

Van watertoren, tachograaf en nog wat

L. Streefland

OW & OC, RU Utrecht

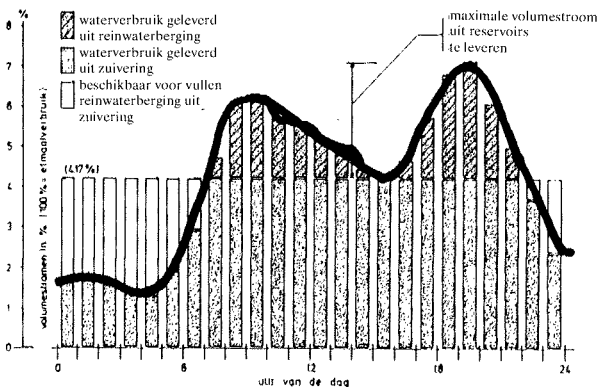
Inleiding

Op de lange leerweg naar de differentiaal- en integraalrekening kunnen probleemsituaties geplaatst worden die aanleiding geven tot 'intuïtief integreren'. Een nieuw ontwerp van George Schoemaker binnen het project 12-16 bevatte een mogelijk baken op deze leerweg. Dit inspireerde tot het opdiepen van nog een voorbeeld uit archieven van weleer.

Het aardige van de voorbeelden is, dat ze ook zinvol zijn voor degenen die nimmer aan integreren zullen toekomen, omdat zij voortijdig een andere leerweg zijn ingeslagen.

Aanleiding

Binnen het project W12-16 is een onderwijsleerpakket 'De Watertoren' in ontwikkeling. De ontwerper, George Schoemaker, vroeg me op zijn nulde versie te willen reageren. Dat deed ik dus. Ik vond het pakket heel interessant, met onder andere mooie meetkundige activiteiten. Maar daarover wil ik het nu niet hebben. Er waren ook grafieken van waterverbruik: het interpreteren, het zelf een eenheid bepalen op één van de assen, zelf het verloop van het waterverbruik op een zomerse dag grafisch in beeld brengen enzovoorts. Belangrijke activiteiten, voor een groot deel nog kwalitatief van aard. Dit is goed, want nu kunnen de leerlingen zich concentreren op het wezen van de verschijnselen die zij in ogenschouw nemen.



Theoretisch voorbeeld met volledige etmaalafvlakking

fig. 1

Wist u overigens dat het belangrijk is, dat de pompen die de waterleiding bedrijven gebruiken zó worden afgesteld dat ze zo weinig mogelijk van toerental behoeven te veranderen? Dit in verband met voortijdige slijtage van deze kostbare apparatuur.

Twee soorten pompen zijn er, althans met twee functies, namelijk voor het winnen van het water en om het 'reinwater' door te geven naar de gebruiker. De kunst is nu om te anticiperen op het grillige verbruik per dag met zijn toppen en dalen en de pompen op een te verwachten gemiddelde te laten inspelen. In vakjargon heet dit 'volledige etmaalafvlakking', zoals uit het onderschrift bij de grafiek blijkt. [1]

Genoeg over de technische details nu. Het fijne ervan hoort u metertijd van George Schoemaker zelf, wanneer hij met een wat stelligere versie van zijn ontwerp voor de dag komt. Waarom het te doen is, is deze 'volledige etmaalafvlakking'. De vraagstukken in verband hiermee zullen de leerlingen intuïtief doen aanvoelen dat het blanco deel boven de grafiek, beschikbaar uit zuivering voor het vullen van de reinwaterberging, overeenstemt met het gearceerde deel onder de grafiek, geleverd uit de reinwaterberging.

'Intuïtief integreren' noemde hij dit. Daarom is het ons te doen. Een kwestie die trouwens al eens vaker ter sprake is geweest in dit tijdschrift.

In dit verband breng ik even in herinnering mijn artikel over 'snelheid in grafieken'. [2] Daarin werd onder andere het ritverloop van een Amsterdamse metro-trein tussen twee stations bestudeerd. Eerst zonder getallen.

1. Vanaf de start schokvrij optrekken tot de topsnelheid.
2. Vervolgens voortgaan met die topsnelheid gedurende enige tijd.
3. Schokvrij afremmen tot stilstand. Dit duurt net zo lang als het schokvrij optrekken.

Voorspel het verloop van de snelheidsgrafiek en teken deze.

