# Recordverbetering van 99,99999%

**De puzzelrubriek**

**A. J. Goddijn**
OW&OC, RU Utrecht

Zou ik al wat ingezonden is naar aanleiding van de puzzelrubriek in Nieuwe Wiskrant 9,2 hier opnemen, dit nummer zou grofweg twee keer zo dik worden. Het zou een goed nummer worden, de kwaliteit van de inzendingen was hoog. Maar er staan PTT-tarieven in de weg en andere bezwaren.
Ik beperk me dus tot citeren uit brieven van degenen die uitgedaagd zijn door mijn opmerking dat het vinden van een bepaalde formule weleens lastig kon zijn. De formule is er nu en de diverse inzenders mogen er trots op zijn. Dat lijken ze me ook te zijn. Ze steken ook niet onder stoelen of banken dat het zweet kostte. Anders dan wat Henry Dudeney (1847-1930) ironisch aan het eind van 'The Professor's Puzzles' noteert:

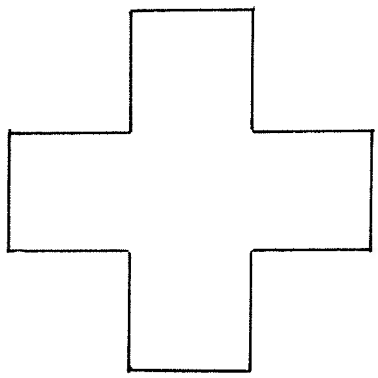
> 'The Professor gathered up his Japanese reptiles and wished us good-night with the usual seasonable compliments. We three who remained had one more pipe together, and then also left for our respective homes. Each believes that the other two racked their brains over Christmas in the determined attempt to master the Professor's puzzles; but when we next met at the club we were all unanimous in declaring that those puzzles which we had failed to solve 'we really had not had time to look at', while those we had mastered after an enormous amount of labour 'we had seen at the first glance directly we got home.'

## Eerst iets nieuws: snijden

Aan Henry Dudeney ontleen ik deze keer enkele puzzels. Dudeney creëerde er een ongelooflijke hoeveelheid van; soms triviaal, vaak lastig, meestal van eigen makelij en altijd ingekleed in een kort verhaaltje.
Zijn briljantste vind ik nog steeds de opdracht een gelijkzijdige driehoek in vier stukken te knippen, die tot een vierkant aaneengelegd kunnen worden. Hij publiceerde dit probleem in de Weekly Dispatch van 1902 en later (in 1905) in de Daily Mail. Slechts één van de honderden inzendingen trof doel!
De puzzel wordt vaak nog vermeld, meestal direct met een schetsje van de oplossing, zelden of nooit met een 'bewijs' dat de oplossing exact klopt. Zo lastig is dat.

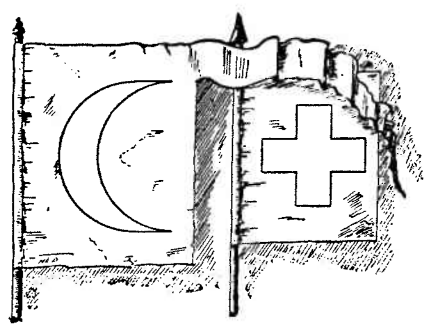
Vandaag andere snij-problemen. Sommige stammen van Dudeney, anderen zwerven vrij rond, enkele lijken nieuw.

*Opgave 63*



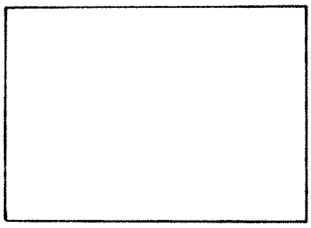
Dit kruis is opgebouwd uit vijf vierkanten.
Snijd het met twee rechte lijnen in stukken. Zorg dat van de stukken een vierkant gelegd kan worden.

*Opgave 64* (Naar Dudeney)



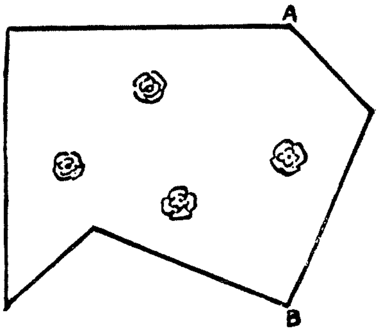
Na een van de kruistochten bracht Sir Hugh de Fortibus deze twee vlaggen mee uit het Heilige Land.
In een droom werd hem getoond hoe de maansikkel in het kruis kan worden omgevormd. (Dudeney gebruikt hier het woord 'converted', dat zowel 'veranderd' als 'bekeerd' betekent.)
De maansikkel is hier gevormd door twee halve cirkels en twee stukjes rechte lijn. De maansikkel gaat in tien stukken.
Nog dit: de vlag was aan twee kanten hetzelfde. Keren mag dus.
Tip: doe eerst opgave 63.

*Opgave 65*



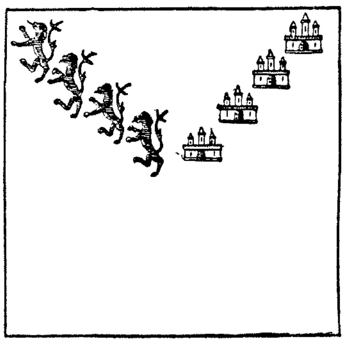
Van A4 naar vierkant.
Eerst één keer in één rechte lijn doorknippen. Dan één van de stukken nog eens in een rechte lijn doorknippen. Resultaat: drie stukken die een vierkant kunnen vormen. Dat 'van A4' is niet nodig. Bij welke rechthoeken lukt het?

*Opgave 66* (Naar Dudeney)




Alweer een vlag. Hij moet in twee stukken geknipt worden; de stukken moeten een vierkant vormen.
Van A naar B knippen is niet voldoende, want we willen graag dat de rozen een symmetrisch patroon gaan vormen. De rozen staan maar op één kant: dus niet keren. De kniplijn hoeft niet recht te zijn.

*Opgave 67* (Naar Dudeney)

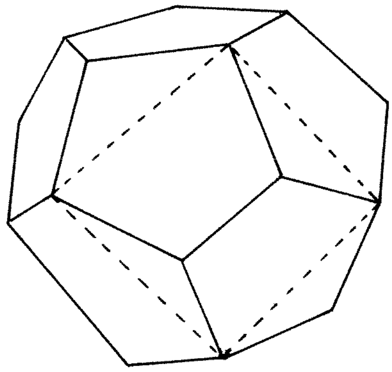


Een mooi versierd stuk stof, met leeuwen en kastelen. Het snijden mag natuurlijk niet door de versiering heen! Toch willen we vier gelijkvormige stukken, met op ieder stuk één leeuw, één kasteel.
De sneden zijn niet recht en de kastelen en leeuwen zitten op de stukken telkens anders.

## Snijden in de ruimte

Ruimtemeetkunde is in. Zie Hewet, Hawex, W12-16. Daar gaan we dan: twee opgaven over ruimtelijk snijden. Nu gaat het om vlakken, echte rechte platte vlakken, waarmee wordt gesneden.

*Opgave 68*: Het regelmatig twaalfvlak

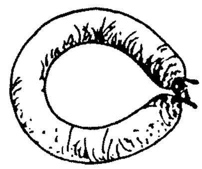


Van een regelmatig twaalfvlak is heel eenvoudig een stuk af te snijden zó dat er een vierkant zijvlak ontstaat. Zie illustratie.

