

De conferentie Wiskundeles en Informatie-Technologie

G. J. Th. A. Bakx

Universiteit Twente, Enschede

Op vrijdag 29 september ging een deel van 'wiskunde-onderwijsminnend' Nederland naar Noordwijkerhout voor de tweedaagse conferentie 'Wiskunde & Informatietechnologie' (WIT), georganiseerd door OW & OC van de Rijksuniversiteit Utrecht. Ik wil in dit artikel een poging wagen om, voor degenen die het wiskundeonderwijs ook minnen, maar niet aanwezig waren, een impressie te geven van datgene wat ons werd aangeboden. De door mij gevolgde lezingen, het conferentie-programmaboekje en aantekeningen van collega's vormen de bestanddelen voor het hier volgend verslag.

Inleiding op de conferentie

(H. B. Verhage)

In haar inleiding ging Heleen Verhage in op de stand van zaken, waar het de bijdrage betreft die de informatietechnologie kan leveren aan de verbetering van het wiskundeonderwijs. Daarbij werd onderscheid gemaakt tussen hoe je de computer 'in principe' kunt gebruiken, hoe je de computer 'in de praktijk' kunt gebruiken en hoe de computer 'feitelijk' wordt gebruikt. Het zal niemand verbazen dat er verschillen werden geconstateerd. Als belangrijk probleem van deze tijd wees zij op de kloof die er is tussen wat de technologie het wiskundeonderwijs te bieden heeft en de ontwikkeling van het curriculum. In een aantal plenaire lezingen en parallel aan elkaar gegeven zittingen konden deze zaken aan de orde gesteld worden, want, zo werk ons voorgelegd, 'WIT wast WIT, WIT-ter kan het niet'.

Intellectual mirrors

(J. L. Schwartz)

Onder deze titel werd de eerste plenaire lezing gestart door dr. J. L. Schwartz uit de Verenigde Staten. Hij legde ons zijn overwegingen voor op grond waarvan hij kiest voor het gebruik van computerprogramma's van een bepaalde soort, die hij 'Intellectuele Spiegels' noemt. Het type programma dat een leerkracht wil gebruiken hangt af van de pedagogische ideologie die hij of zij hanteert.

Om twee extremen te noemen: als je de leerling ziet als een lege container dan ga je hem of haar vullen met behulp van een boek of een computer; als je de leerling ziet als een potentiële uitvinder dan geef je

hem of haar een kist met gereedschap. Dit onderscheid maakt meteen duidelijk in welke richting de ideologie van Schwartz gaat: die van de onderzoeken-de leerling. Een 'Intellectual Mirror' nu is een computeromgeving die de gebruiker in staat stelt zijn/haar kennis te exploreren, doordat in die omgeving gekozen kan worden uit een aantal primitieve operaties en de gebruiker met behulp daarvan 'vragen kan stellen' aan de omgeving. De leerling kan daarmee eigen, voor hem/haar nieuwe kennis construeren.

Laten we eens wat voorbeelden bekijken die Schwartz ons voorlegde.

Wanneer in de meetkunde algemene eigenschappen van figuren aan de orde zijn, onderzoeken we die aan de hand van bepaalde plaatjes van die figuren. Een Intellectual Mirror genaamd 'Geometry' biedt de leerlingen de mogelijkheid om op een computerscherm punten, lijnstukken, veelhoeken, cirkels, e.d. te plaatsen en daarop operaties uit te voeren. Een vragenreeks van een onderzoekende leerling kan dan de volgende zijn: teken vierkant ABCD; deel de zijden AB, BC, CD en DA in drieën; noem de punten op eenderde respectievelijk E, F, G, H; wat is EFGH voor een figuur?; hoe verhoudt zich de oppervlakte van ABCD en EFGH?; (ook dit berekent de computer snel voor de gebruiker: 1.8); kun je dit getal zien door in ABCD de lijnstukken te trekken die het vierkant in negen vierkanten verdeelt?; maar veronderstel nu eens dat ABCD geen vierkant maar een parallellogram is (de computer construeert snel de nieuwe situatie waarin ABCD een parallellogram is); ... Steeds wordt de stap gemaakt van speciale gevallen naar meer algemene gevallen en kunnen algemene eigenschappen van meetkundige figuren onderzocht worden.

Bij de algebra wijst Schwartz op het probleem dat leerlingen eigenschappen van de symbolische representatie van een functie (voorschrift, grafiek) verwarren met eigenschappen van de functie zelf. Vandaar dat een Intellectual Mirror, 'Function Synthesizer', is ontworpen waarin zowel de naam van de functie als het voorschrift en de grafiek gemanipuleerd kunnen worden. Het onderzoek van de leerling richt zich dan bijvoorbeeld op het wijzigen van de ene representatie en de consequenties daarvan op de andere representatie. Zo kunnen de functies $f(x) = x - 3$ en $g(x) =$

$-x \rightarrow 5$ gedefinieerd worden, waarna de grafieken door het programma worden getoond. Op de functienamen kunnen operaties worden uitgevoerd: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. De grafiek van $h(x)$ wordt ook getoond. Vervolgens kan de grafiek van g verschoven worden en het gevolg daarvan in grafiek en voorschrift worden bestudeerd. Bijzonderheden aan de snijpunten van de grafieken van $f(x)$, $g(x)$ en $h(x)$ kunnen worden onderzocht op algemene geldigheid, door de voorschriften van $f(x)$ en $g(x)$ te wijzigen. ... Ook hier is dus weer sprake van onderzoek naar algemene geldigheid van eigenschappen van speciale gevallen.

De volgende Intellectual Mirror heet 'Algebraic Proposor'. Dit programma biedt de mogelijkheid het wiskundige model van een probleemsituatie in te voeren en met het doorrekenen daarvan vragen te beantwoorden. De 'spiegel' stelt de leerling in staat het overzicht te houden over de gehanteerde variabelen, de geïntroduceerde vergelijkingen, het verloop in de tijd van de waarde van de variabelen (bij tijdsafhankelijke processen), de afhankelijkke relaties die variabelen onderling hebben. Vervolgens kan worden bestudeerd hoe het model gegeneraliseerd kan worden: vervang een getal door een variabele en laat deze in waarde variëren. Men kan tevens de vraag aan de orde stellen welk probleem ontworpen kan worden dat past op een bepaald model en daarmee klassen van problemen onderzoeken. ...

Een 'spiegel', waar Schwartz later op de conferentie nog terug zou komen, is de 'Broken Calculator'. Dit programma stelt de leerling een rekenmachine ter beschikking, die niet alleen een getal-display kent, maar ook de ingetoste operator laat zien en het geheugen. De eigenaardigheid van de machine is vooral dat toetsen 'uitgeschakeld' kunnen worden en de rekenmachine als het ware 'stuk' is (vandaar de naam 'broken'). Op rekenkundig gebied kunnen dan weer heel wat onderzoekjes uitgevoerd worden: bereken $7999 + 7495$ niet de rekenmachine waarvan de '+'-toets 'stuk' is. ...

Schwartz eindigde met de uitspraak dat software-omgevingen, die de gebruiker in staat stellen om dat wat hij/zij begrijpt verder te exploreren, het karakter van de school zullen kunnen veranderen. Ik geef u deze uitspraak ter eigen beoordeling.

Dan volgt er een middag met parallel-zittingen. Hier moest dus gekozen worden. Het repertoire bestond uit de volgende onderwerpen:

– *Discrete wiskunde:*

(E. van de Vrie, Open Universiteit Heerlen)

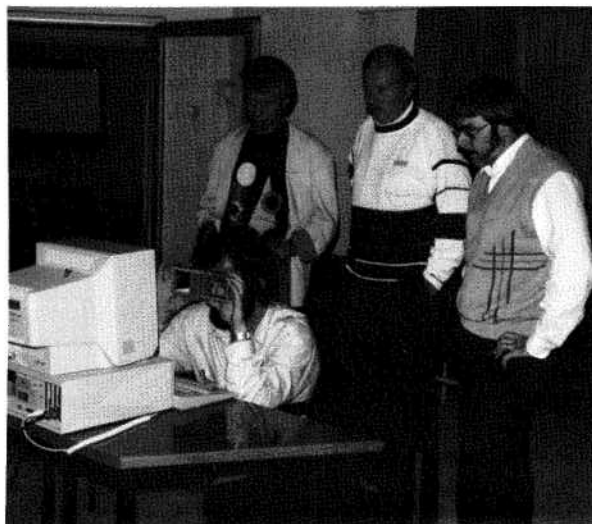
Aan de Open Universiteit wordt bij een cursus discrete wiskunde een aantal COO-programma's gemaakt die de studenten in staat stellen om thuis, op de eigen PC, begrippen te leren en regels te oefenen. Door de beschikbare programma's te bekijken, konden de deelnemers kennismaken met de wijze waarop daarbij de interactieve mogelijkheden van de computer worden benut, een en ander als aanvulling op het schriftelijk studiemateriaal. De structuur van de programma's is telkens als volgt: introductie, voorkennistoets, eigenlijke onderwerp, sa-

menvatting, eindtoets. Steeds is een woordenboek en een rekenmachine oproepbaar.