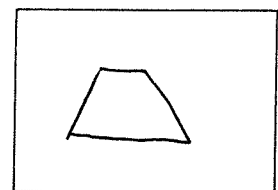
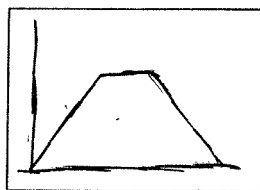


fig. 2

Door de symmetrie in het verhaal en voorgaande ervaringen kunnen de leerlingen deze opdracht aan. Door het puur kwalitatieve kan de aandacht zich onbelemmerd op het snelheidsverloop richten.

Dan wordt het ritverloop tussen twee stations van getalgegevens voorzien.

Afstand: 800 m. Rit:

- Tien seconden stilstand.
- Eerste 200 m schokvrij optrekken tot 72 km/u in 20 seconden.
- Volgende 400 m. Voortgaan op topsnelheid.
- Laatste 200 m. Schokvrij afremmen tot stilstand in 20 seconden.

Behalve een snelheid-tijd-grafiek wordt er ook één voor afstand en tijd samengesteld. Bij voorkeur gebruiken we opnieuw de grafieken die de leerlingen in een eerder stadium naar aanleiding van de gemiddelde reissnelheid maakten en brengen hierin de nieuwe grafieken in. Uiteindelijk ontstaan dan de volgende beelden:

Metro: afstand-tijd

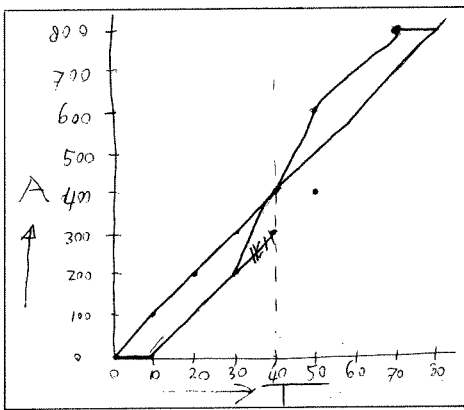


fig. 3

De grafiek toont duidelijk hoe pas halverwege de metro 'op z'n gemiddelde zit'. Daarna loopt hij op z'n gemiddelde uit om de voorsprong aan het eind door stilstand weer prijs te geven.

In de snelheidsgrafieken van de gemiddelde reistijd en de werkelijke rit wordt het voorgaande nogmaals bevestigd. Het geeft een beeld met nog meer zeggingskracht omdat de draai-symmetrie van de afstand-tijd-grafieken nu omslaat in de visueel overtuigender spiegelsymmetrie van de snelheid-tijd-grafieken.

Metro: snelheid-tijd

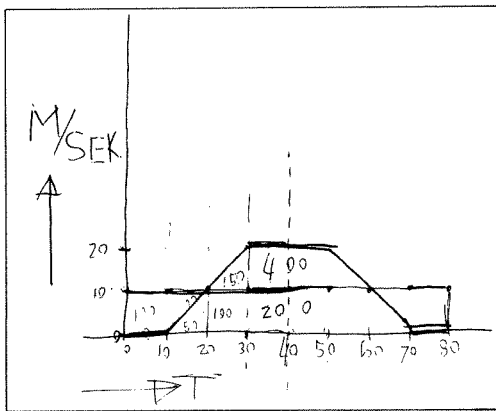


fig. 4

Met behulp van beide grafieken kan het afstandsverloop nogmaals worden nagegaan. De getallen in de grafiek duiden op

een poging van twee samenwerkende leerlingen om het afstandsverloop in de snelheidsgrafiek bij te houden. Wellicht heeft de intuïtie postgevat dat de hokjes tussen de grafiek(en) en de tijdas iets met de afgelegde afstand te doen hebben. De deels aangebrachte arcering wijst in deze richting.

Een andere gelegenheid vormde het openingsartikel in het proefnummer van de Nieuwe Wiskrant [3]. Dat is alweer lang geleden. Daarin werd een schoolboek-auteur gekritiseerd die de kwestie van de afgelegde afstand als oppervlakte onder een snelheidskromme simpelweg wegwijsde omdat dit 'eenvoudig viel in te zien'. Wellicht kan aan dit inzien tegemoet gekomen worden door enkele mooie voorbeelden van 'intuïtief integreren' uit te zetten in de wiskundeleerlijnen van het voortgezet onderwijs.