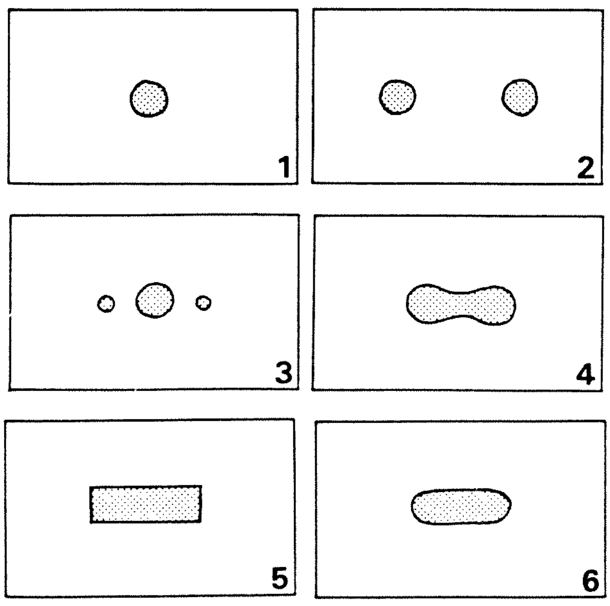
Het kan zelfs op dertig manieren: voor elke ribbe is er zo'n vierkant.

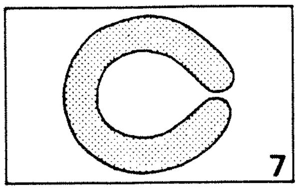
a. Kunnen we uit die dertig er zes handig kiezen, zodat er in ieder geval een kubus en zes van die dakvormige stukken ontstaat?
b. We doen al die dertig sneden in één keer en rapen uit de rommel dat stuk op dat het oorspronkelijke middelpunt van het twaalfvlak bevat.
   Hoe ziet dit juweel er eigenlijk uit?

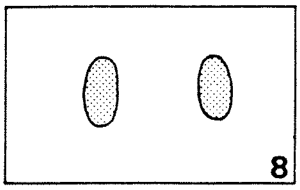
De fraaiste oplossing bij 68*b* lijkt me een bouwplaat!
In het W12-16 pakketje *Doorsneden* worden alledaagse dingen doorgesneden.



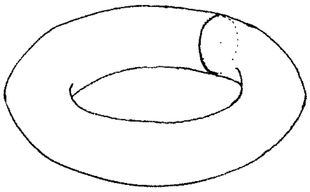
Een rookworst bijvoorbeeld. De bedoeling is te kijken of de aangegeven schetsjes doorsnee-vlakken van de worst zijn.



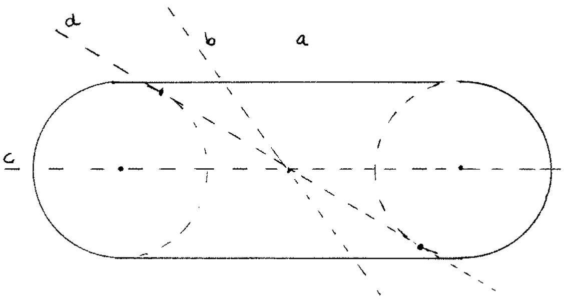



Dat brengt ons op het doorsnijden van de torus: een dóórlopende worst zonder loodje.

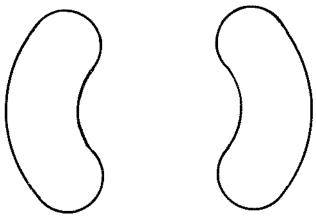


In het zijaanzicht geven we met stippellijnen de snijvlakken aan:

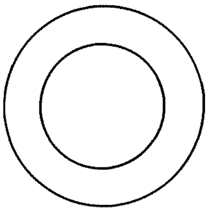



a. Dat is eenvoudig:

b. Dat is ongeveer:



c. Dat is ook eenvoudig:



Maar $d$? Dat is precies de overgang tussen twee gescheiden figuren en twee figuren in elkaar.
Beschrijf doorsnede $d$ zo precies mogelijk.
Tip: doorsnede-figuur $d$ heeft iets met $a$ en $c$ gemeen.

