Een probleem met zon en maan

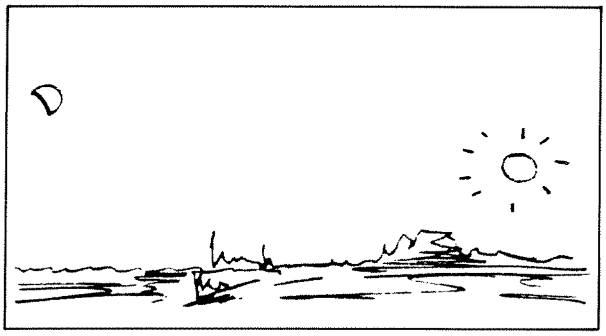
A. J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Miniaturen

Rijksmuseum 'Het Catharijne Convent' in Utrecht herbergt tot 11 februari de tentoonstelling 'Miniaturen uit de Noordelijke Nederlanden'. Er liggen zo'n 100 geïllumineerde handschriften uitgestald: bijbels, gebedenboeken, maar ook geïllustreerde geschiedenisboeken.
De versiering in de holte van een beginletter D kan daar een poort zijn naar de denkwereld van vijf eeuwen terug.
Een illustratie toont bijvoorbeeld de sikkel van de jonge maan. In de sikkel is een soort wiel te zien. De veranderlijkheid van de maan wordt zo verbonden met het rad van Vrouwe Fortuna, waarop eenieder – knecht of koning – kan opstijgen om zeker ten val te komen. De illustratie laat dit symbolisch én plastisch zien.
De marges van deze manuscripten worden bevolkt door bloemen en dieren. Apen, uilen en pauwen komen veel voor. De aap staat hier voor de duivelse lust. In de Christelijke kunst zijn ze vaak geketend. De pauwen (ze wijzen op onsterfelijkheid omdat hun vlees niet kan verrotten) hebben allemaal een gele staart met blauwe ogen. Was de pauw een dier dat alleen van horen zeggen en van andere tekeningen bekend was?

In de eerste opgave van deze puzzelrubriek gaat het om de veranderlijke maan. U mag daarbij absoluut niet op van-horen-zeggen afgaan. U mag ook niet geloven wat ik nu ga vertellen, u moet eerst zelf kijken.

Opgave 61
Soms zien we maan en zon zoals in dit schetsje:

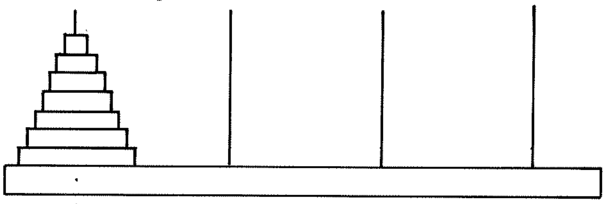


De bedoeling is: de verlichte kant van de maan wijst omhoog, maar de zon staat lager dan de maan. De verhoudingen tussen schijnbare grootte en hoek tussen zon en maan kloppen niet.

De vraag is nu: hoe zit dat?
De bedoeling van de opgave is ook: geef een korte, heldere, didactisch doordachte uiteenzetting, zodat nieuwsgierige lezers in de volgende NW er hun voordeel mee kunnen doen.
Deze opgave is al in kleine kring uitgezet; één schriftelijke inzending is er al!

Nogmaals Hanoi

De vorige aflevering van deze rubriek (8e jrg, nr. 1 – oktober '88!!) bevatte de vier-torens versie van de bekende Hanoi-puzzel.



De schijven van toren A moeten naar B. De schijven moeten stuk voor stuk verplaatst worden en nooit mag een grotere op een kleinere komen. De andere plekken, C en D, mogen als tussenstations gebruikt worden.

Alle oplossers bepaalden de functie $V(n)$, het minimum aantal benodigde verplaatsingen, met het hulpmiddel recursie.
Als je al weet hoe je $(n-2)$ schijven van A naar C verplaatst, weet je ook hoe je n schijven van A naar B verplaatst.
Zo:
- eerst $(n-2)$ schijven van A naar D in $V(n-2)$ stappen;
- dan de twee grootste schijven in drie stappen van A naar B;
- tot slot de $(n-2)$ schijven van D naar B in weer $V(n-2)$ stappen.

Dat geeft de betrekking:
$$V(n) = 2V(n-2) + 3\,, \quad n \geqslant 2\,.$$

De inzenders (Markus Nijmeijer, Fedor Mulder, Kees Henzen) vinden daarna via allerlei methoden een expliciete formule voor $V(n)$; het eenvoudigst is:

$$V(n)\begin{cases} = 3.2^{\frac{n}{2}} - 3 & \text{als } n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ = 2^{n+\frac{3}{2}} - 3 & \text{als } n = 1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$$

Voor $n = 7$ geeft dat: $V(7) = 29$.
$V(n)$ is veel kleiner dan $H(n)$, de functie die bij het klassieke drie-toren probleem hoort. $H(n) = 2^n - 1$, $H(7) = 127$.
Bij elke schijf meer verdubbelt $H(n)$; $V(n)$ verdubbelt pas na twee schijven meer.

Kees Henzen had zijn twijfels: misschien is het niet per se het meest efficiënt de drie zetten met de grootste twee schijven direct na elkaar te doen.
Hij had gelijk: hier volgt een lijstje zetten, 27 zetten, om zeven schijven van A naar B te verplaatsen. Met CA wordt natuurlijk bedoeld: breng de bovenste schijf van de C-toren naar de A-toren.

1. AC	10. AD	19. AD
2. AB	11. BA	20. CD
3. AD	12. BD	21. AB
4. CD	13. AD	22. CA
5. AC	14. AB	23. CB
6. BC	15. DB	24. DC
7. AB	16. DA	25. DB
8. DC	17. BA	26. AB
9. DB	18. DB	27. CB

Probeer het maar met de Nederlandse munten: dubbeltje, kwartje, stuiver, gulden, 5-piek, riks, giropas.
Ik vermoed dat het vinden van de ware formule voor $V(n)$ erg moeilijk is. Bij het opgeven in oktober '88 kende ik alleen $V(n)$ zoals hierboven!

Het rampjaar 2013

Dit is een nieuwjaarspuzzel die langer meegaat dan 1990.
Van aardappels kun je stempels maken. Cijfers bijvoorbeeld: 1, 9 en 0. Dan kun je je nieuwjaarskaarten zelf stempelen. Een gelukkig jaar, 1990: er zijn geen vier, maar drie stempels nodig. 1991 is nog beter!
Jammergenoeg kun je aardappelstempels geen jaar bewaren. In deze puzzel snijden we elk jaar nieuwe stempels. Ons eerste rampjaar is dan 2013: dan zijn er vier stempels nodig.

Opgave 62

Wanneer is er een nog langere rampjaar-loze periode dan de huidige?
Zijn er al langere periodes zonder rampjaren geweest?
Deze opgave is gelukkig niet zo lastig!

Eervolle dobbelaar met valse stenen

Kees Henzen kraakt de dobbelsteenopgaven 58, 59 en 60 (nog steeds oktober '88). Voor wie nog terug wil kijken: het antwoord bij opgave 60 is: nee. En het maximum is dus niet 2, maar $\frac{17}{9}$. Omdat de berekeningen te uitgebreid zijn, slechts een commentaar: hulde!

Oplossingen aan:
Zoals voorheen:
Aad Goddijn
Vakgroep OW & OC
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht