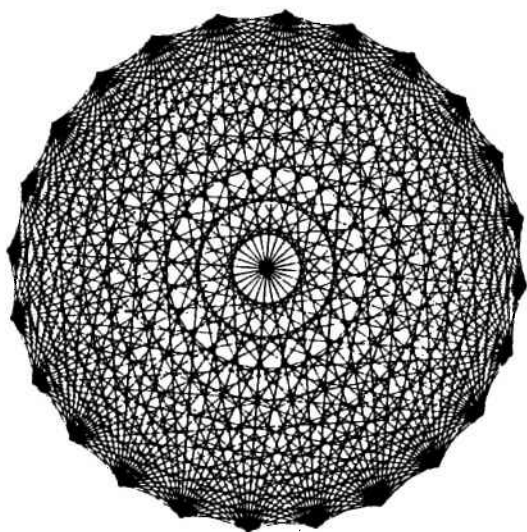
>> Ga vervolgens na welke rondreis de computer vindt.

>> Zijn de gevonden oplossingen in de praktijk bruikbaar als die auto écht gaat rondrijden?

Combinatoriek

Bij combinatoriek gaat het om 'handig tellen'. Eerst een opgave:

>> Hoeveel verbindingslijnstukken zijn er in de figuur hieronder?



Deze telvraag (geschikt voor klas 2) blinkt niet uit in originaliteit, maar het is er wel een die de tand des tijds kan doorstaan. Als je het systeem eenmaal weet, is het niet

zo moeilijk meer. Het zoeken naar het systeem en/of het snappen van de 'truc' spreekt de leerlingen in het algemeen wel aan.

Overigens ziet u aan deze opgave ook, dat we niet nastreven dat elke vraag betrekking heeft op een uit-het-leven-gegrepen context.

Een beetje handig kunnen tellen komt vaak van pas. Niet alleen bij *Informatie en Modellen*, maar ook elders, binnen en buiten de schoolwiskunde. Binnen de leerstoflijn van *Informatie en Modellen* is handig tellen bijvoorbeeld nodig om te begrijpen waarom het in de opgave hiervoor een hopeloze zaak is te proberen de kortste rondreis langs de achttien centra te vinden door systematisch alle mogelijkheden te proberen. Het aantal mogelijkheden bedraagt $17!/2$ (aangenomen dat de rijrichting er niet toe doet), wat héél veel is (in de orde 10^{14}).

Pakkettenschema

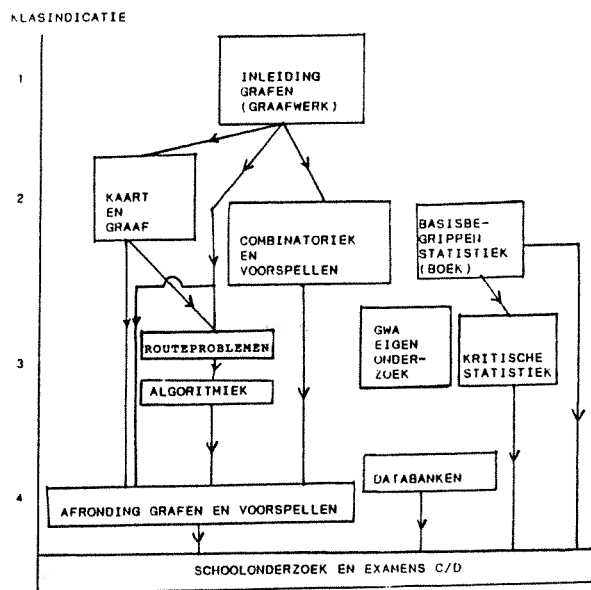
Hiermee is de rondgang langs de verschillende deelgebieden van *Informatie en Modellen* ten einde.

Een breed scala aan onderwerpen, die echter stuk voor stuk niet al te diepgaand aan de orde hoeven te komen. We denken meer aan een invulling in de breedte dan in de diepte.

De samenhang tussen de verschillende onderdelen moet gezocht worden in de volgende leidende principes:

- omgaan met en kritisch kijken naar informatie;
- modelvorming als reductie van de realiteit;
- interpretatie vanuit het model en terugkoppeling naar de vraagstelling;
- gegevens ordenen en karakteriseren met wiskundige middelen;
- computerinzet, maar ook: waarom computers en wat zijn ze waard?

Hieronder ziet u een pakkettenschema dat wij als groep momenteel hanteren. De meeste pakketten zijn al concreet uitgewerkt. De ervaringen die ermee opgedaan



zijn, verschillen nogal, van 'ervaringen in kleinere groepen' tot en met 'herhaalde malen op de proefscholen geprobeerd en bijgesteld'.

Tussen nu en 1992 zal er in dit schema ongetwijfeld nog het nodige veranderen. De praktijk leert, dat je via onderling overleg, maar vooral ook klasse-experimenten, gesprekken met docenten en andere deskundigen, toch voortdurend de zaak bij blijft stellen. De contouren van de *Informatie-en-Modellen-lijn* zijn met dit schema wat ons betreft echter wel in beeld gebracht. In de uiteindelijke voorstellen van '92 zult u het zeker herkennen.

Nascholing Informatie en Modellen

Bij lezing van het bovenstaande bekruipt u misschien het gevoel dat u zonder extra voorbereiding nauwelijks in staat zult zijn de verschillende onderdelen uit *Informatie en Modellen* te onderwijzen. Sommige onderwerpen zijn nieuw, het gebruik van de computer bijvoorbeeld, andere ademen een andere sfeer dan voorheen. In de (toekomstige) nascholing lijkt enige specifieke aandacht voor *Informatie en Modellen* dus zeker op z'n plaats. Het gebied bevat immers ondermeer elementen uit de discrete wiskunde, een onderdeel van de wiskunde dat in veel gevallen niet in de opleiding aan bod is gekomen. Vandaar dat we veronderstellen dat er met name op dit gebied bij docenten behoefte aan ondersteuning is. Het afgelopen jaar is dan ook een *Nascholingspakket Informatie en Modellen* ontwikkeld, een cursus van vier bijeenkomsten waarin, meestal exemplarisch, elementen uit de lijn naar voren komen.

De cursus is uitgeprobeerd bij het team (tien docenten) van de experimenteerschool Greydanus uit Zwolle. De bijeenkomsten zijn op school gehouden en duurden elk effectief anderhalf uur. Uit de evaluatie bleek dat een cursus als deze door docenten zinvol werd gevonden, in het bijzonder voor wat betreft achtergronden en eigen zekerheid over het onderwerp. Het nascholingspakket zal op basis van de opgedane ervaringen worden bijgesteld, zodat het in de toekomst geschikt zal zijn voor gebruik op grotere schaal.

Hoe verder?

En wat gaat er dan nog verder gebeuren? De komende twee jaar hebben we de tijd hard nodig om het nog ontbrekende materiaal te ontwikkelen en bestaand materiaal bij te stellen, vooral aan de hand van meer systematisch verzamelde klasse-ervaringen.

We raadplegen deskundigen van velerlei pluimage en proberen hun suggesties te verwerken. Een belangrijke taak is ook goede (voorbeeld) examensommen maken, en die uitproberen in de experimenteerscholen.

Tenslotte moeten we dan de balans opmaken. Alles wat gedaan en bedacht is en niet prijs gegeven mag worden aan de vergetelheid, zal op heldere en beknopte wijze moeten worden vastgelegd. Voor auteursteams, nascholers en, niet te vergeten, docenten.

Noten

- [1] De informatie- en modellengroep bestaat uit G. van den Heuvel, D. Kok, H. Krabbendam en H.B. Verhage.
- [2] Ontleend aan de Volkskrant van vrijdag 1 juni 1990.
- [3] Verhage, H.B.: *Zomaar twee lessen uit W12-16*, Nieuwe Wiskrant jrg 9 nr 3, mei 1990, pp.13-18.
In dit artikel een beschrijving van enkele lessen over statistiek en bevolkingsgroei.
- [4] *Leerplanontwikkeling onderweg 2a*, IOWO 1980, pp. 36-49.
Beschrijving van de ervaringen met *Greep op Kans*.
- [5] Heuvel, G. van den, H. Krabbendam: *De introductie van grafen bij twaalfjarigen*, Nieuwe Wiskrant jrg 9 nr 3, mei 1990, pp. 38-48.
In dit artikel uitvoerig aandacht voor de introductie van grafen vanuit een geografische context.
- [6] Kalvelagen, E. en H. Tijms, *ORSTAT: Software voor Operations Research en Statistiek*, Nieuwe Wiskrant jrg 9 nr 3, mei 1990 pp.50-54.
Het bedoelde programma maakt deel uit van het software pakket dat in dit artikel beschreven wordt.