Er zijn lastige puzzels bij. Maar heeft het zin te proberen en te falen? Dudeney legt zijn Sir Hugh de Fortibus naar aanleiding van een moeilijke puzzel (geen inzenders vermoed ik) nog dit in de mond:

> 'Friends and retainers,' he said, 'if the strange offspring of my poor wit about which we have held pleasant counsel tonight hath mayhap had some small interest for ye, let these matters serve to call to mind the lesson that our fleeting life is rounded and beset with enigmas. Whence we came and whither we go be riddles, and albeit such as these we may never bring within our understanding, yet there be many others with which we and they that do come after us will ever strive for the answer. Whether success do attend or do not attend our labour, it is well that we make the attempt; for 'tis truly good and honourable to train the mind, and the wit, and the fancy of man, for out of such doth issue all manner of good in ways unforeseen for them that do come after us.'

## Terug naar Hanoi

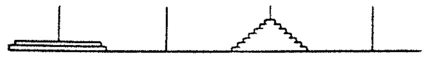
Nieuwe ideeën over de viertorenvariant van de bekende Hanoi-puzzel kwamen van diverse kanten:
- Maarten Bos van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden.
- Een collectief van de Hogeschool Katholieke Leergangen in Tilburg, bestaande uit: Markus Nijmeyer, Kees de Lange, Liesbet en Mike Staring.
- Ronald Keijzer uit Amsterdam.

Alle oplossingen verbeteren de strategie die in de vorige aflevering werd gebruikt.
Ik citeer daartoe eerst Maarten Bos:

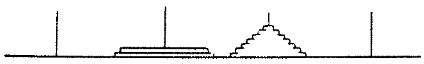
'De strategie uit de Wiskrant berust op recursie. Als je het aantal benodigde stappen bij gebruik van drie en vier torens achtereenvolgens $H_3(n)$ en $H_4(n)$ noemt, is die als volgt te formaliseren:

Startopstelling:

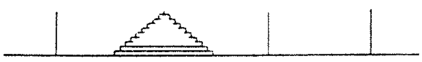
1. Verplaats $n-2$ schijven over vier torens, ($H_4(n-2)$ stappen):



2. Verplaats twee schijven over drie torens ($H_3(2)$ stappen):



3. Verplaats $n-2$ schijven over vier torens ($H_4(n-2)$ stappen).



Van het drie-toren probleem is bekend dat $H_3(n) = 2^n - 1$. Het totaal aantal stappen volgt zo uit de recursieformule:

$$H_4(n) = 2H_4(n-2) + H_3(2) = 2H_4(n) + 3$$

Na stap één zijn twee schijven blijven staan op de starttoren. De keuze voor juist twee schijven is arbitrair. Meer voor de hand liggend is het aantal schijven dat achter blijft van $n$ af te laten hangen.'

Hij probeerde in plaats van drie eerst $\frac{1}{2}n$ en $\frac{1}{3}n$, afgerond op gehele getallen. Dat gaf al vooruitgang.
Uiteindelijk wordt het toch: zoek bij elke $n$ de gunstigste verdeling op. Dus bepaal het minimum van $V_k(n)$, waarbij:

$$V_k(n) = 2 * H_4(n-k) + H_3(k), \text{ met } 1 \leqslant k \leqslant n-1 .$$

Of in de compacte notatie van de Tilburgers, gebruik makend van $H_3(k) = 2^k - 1$:

$$H_4(n) = \begin{cases} 1 \text{ als } n = 1 \\ \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \{2^k - 1 + 2 * H_4(n-k)\} \text{ als } n > 1 \end{cases}$$

Eenmaal zover laat $H_4(n)$ zich snel berekenen.
Ronald Keijzer en Maarten Bos doen dat met de computer. Ronald Keijzer wijst met slechts veertien regels eenvoudig Basic de antwoorden van de vorige keer definitief naar de prullenbak. $H_4(7) = 25$ met deze strategie en $H_4(64) = 18433$, ruim minder dan de $1.3 * 10^{10}$ van eerst. Zie de titel van deze rubriek.
Met de hand kan ook en ik neem de in Tilburg berekende tabel op:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_4(n)$ | 1 | 3 | 5 | 9 | 13 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | 65 | 81 |

De $H_4(3)$ stijgt steeds met een macht van 2 en bij 1, 3, 6, 10 en later moet de volgende macht van 2 genomen worden.

Maarten Bos zorgde dat de computer ook de $k_n$, die het minimum realiseert, afdrukte. Dit is het resultaat:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_n$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |

*Citaat*:

'Een merkwaardige reeks: tweemaal $k = 1$, driemaal $k = 2$, viermaal $k = 3$, enzovoorts. Deze reeks zet zich in ieder geval voort tot $n = 357$. Hoe kan ik nu de optimale $k$ uit $n$ berekenen?
Als je goed naar de reeks kijkt valt op dat de optimale $k$ steeds 1 hoger wordt bij achtereenvolgens 1, 3, 6, 10, 15. Dit zijn allemaal driehoeksgetallen. Hier introduceer ik een nieuwe notatie voor dergelijke getallen. Het $k^e$ driehoeksgetal noem ik $\Delta_k = k + \Delta_{k-1} = \frac{1}{2}k(k+1)$. De optimale $H_4(n)$ wordt nu als volgt:

$$H_4(n) = 2H_4(n-m) + H_3(m) \text{ waarbij } n = \Delta_m + r \text{ en } 0 \leqslant r \leqslant m$$

$\Delta_m$ is hier het grootste driehoeksgetal kleiner dan $n$; $r$ is de rest (vergelijk met delen met rest). Vervolgens wil ik weten welke $m$ bij een gegeven $n$ hoort. $m$ oplossen uit $n = \frac{1}{2}m(m+1)$ geeft:

$$m = \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 8n}}{2}\right]$$

De belangrijkste hartklop van $H_4(n)$ lijkt nu wel aan het licht gekomen. Maar is het echt zo?
Het Tilburg-collectief èn Maarten Bos komen onafhankelijk van elkaar op het volgende terecht:

> Voor $n \geqslant 2$ geldt:
> I: $H_4(n+1) = H_4(n) + 2^m$,
> waarbij $n = \Delta_m + r$ met $0 \leqslant r \leqslant m$
> II: $V_k(n)$ is minimaal als $k = m$.

Het kortste bewijs neemt eerst I apart bij de kop en gebruikt het dan om te laten zien dat de andere $V_k(n)$ groter of gelijk zijn aan $V_m(n)$.
Het lange bewijs (uit Tilburg) komt op wat natuurlijker manier tot de driehoeksgetallen.
Wie dat wil kan om kopieën van een en ander vragen, voor deze rubriek is het te uitgebreid. En misschien wil een lezer eerst zelf nog eens vechten met wat nu vertoond is!

Rest nog het eindresultaat uit de 'stelling' af te leiden. Dat is betrekkelijk eenvoudig, het wordt:

$$H_4(n) = (m + r - 1) * 2^m + 1, \text{ waarbij } n = \Delta_m + r, \; 0 \leqslant r \leqslant m.$$

Men kan ook nog $m$ en $r$ in $n$ uitdrukken, zoals boven met de Entier-haken. In Tilburg leidde dat – via een iets andere route – tot ... schrik niet:

$$H_4(n) = (n - 1 + \tfrac{1}{2}[\sqrt{2n - 1\tfrac{3}{4}} - \tfrac{1}{2}] - \tfrac{1}{2}[\sqrt{2n - 1\tfrac{3}{4}} - \tfrac{1}{2}]^2) * \\ * 2^{[\sqrt{2n - 1\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}]} + 1$$

Hulde! Maar ....
Is dit nu echt optimaal? We hebben van een bepaald type strategie de beste gekozen. Maar kan het niet buiten de drieslag om?

