Fractalen, of: hoe kronkelig is de kust van Noorwegen

S.L. Kemme
Mathematisch Instituut, RU Groningen

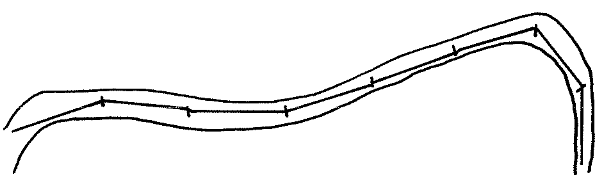
Als je op een kaart naar de kustlijn van Engeland kijkt zie je een patroon van inhammen en uitstulpingen. Neem je een stukje van de kust en bekijk je dat met een kleinere schaal, dan zie je hetzelfde patroon. Wat op de grote kaart alleen maar een inham leek, blijkt bij uitvergroting weer een patroon van afzonderlijke inhammetjes en uitstulpingen te zijn. Je vindt dat patroon zelfs terug als je langs de kust gaat lopen en precies de waterlijn zou proberen te volgen.
Een boom bestaat uit een stam die zichzelf vertakt in zijtakken. Iedere zijtak is op zijn beurt ook op te vatten als een stam die zich weer vertakt. Enzovoorts. In gedachten kun je zo oneindig ver doorgaan.

Dergelijke patronen die zichzelf op een steeds kleinere schaal blijven herhalen heten 'fractals'. Ze komen veel in de natuur voor. Wiskundigen proberen de natuur na te bootsen door het bestuderen van 'gestileerde' meetkundige fractal-patronen.

Het volgende geeft een eerste indruk van de manier waarop wiskundigen proberen door middel van 'fractals' essentiële aspecten van de omgeving 'onder woorden' te brengen.

Lengte

Als je de lengte van een landweg wilt bepalen, kun je dat doen door iedere keer met een touw een zekere afstand 'af te passen'. Zolang de weg recht genoeg is levert dat niet zoveel problemen op.

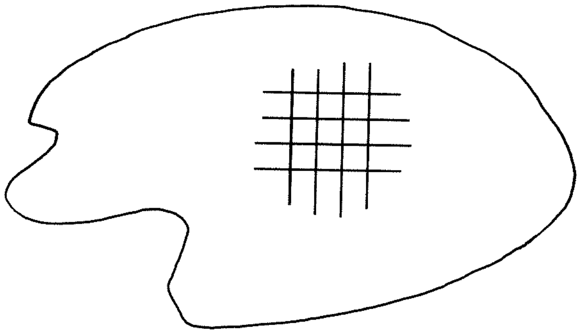


In het voorbeeld is acht keer de lengte van het touw afgepast. De lengte van het weggetje is dus acht keer de lengte van het touw. De lengte van het touw is hier de meeteenheid. Dat had net zo goed een duimstok van een meter kunnen zijn. In het algemeen geldt dus:

lengte = *aantal* × *meeteenheid*

Oppervlakte

Als je de grootte van een tuintje wilt bepalen met een wat grillige vorm, dan zou je dat kunnen doen door het te bedekken met allemaal vierkanten van dezelfde grootte.

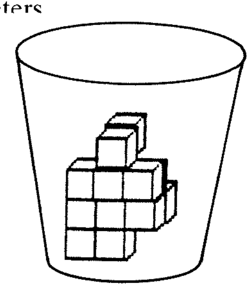


Bij de rand komt het natuurlijk niet mooi uit en moet je gaan schatten. De grootte van ieder vierkantje is ook weer bepaald door een bepaalde meeteenheid. De zijde van een vierkant kan één meter zijn of één centimeter. In dit geval geldt dat de oppervlakte van het tuintje gelijk is aan het aantal vierkantjes dat je telt. Je geeft de oppervlakte dan in vierkante meters of vierkante centimeters. In dit geval geldt dus:

oppervlakte = *aantal* × (*meeteenheid*)^2

Inhoud

Op dezelfde manier kun je de inhoud van een emmer bepalen. Je stapelt de emmer vol met kubusjes van dezelfde grootte en telt hoeveel erin gaan. Ook hier moet je bij de wand weer gaan schatten. Hoe kleiner de kubusjes die je neemt, hoe meer erin gaan en hoe nauwkeuriger het wordt. Voor kubusjes met een zijde van één centimeter wordt de inhoud gegeven in kubieke centimeters.