Ik geef hier een suggestie voor zo'n probleem. Daarvoor sluit ik aan bij mijn tweede verwijzing. In mijn analyse van wat helemaal niet zo eenvoudig viel in te zien stelde ik destijds onder andere, dat de grootheid oppervlakte in overdrachtelijke zin wordt toegepast en niet in zijn (voor de leerlingen) oorspronkelijke betekenis. Van de leerlingen vraagt dit het innemen van een hoger standpunt ten aanzien van oppervlakte.

Oppervlakte 'gewoon'

Om ons voorbeeld van 'intuïtief integreren' wat in te leiden beginnen we met een recht-toe-recht-aan vraagstuk van oppervlaktemeting, het probleem van de vier eilanden.

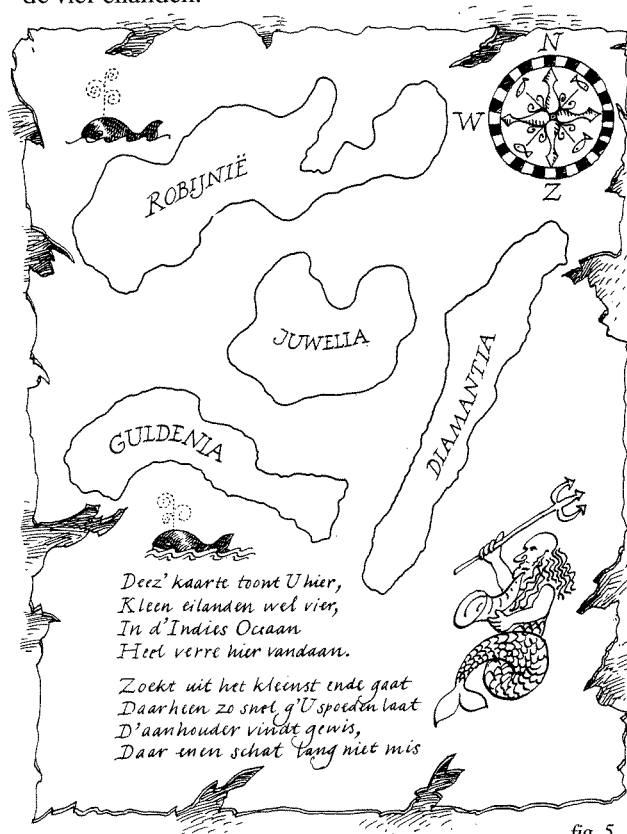


fig. 5

'Ralph de zeerover' is een thema over oppervlakte voor groep zeven van de basisschool. De schatkaart die Ralph erfde geeft het probleem. Bepaal het kleinste eiland, want daar is de schat verborgen. Dit probleem wordt eerst open gepresenteerd.

De ervaring leert dat allerlei 'oplossingen' verwacht kunnen worden. [4] We geven er enkele:

- de omtrekredenering 'Ralph vaart om de eilanden heen; om het kleinste eiland duurt het het kortst;
- de eilanden verdelen en omvormen tot handzamer figuren;
- de eilanden onderverdelen in meetbare eenheden;
- zand uitsmeren over de eilanden en het aantal theelepeltjes per eiland tellen;
- de eilanden overnemen op triplex en met een figuurzaag uitzagen en vergelijken met een balans;
-

Vanzelfsprekend wordt de foutieve omtrekredenering ontkracht, het liefst door een medeleerling. De andere suggesties worden eveneens besproken op bruikbaarheid en doelmatigheid. Tenslotte wordt de weg ingeslagen van het meten met een transparant meetrooster (vierkante centimeters).

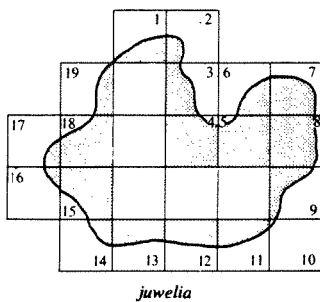


fig. 6

Ook deze 'opstelling' blijkt nog geen antwoord op te leveren op het startprobleem. Nog steeds is het kleinste eiland nog niet als zodanig ontmaskerd. De oplossing wordt gezocht in nog fijner meten (vierkante millimeters).

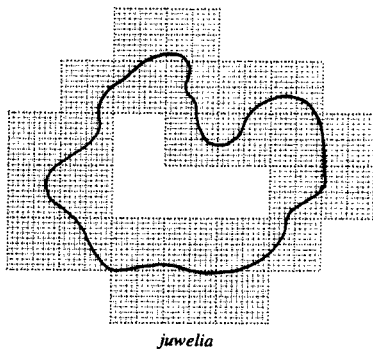


fig. 7

Ook hier geeft de komma in het meetgetal de overgang naar het fijnere meten aan. In tegenstelling tot het lengte meten verschijnen de decimalen nu niet met één maar met twee tegelijk, wat logisch was, omdat in twee richtingen verfijnd werd. Guldenia blijkt het kleinste eiland te zijn.

Nog een vier-'eilanden'-probleem

Naar een voorbeeld van Ralph kom ik dan nu toe aan de suggestie waarom het mij in feite te doen is. Uitgangspunt vormt een krantebericht. In een plaatselijke krant lezen we:

Politie zoekt verkeersovertreder met behulp van tachograaf Ruurlo (van onze plaatselijke verslaggever)

Op de provinciale weg N94 van Zutphen naar Winterswijk heeft zich gisteren ter hoogte van Ruurlo omstreeks het middaguur een verkeersongeval voorgedaan.

Daarbij is een personenwagen tegen een boom gebotst. De drie inzittenden, allen uit Winterswijk, zijn met ernstige verwondingen in het ziekenhuis opgenomen. De auto was total loss.

De politie beschikt over aanwijzingen, dat het ongeval veroorzaakt zou zijn door een wagen van het transportbedrijf van de firma Q. te Utrecht.

Na het ongeval zou de vrachtwagen zijn doorgereden in de richting Winterswijk. Het kenteken kon niet worden opgenomen. De politie stelt een nader onderzoek in. Ze denkt aan gebruikmaking van tachograafgegevens.

Later blijkt dat van het genoemde transportbedrijf vier vrachtwagens het bedoelde kruispunt bij Ruurlo gepasseerd kunnen zijn. De vier chauffeurs worden aan een nader onderzoek onderworpen. Ieder ontkent iets met het ongeval te doen te hebben.

De politie besluit dan de tachograafschijven aan een nader onderzoek te onderwerpen.

We zetten met de klas een boom op over de vraag:

Wat moet de politie nu allemaal weten om te kunnen nagaan of één van de chauffeurs het ongeluk veroorzaakt kan hebben.

- Vertrektijden van de chauffeurs. (Te vinden op de vier tachograafschijven.)
- De routes die ze gereden hebben tot aan Ruurlo.

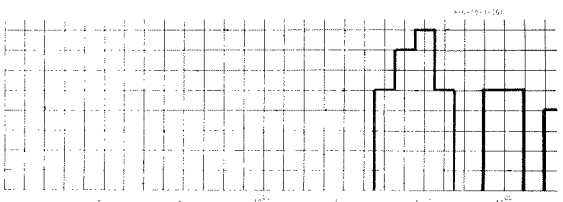
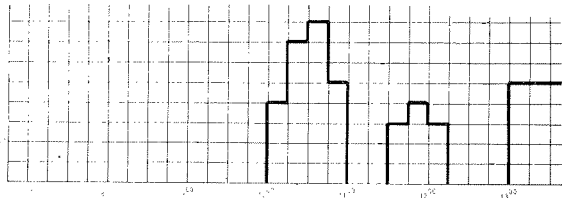
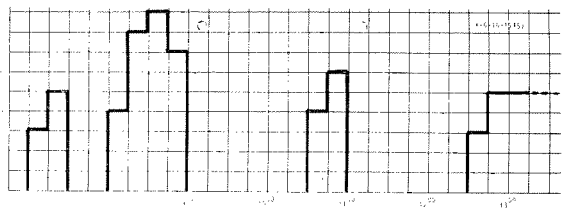
De administratie gaf op:

Chauffeur 1: Vertrekt uit Utrecht en via Arnhem en Zutphen naar Winterswijk.

Chauffeur 2: Dezelfde route als chauffeur 1.

Chauffeur 3: Vertrekt uit Utrecht via Amersfoort naar Zwolle en daarna over Deventer en Zutphen naar Winterswijk.

Chauffeur 4: Vertrekt vanuit Utrecht naar 's Hertogenbosch en vandaar over Nijmegen, Arnhem en Zutphen in de richting Winterswijk.