Maarten Bos zette nog zijn tanden in $H_5(n)$.
Een numeriek resultaat: $H_5(64) = 1535$, gevonden met dezelfde minimum-zoekerij. De computer vond:

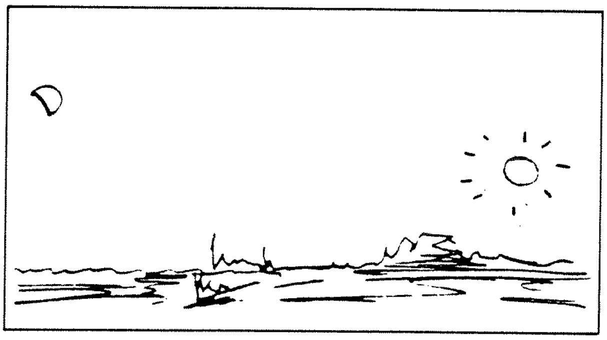
$$H_5(64) = 2 * H_5(36) + H_4(28).$$

als minimum voor $2 * H_5(64 - k) + H_4(k)$.

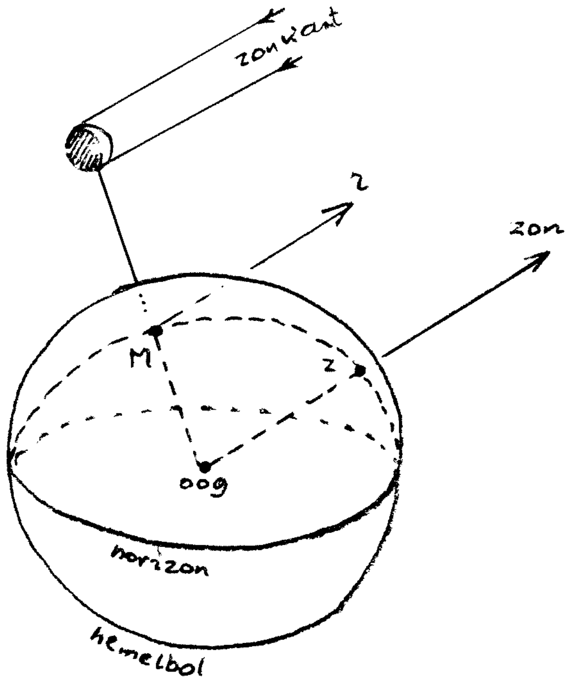
## Bedrieglijke maanstanden

Opgave 61, waarvan hier nogmaals de illustratie (zie volgende pagina), vroeg om een verklaring van de – voor sommigen althans – onverwacht omhooggerichte maanrug.

Maurits Dienske maakt duidelijk dat je naar maan, zon en sterren kijkend alles als het ware op een bol geprojecteerd bekijkt. De bekendste hemelbol uit de sterrenkunde.
Op die hemelbol geprojecteerd is de rechte lijn van zon naar maan een zogenaamde grote cirkel, ruwweg



samenvallend met de beweging van zon en maan. Die grote cirkel loopt van de maan af omhoog en daalt naar de zon.
Een schetsje maakt het duidelijker:




Pieter van der Zwaart suggereert een eenvoudig experiment. Laat een bal maan spelen en een diaprojector zon. Stel ze op gelijke hoogte op. Ga nu op de grond zitten dichtbij de maan-bal. De zon, die verder is, lijkt nu lager. Tenminste in 'hoek boven de grond'. De verlichte maankant wijst dus schijnbaar óver de zon heen.

Hessel Pot verwijst allereerst naar Pythagoras, jrg. 20 (1981) nr. 1, pag. 5. Daar staat het allemaal!
Hij merkt ook op dat het verschijnsel het best is te zien tijdens het tweede kwartier. Mijn schetsje is dan wel vreemd. De maan moet dan convex zijn.
(De maan heeft het moeilijk in deze rubriek. Zie opgave 64!)
Hij stuurt wel een nieuwe toelichtende verklaring die ik hier in zijn geheel opneem.

## 'Een touwtje als lichtbundel

Neem in elke hand een uiteinde van een touwtje van $1\frac{1}{2}$ à 2 m lang. Spreid je armen, en houd het horizontaal gespannen dwars vóór je langs, een stuk bóven ooghoogte.
Zie je het touwtje nu doorgezakt omlaag hangen, óf zuiver recht, óf ... bolstaand omhóóg?
En hoe is het als je het ook horizontaal, maar nu ± 30° ónder de oog-horizon-richting houdt?

Nóg een proefje. Draai jezelf nu zó dat je de plint van de kamer of het lokaal waar je staat, juist achter het gespannen touwtje ziet. Of, omhoog kijkend, de ribbelijn tussen muur en plafond.
Ineens lijkt het touwtje nu wél gewoon recht! (Omdat je wéét dat die plint en die ribbe recht zijn, terwijl een touwtje niet altijd gespannen staat.)
Treedt het gezichtsbedrog ook op als je het touwtje vérticaal schuin links of rechts voor je, gespannen houdt?
(Als je alleen een erg kort touwtje bij de hand hebt (een paar decimeter, bijvoorbeeld een elastiekje), dan moet je het in het midden dicht boven of onder je ogen langs laten lopen.)

Nu nog het verband met de vreemde maan-stand.
Het deel van het van de zon uitgaande licht dat juist de maanbol bereikt, vormt een (van ons uit gezien) nauwe lichtbundel. De as van die lichtbundel is 'in werkelijkheid' volgens de natuurkunde-wetten een vrijwel zuivere rechte lijn; minstens zo recht als ons strak gespannen touwtje.
Als we buiten (tijdens het tweede maan-kwartier) naar de zon en de maan kijken, is van die rechte lichtbundel niets te zien, alleen het effect ervan op het maanoppervlak is te zien. Als de lichtbundel wél als een rode streep te zien zou zijn, zouden we het waarschijnlijk minder gek vinden dat we onze nek wat verder achterover moeten houden als we kijken naar het stuk van die bundel dat het dichtst bij ons langs komt.
(Net als vroeger, toen er nog weleens een straaljager laag over kwam vliegen: eerst kijk je rechts opzij, dan gauw je nek achterover en tenslotte heb je naar links opzij het nákijken. Toch volgde die jager een rechte lijn, hij ging niet even extra omhoog om jouw hoofd mis te houden.)

Een laatste proefje. Ga op een avond in het tweede kwartier omstreeks zonsondergang naar buiten met je touwtje. Houd je rechtervuist vóór de zon, of voor de plaats waar die zon al onder de horizon zit. En houd tegelijk je linkervuist voor de maan. De richting van het touwtje bij je linkervuist komt nu zonder problemen overeen met de richting waarin de maan door de zon wordt beschenen. Het touw-beeld vormt juist de symmetrie-as van het zichtbare maan-beeld, precies zoals het hoort.'

## Rampvrije periodes — opgave 62

Maarten Bos noteerde er enkele, als het ware op de achterkant van het Pascalprogramma dat beroering in de Hanoi-puzzel bracht.
Het gaat om jaartallen van 3, 4 of meer cijfers, waarbij in aaneengesloten periodes elk jaartal uit slechts drie verschillende cijfers bestaat:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | t/m | 1022 | (1023 jaren) |
| 1099 | t/m | 1202 | (104 jaren) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8797 | t/m | 8900 ( | 104 jaren) |
| 9877 | t/m | 10022 ( | 147 jaren) |
| 99877 | t/m | 100022 ( | 147 jaren) |

Enzovoorts.

Volgende puzzelrubriek: in het septembernummer. Waarschijnlijk aangepast aan het feit dat die Wiskrant themanummer W12-16 wordt.

Correspondentie over deze rubriek wordt met belangstelling tegemoet gezien door Aad Goddijn.