Ga je over naar kleinere kubussen met zijde van één millimeter, dan wordt het aantal kubussen dat in de emmer gaat natuurlijk groter. In iedere kubieke centimeter gaan 1000 kubieke millimeters. Het oorspronkelijke aantal zal dus 1000 keer zo groot worden. Ook in deze situatie is er een formule:

$$\textit{inhoud} = \textit{aantal} \times (\textit{meeteenheid})^3$$

Maat en dimensie

De exponenten van de meeteenheden in de drie formules worden *de dimensie* genoemd. De dimensie van het landweggetje is 1, van de tuin 2 en van de emmer 3.
Je kunt de drie formules in één formule samenvatten:

$$\textit{maat} = \textit{aantal} \times (\textit{meeteenheid})^{\textit{dimensie}}$$

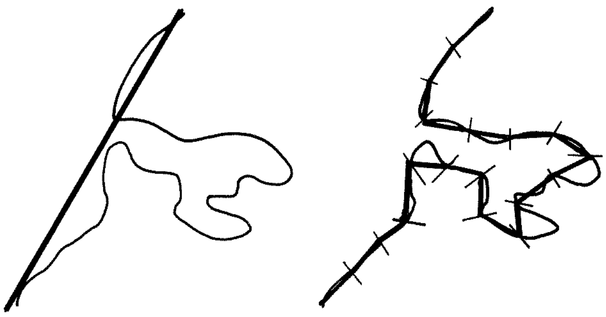
Onder de 'maat' verstaan we de lengte, oppervlakte of inhoud van een voorwerp of figuur.
Je kunt de formule ook anders schrijven:

$$\textit{aantal} = \textit{maat} \times \left(\frac{1}{\textit{meeteenheid}}\right)^{\textit{dimensie}}$$

Deze laatste formule verschaft je een praktisch middel om de dimensie te bepalen. Je neemt een bepaalde meeteenheid en gaat tellen hoe vaak je die op de figuur kunt afpassen. Je bepaalt daar dan het bijbehorende aantal bij. Vervolgens neem je een kleinere (of grotere) meeteenheid. Bijvoorbeeld tien keer zo klein (als je van centimeters naar millimeters gaat). Je telt weer hoe vaak je daarmee kunt afpassen. Is het aantal dan tien keer groter geworden dan is de dimensie 1, 100 keer groter levert dimensie 2 en 1000 keer groter dimensie 3. De dimensie beschrijft dus het verband tussen de omgekeerde van de meeteenheid en het afgepaste aantal meeteenheden. Dat verband is een exponentiële functie.
Bij figuren met een 'nette' rand, zoals landweggetjes, tuintjes en emmers, levert het bepalen van de dimensie niet zoveel problemen op. In die gevallen kom je keurig uit op de getallen 1, 2 of 3. Bij grilliger figuren loopt de zaak echter heel anders.

Hoe lang is de kust van Noorwegen?

Als je de lengte van de kust van Noorwegen zou willen meten, doemen er ineens nieuwe moeilijkheden op. Wat is eigenlijk de kust? Dat hangt van de schaal af. Hoe kleiner de schaal is, hoe meer details je kunt zien. Dat betekent ook dat je met een kleinere meeteenheid een groter aantal stukjes kunt afpassen dan je bij een gladde rand zou verwachten.

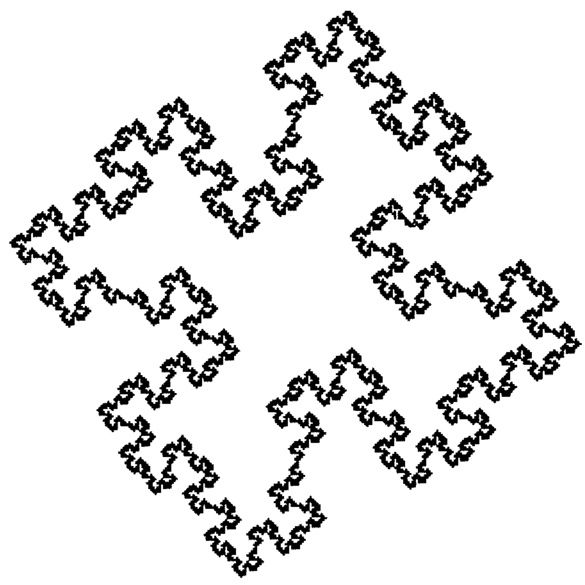


aantal = 1 *aantal = 18*

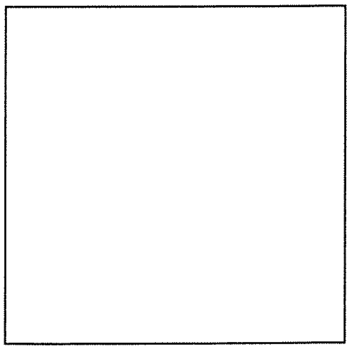
In bovenstaande figuur zie je dat een maateenheid die één tiende kleiner is dan de vorige, achttien keer zoveel stukjes geeft. Als je zo doorgaat, op steeds kleinere schaal, met steeds kleinere meeteenheden, dan kun je de kust zo lang krijgen als je zelf wilt. Op het laatst moet je ieder rotsblok en ieder inhammetje nog mee gaan meten. Het gaat er echter om hoe het aantal afgepaste stukjes verandert als je naar een andere meeteenheid overstapt. Voor de kust van Noorwegen heeft men dit nagegaan. Men komt dan op een dimensie van 1.52. Een getal tussen 1 en 2! Dat geeft aan dat de kust van Noorwegen niet zomaar een 'nette' kromme is. Juist doordat je op steeds kleinere schaal nieuwe inhammetjes tegenkomt, is de kust een heel ander soort lijn dan het landweggetje hierboven. Om precies te begrijpen wat er aan de hand is gaan we kijken naar een kunstmatig wiskundig voorbeeld van een soort 'kustlijn'.

Het Peano-eiland

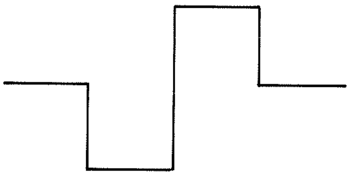
In het volgende plaatje zie je een voorbeeld van een 'wiskundig' eiland:



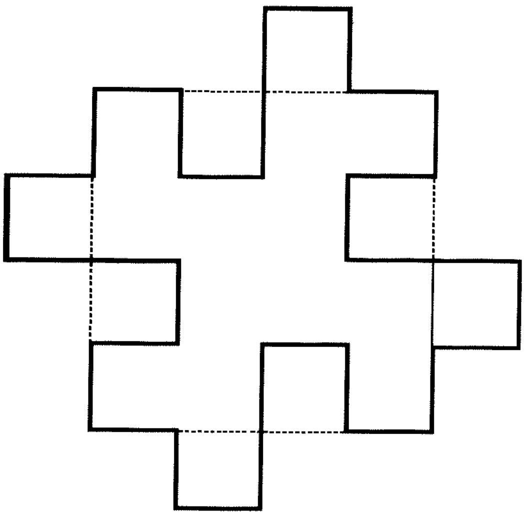
Het eiland is op een speciale manier gemaakt. De vorm is bedacht door de Italiaanse wiskundige Peano. Je begint met een vierkant:



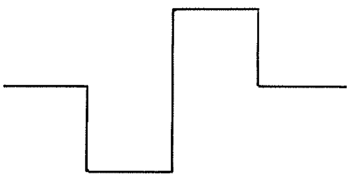
Daarin vervang je elk van de vier zijden door een lijn van de volgende vorm:



Je krijgt dan:

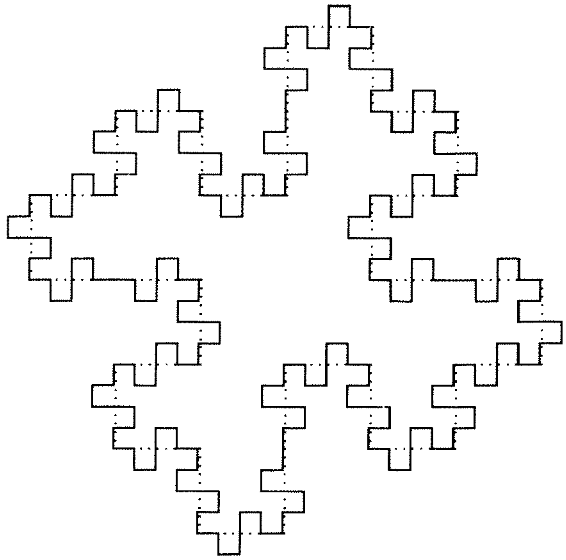


Voor de duidelijkheid is het oude vierkant er nog ingetekend. In de nieuwe figuur vervang je weer alle rechte lijnstukjes door lijnstukjes van de vorm:

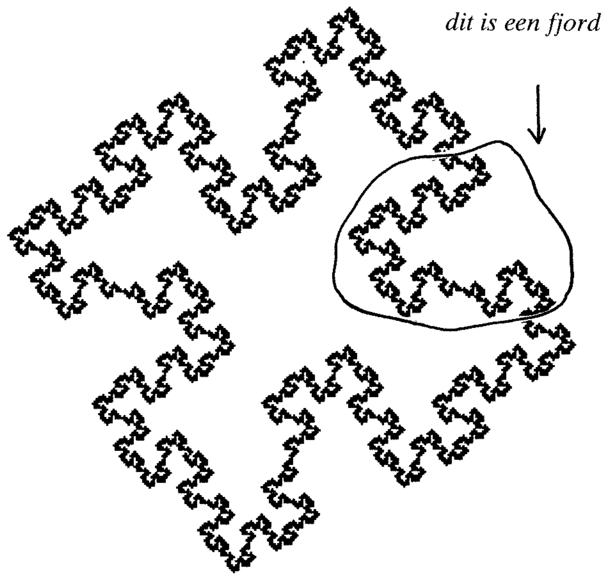


Maar nu vier keer zo klein:

Je krijgt dan:

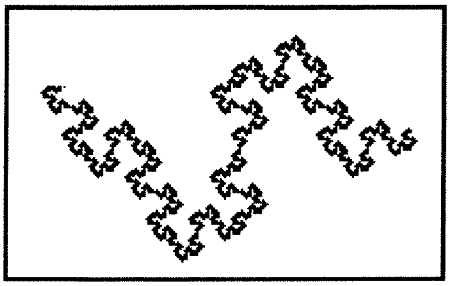


Voor de duidelijkheid is de vorige figuur met stippellijnen aangegeven. Enzovoorts. Het eiland kun je niet echt tekenen. Je moet ergens ophouden met tekenen, terwijl het proces van vervangen van lijnstukjes oneindig lang doorgaat. Omdat de computer nu eenmaal niet nauwkeuriger kan tekenen kom je uiteindelijk bij de volgende benadering uit:

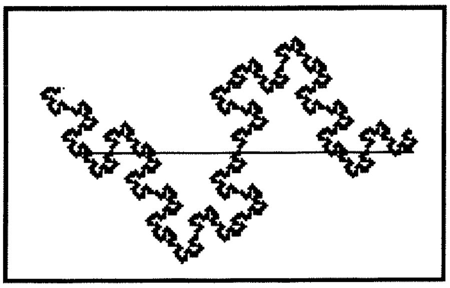


Je hebt nu een soortgelijke situatie als bij de kust van Noorwegen. Je ziet vier grote fjorden, die ieder weer opgebouwd zijn uit kleinere fjorden. Hoe kleiner de schaal, hoe meer details je kunt zien.

In het geval van het Peano-eiland kun je de dimensie echt uitrekenen. Voor het gemak nemen we alleen de Zuidkust.



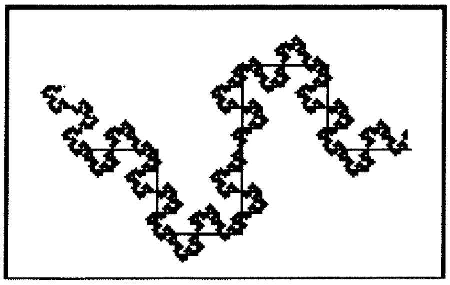
We beginnen met de lengte van de zijde van het oorspronkelijke vierkant als meeteenheid. Als je die gaat afpassen dan gaat dat precies één keer:



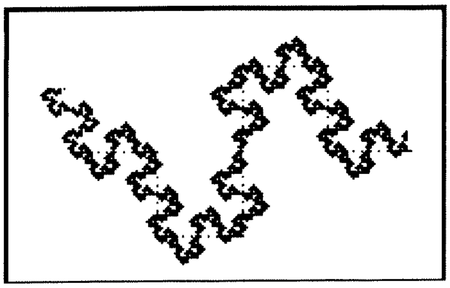
Een wel erg slechte benadering van de kustlijn. We vinden zo:

aantal $= 1$ en *meeteenheid* $= 1$

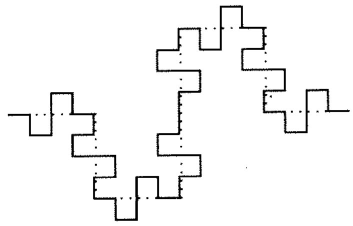
en de gemeten lengte is 1.
Vervolgens nemen we een kleinere meeteenheid, namelijk een kwart van de oorspronkelijke.



Je ziet dat de benadering van de lengte al een stuk beter is.
Het aantal afgepaste meeteenheden is nu 8, de meeteenheid is $\frac{1}{4}$ en de gevonden lengte is 2.
We gaan nu weer een vierde van de meeteenheid nemen om daarmee een nog betere lengte te bepalen.



De benadering is nu meteen al zo goed geworden dat je de meeteenheid niet eens meer terug kunt vinden in het plaatje. Met de stippellijntjes is nog wel de vorige benadering aangegeven. Doordat je de meeteenheid iedere keer door 4 deelt krijg je natuurlijk bij iedere volgende stap een stukje van de rij figuren terug waarmee je het eiland hebt geconstrueerd. Om goed te kunnen tellen hoeveel meeteenheden je in dit geval nodig hebt, is in het volgende plaatje de benadering eruit gelicht.



Het zijn 64 stukjes met lengte $\frac{1}{16}$. De gemeten lengte is nu dus 4.
De volgende stap kunnen we niet meer tekenen en moeten we wel beredeneren. De meeteenheid wordt weer door 4 gedeeld en wordt daarmee $\frac{1}{64}$. Als we die nieuwe meeteenheid langs de kust gaan leggen, dan kun je er 8 leggen op de plaats van de oude:

Het aantal stukjes wordt dan: $8 \times 64 = 512$. En de lengte wordt 8.
Om de dimensie uit te rekenen moeten we kijken naar de formule:

$$aantal = maat \times \left(\frac{1}{meeteenheid}\right)^{dimensie}$$

Daarvoor gaan we eerst de resultaten overzichtelijk in een tabel zetten:

aantal	*meeteenheid*	$\frac{1}{meeteenheid}$
1	1	1
8	$\frac{1}{4}$	4
64	$\frac{1}{16}$	16
512	$\frac{1}{64}$	64
4096	$\frac{1}{256}$	256

We moeten een verband zien te vinden tussen de eerste en de laatste kolom. Omdat het om machten gaat kan het helpen als we alle getallen in de tabel als machten gaan schrijven. In de eerste kolom staan machten van 8, in de laatste machten van 4:

aantal	*meeteenheid*	$\frac{1}{meeteenheid}$
$1 = 8^0$		$1 = 4^0$
$8 = 8^1$		$4 = 4^1$
$64 = 8^2$		$16 = 4^2$
$512 = 8^3$		$64 = 4^3$
$4096 = 8^4$		$256 = 4^4$