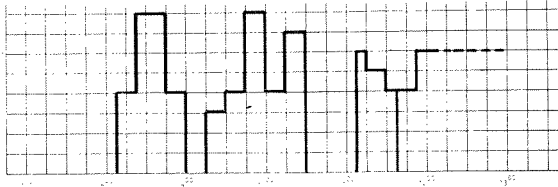


fig. 8

- De afstanden van het transportbedrijf tot het kruispunt langs de verschillende routes. (Zie kaarten.)
- Het tijdstip, waarop de verschillende chauffeurs bij het betrokken kruispunt waren. (Zie 'tachograaf-grafieken'.)

We vermelden de belangrijkste vragen en de informatie over de routes voor de leerlingen op het bord.

- Daarna krijgen ze allemaal een pakketje bestaande uit:
- het krantebericht;
 - een wegenkaart van Nederland;
 - een wegenkaart van de Achterhoek;
 - een afstandentabel;
 - de 'tachograaf-grafieken' van de chauffeurs.

In *heterogene* groepjes van drie à vier leerlingen wordt nu gewerkt aan de vraag:

- Welke chauffeur kan het ongeluk veroorzaakt hebben?

Uiteindelijk blijkt alleen de chauffeur 4, die dus via 's Hertogenbosch enzovoorts reed, het ongeluk beangaan te kunnen hebben. Hij was tenminste *omstreeks het middaguur* in de buurt van Ruurlo.

Denk eraan, dat de leerlingen:

- afstanden kunnen bepalen met behulp van de tabel en de kaarten met hun schalen;
- maar ook met behulp van de gegeven grafieken.

Achtereenvolgens valt het probleem uiteen in de volgende deelproblemen;

- welke afstanden horen bij de routes;
- welke afstanden reden de chauffeurs (grafieken);
- hoever hadden ze gereden omstreeks het middaguur?

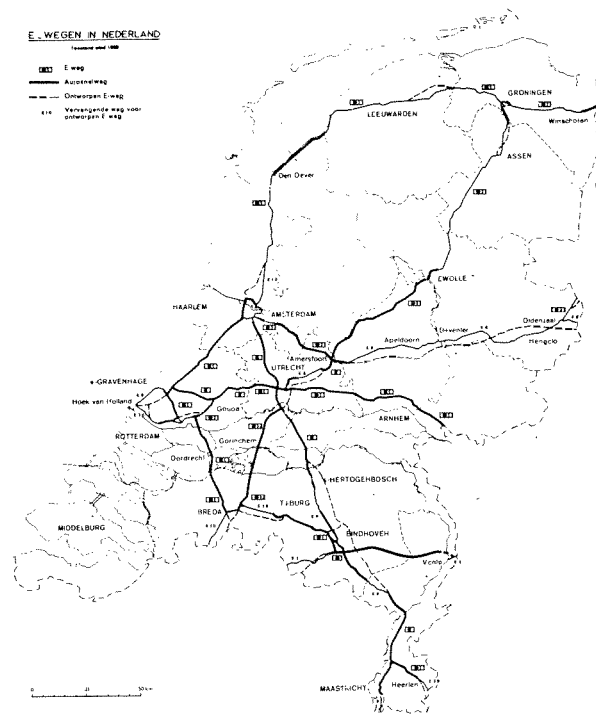


fig. 9

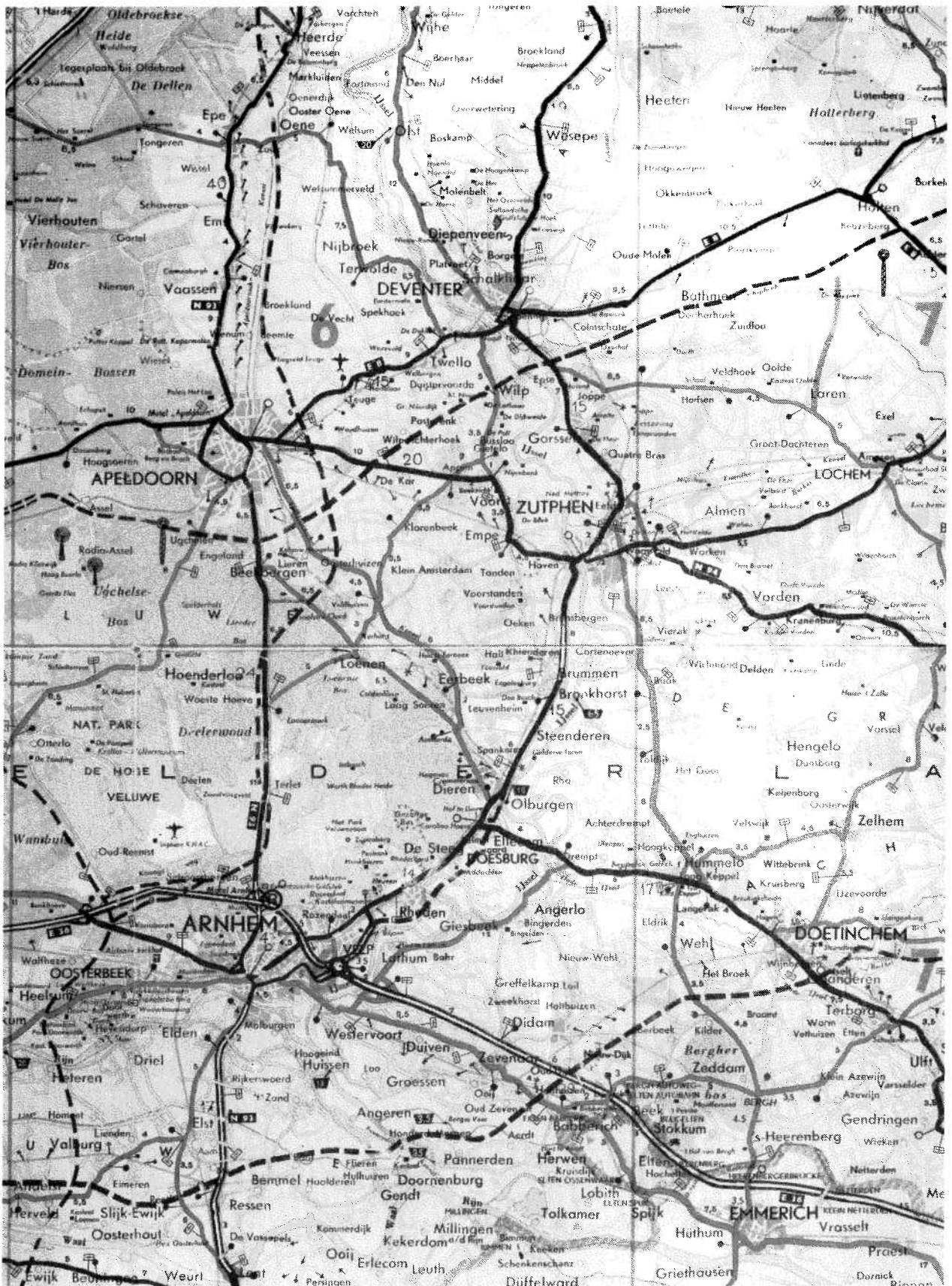
- konden ze toen al bij Ruurlo zijn? (zie afstanden bij de routes).

Dat voorgaande problematiek van de nodige realiteitszin getuigt, blijkt uit het volgende krantebericht:

Tachograaf 'wees' de dieven aan

Utrecht (ANP) - De Utrechtse recherche heeft in Wijk bij Duurstede twee broers aangehouden, die een grote voorraad gestolen goederen verborgen hielden. De tachograaf van de vrachtwagen, waarmee een deel van de buit werd vervoerd, had de politie op hun spoor gebracht.

	AMERSFOORT	AMSTERDAM	APELDOORN	ARNHEM	ASSEN	BREDA	DEN HAAG	DORDRECHT	EINDHOVEN	ENSCHEDA	GRONINGEN	HAARLEM	'S-HERTOGENBOSCH	HILVERSUM	LEEUWARDEN	LEIDEN	MAASTRICHT	MIDDELBURG	NIJMEGEN	ROTTERDAM	TILBURG	UTRECHT	VENLO	ZWOLLE
AMERSFOORT	—	49	44	50	141	90	84	79	105	116	169	68	74	20	159	80	193	193	67	77	97	21	131	69
AMSTERDAM	49	—	88	100	186	102	56	91	118	160	197	19	86	31	135	41	208	184	117	72	109	38	174	113
APELDOORN	44	88	—	27	112	135	129	125	107	72	140	111	92	63	130	125	182	238	44	122	115	66	108	40
ARNHEM	50	100	27	—	139	112	118	98	80	85	167	115	65	69	157	114	143	215	17	111	88	63	81	67
ASSEN	141	186	112	139	—	232	226	221	219	113	28	207	204	161	72	222	294	335	156	219	227	163	220	74
BREDA	90	102	135	112	232	—	75	32	56	197	260	117	47	86	240	91	143	101	95	52	22	68	121	160
DEN HAAG	84	56	129	118	226	75	—	45	136	206	245	44	104	80	184	17	226	136	135	23	99	62	192	154
DORDRECHT	79	91	125	98	221	32	45	—	90	183	249	92	63	75	229	61	177	107	92	22	56	57	155	149
EINDHOVEN	106	118	107	80	219	56	136	90	—	165	247	133	32	100	237	132	88	159	63	111	34	84	65	147
ENSCHEDA	116	160	72	85	113	197	206	183	165	—	141	183	150	135	153	202	240	300	102	199	173	151	166	72
GRONINGEN	169	197	140	167	28	260	245	249	247	141	—	201	232	189	58	232	322	363	184	244	255	191	248	102
HAARLEM	68	19	111	115	207	117	44	92	133	183	201	—	101	49	139	31	223	183	132	70	124	53	189	132
'S-HERTOGENBOSCH	74	86	92	65	204	47	104	63	32	150	232	101	—	70	222	100	122	150	48	79	23	52	88	132
HILVERSUM	20	31	63	69	161	86	80	75	100	135	189	49	70	—	169	59	192	178	86	73	93	16	158	88
LEEUWARDEN	159	135	130	157	72	240	184	229	237	153	58	139	222	169	—	170	312	343	174	209	245	176	238	92
LEIDEN	80	41	125	114	222	91	17	61	132	202	232	31	100	59	170	—	222	151	131	39	115	58	188	150
MAASTRICHT	193	208	182	155	294	143	226	177	88	240	322	223	122	192	312	222	—	179	138	197	121	174	74	222
MIDDELBURG	193	184	238	215	335	101	136	107	159	300	363	183	150	178	343	151	179	—	198	112	125	171	224	263
NIJMEGEN	67	117	44	17	156	95	135	92	63	102	184	132	48	86	174	131	138	198	—	127	71	80	64	84
ROTTERDAM	77	72	122	111	219	52	23	22	111	199	244	70	79	73	209	39	197	112	127	—	76	55	167	147
TILBURG	97	109	115	88	227	22	99	56	34	173	255	124	23	93	245	115	121	125	71	76	—	75	98	155
UTRECHT	21	38	66	63	163	68	62	57	64	151	191	53	52	16	176	58	174	171	80	55	75	—	140	91
VENLO	131	174	108	81	220	121	192	155	65	166	248	189	88	158	238	188	74	224	64	167	98	140	—	148
ZWOLLE	69	113	40	67	74	160	154	149	147	72	102	132	132	88	92	150	222	263	84	147	155	91	148	—



1. 250.000

Eind vorige week werden in Utrecht drie mannen gearresteerd, toen zij de buit overlaadden in een vrachtauto. Mede aan de hand van de gegevens van de tachograaf, een instrument, dat rijtijden en -afstanden in een vrachtwagen registreert, kon de politie globaal vaststellen in welke omgeving ze de opslagplaats van de bende zou moeten zoeken. Daarin vond ze toen Perzische tapijten ter waarde van zeker f 750.000 en zes miljoen sigaretten (waarde ruim vijf ton).

Besluit

Ziedaar een nieuwe gelegenheid om met behulp van gestyleerde tachograafgrafieken tot intuïtief integreren te komen. De nodige voorwaarden moeten dan natuurlijk wel zijn vervuld. Het opdoen van ervaringen met afstand-tijd- en snelheid-tijdgrafieken behoren

daartoe. Alsook het verwerken van problemen als dat van de watervoorziening. Zijn die voorwaarden niet vervuld dan wordt het een kwestie van verzuipen, ondanks het inpompen.

Literatuur

- [1] Beschikbaar gesteld door Provinciaal Waterleidingbedrijf Noord-Holland te Bloemendaal.
- [2] Streefland, L.: *Snelheid in Grafieken (2)*, Nieuwe Wiskrant 4 (2), 1985, 26-31.
- [3] Streefland, L.: *Zoals eenvoudig valt in te zien . . .*, Nieuwe Wiskrant, Proefnummer, maart 1981.
- [4] Streefland, L.: *Ralph de zeerover*, Wiskobas Bulletin Leerplandeel 9, Oppervlakte 2, Utrecht, 1978.