Je ziet dat de machten heel mooi met elkaar overeenstemmen. Je kunt het getal 8 zelfs nog als een macht van 4 schrijven. Omdat $4^3 = 8^2$ geldt dat:

$$8 = 4^{\frac{3}{2}}$$

Nu kunnen we de eerste kolom ook als machten van 4 schrijven en we vinden zo de formule:

$$aantal = maat \times \left(\frac{1}{meeteenheid}\right)^{\frac{3}{2}}$$

De dimensie van de kust van het Peano-eiland is dus 1.5. Dat ligt dicht in de buurt van de dimensie van de kust van Noorwegen en beschrijft heel aardig de overeenkomst tussen beide kusten. Je kunt zeggen: Hoe kronkeliger de kust hoe dichter de dimensie bij 2 ligt.

Fractals

Bij de kust van Noorwegen en Peano vonden we breuken als dimensies. In tegenstelling tot de nette figuren die dimensie 1,2 of 3 hadden. Men noemt dit gebroken dimensies. Figuren met gebroken dimensie hebben een hele speciale meetkundige structuur. Bij het Peano-eiland is dit gemakkelijk te begrijpen. Als je naar het plaatje van het eiland kijkt, dan zie je dat de grote structuur met vier fjorden zich binnen een fjord op een kleinere schaal herhaalt. Ook in een fjord kun je weer fjorden aanwijzen, en binnen die kleine fjorden nog kleinere, enzovoorts...
De figuur is opgebouwd uit verkleinde onderdelen van zichzelf. Bij de kust van Noorwegen is precies hetzelfde het geval, alleen ontbreekt daar de strikte regelmaat van het Peano-eiland. De fjorden lijken daar door het toeval op een bepaalde plaats te zijn terechtgekomen, binnen die fjorden zijn door toeval andere fjorden ontstaan, enzovoorts...
De meetkundige structuur is in beide gevallen echter hetzelfde: het gaat om figuren die een patroon bezitten dat zich in steeds kleinere afmetingen herhaalt binnen de figuur. Dat patroon kan strikt regelmatig zijn, maar het kan ook door toeval zijn ontstaan. Die oneindige kleine herhaling van hetzelfde patroon blijkt in vele gevallen verantwoordelijk te zijn voor het optreden van gebroken dimensies, zoals we hebben gezien bij het Peano-eiland. Dergelijke figuren heten 'fractals'.
Centraal staat steeds het idee om bepaalde aspecten van de natuur met wiskunde te kunnen meten en beschrijven. Zoals bijvoorbeeld de mate van 'kronkeligheid' van de Noorse kust.

NEDERLANDSE ONDERWIJSCOMMISSIE VOOR WISKUNDE

Wiskunde A-lympiade Symposium en Prijsuitreiking

Op 26 en 27 januari 1990 is in Garderen de eerste Wiskunde A-lympiade gehouden. Dertien teams uit het hele land, elk bestaand uit vier leerlingen, streden twee dagen lang een verbeten strijd. Men werkte gedurende die tijd aan een open opgave in teamverband.
Op 31 maart zullen de uitslagen bekend worden gemaakt en de prijzen worden uitgereikt door de Staatssecretaris van O & W, de Heer Drs. J. Wallage.

Deze feestelijke gebeurtenis wordt ingebed in een mini wiskunde A-symposium met bekende sprekers. Het voorlopige programma luidt:

13.15-14.00	J. van de Craats Cryptografie: een gemiste kans voor Wiskunde A?
14.00-14.45	F. Eijgenraam Statistiek in de krant en Wiskunde A.
15.15-15.45	J. de Lange Terugblik op A-lympiade.
15.45-16.15	J. Wallage Prijsuitreiking A-lympidade.

De bijeenkomst is openbaar en voor iedereen toegankelijk. Tevens vormt dit mini-symposium een onderdeel van een dag voor vwo-leerlingen met belangstelling voor Wiskunde en Informatica: Rekenen, Tekenen, Bewijzen en Begrijpen.

Plaats:	De Uithof, Utrecht
Inlichtingen:	Annerie Deckers Mathematisch Instituut Postbus 80.089 3508 TB Utrecht tel. 030-534040