– *Ruimtemeetkunde:*

(H. v.d. Kooy, M. Doorman)

In het kader van HAWEX wordt in lessen Ruimtemeetkunde het programma 'Ruimfig' gebruikt. De deelnemers van de groep konden, aan de hand van een practicumhandleiding voor leerlingen, zien dat dit programma draadmodellen op het scherm tekent die in een driedimensionale situatie staan opgesteld. Het programma stelt een aantal standaardfiguren meteen al ter beschikking (vierkant, zeshoek, kubus, enzovoort), maar de gebruiker kan ook eigen figuren via coördinaten invoeren. Op deze figuren kunnen transformaties worden uitgevoerd: verschuiven, draaien, vergroten. Van deze situaties kunnen parallelle en centrale projecties op het scherm van de computer getekend worden. Door transformaties te herhalen en de tussenfiguren op het scherm te laten staan, kunnen nieuwe figuren ontstaan en worden gedefinieerd: 'een prisma ontstaat door een veelhoek (grondvlak) evenwijdig aan de beginstand langs een lijn te verschuiven'.



Tussen de bedrijven door konden deelnemers aan de conferentie hun eigen programma's laten zien. De heer Boreas uit Ulestraten (rechts op de foto) vertoonde een programma voor ruimtemeetkunde. Door met een stereokijker naar het scherm te kijken, krijgen de getekende figuren diepte.

– *Negatieve getallen:*

(B. H. Knip)

Na een kennismaking met het leerprogramma 'Heks', dat het onderwerp het bewerken van gehele getallen binnen een bepaalde context behandelt, werd gediscussieerd over de problematiek van de brugklasleerling. De vraag kwam aan de orde welke rol een context, of meerdere isomorfe contexten, en de computer als hulpmiddel voor het aanbieden van contexten voor deze leerlingen kunnen of moeten spelen. Men vroeg zich af of de computer de rol kan spelen van aanbieder van en helper bij een reeks van oefeningen om een 'hoger niveau' te bereiken: bijvoorbeeld het formuleren van generalisa-

ties zoals die bij de introductie van de bewerkingen op gehele getallen vanuit het bewerken van natuurlijke getallen worden gedaan. De deelnemers kregen een concept checklist uitgedeeld met behulp waarvan naar courseware kan worden gekeken. Daarmee kan een oordeel gevormd worden over de verschijningsvorm van het programma en de omgangsmogelijkheden van de leerling hiermee, over de attitudeverbetering die mogelijk door het programma wordt aangebracht, en over de stimulansen die van het programma uitgaan tot het maken van de beoogde 'niveaustap'.

– *Graphic Calculator:*

(M. Doorman, J. de Jong, M. van Reeuwijk, M. Simons)

Sinds er zakrekenmachines op de markt verschijnen die grafieken kunnen tekenen en zelfs functievoorschriften kunnen differentiëren, is de discussie op gang gekomen of die misschien niet veel eerder in de wiskundelessen in de toekomst gebruikt zullen worden dan de computer. De voordelen zijn duidelijk: ze zijn goedkoper en kleiner, dus gemakkelijker te verplaatsen. De deelnemers konden kennismaken met de werkbladen, ontworpen om op het Cals College wat prille ervaringen op te doen met het gebruik van een calculator als de HP28S. Het apparaat stelt zijn mogelijkheden ten dienste bij onderwerpen als grafiek van een functie (grafieken worden getekend), berekenen snijpunten (vergelijkingen worden opgelost), bepalen afgeleide (afgeleide functie wordt door de calculator bepaald). Door deze hand- en spandiensten kan de grafische rekenmachine het wiskundeonderwijs beïnvloeden, aldus de gespreksleider. Eindeloze training van bovenbedoelde vaardigheden worden overbodig, waardoor meer tijd beschikbaar komt voor werken aan begrip, interpreteren van de oplossing, kiezen van strategieën. In de discussie werd door de deelnemers met name gewezen op de gebruikers-onvriendelijkheid van de huidige apparaten. We zullen moeten wachten tot de PC en deze rekenmachine in bedieningsgemak elkaar gaan benaderen. Opvallend was ook de uitspraak van een deelnemer, die zei: 'als ze ontdekken dat door deze apparaten meer tijd vrijkomt in de wiskundelessen, zullen we deze tijd niet krijgen voor genoemde zaken, maar zal de lessentabel onmiddellijk worden aangepast'.

– *Dynamische simulatie:*

(P. J. van Bloklant, D. Kok)

Wanneer in de lessen het toepassen van wiskunde aan de orde komt hebben we te maken met de problematiek van het ontwerpen en gebruiken van wiskundige modellen. Voor het simuleren van tijdfankelijke processen is het programma VU-Dynamo ontworpen. Dit programma vraagt om differentievergelijkingen die model staan voor het dynamische proces dat bestudeerd wordt. Het presenteert tabellen en grafieken van de waarde van de ingevoerde variabelen, zoals die in de tijd vanuit een bepaalde beginwaarde zullen verlopen. Op deze manier simuleert het programma het betreffende proces en kan het effect bestudeerd worden van het wijzigen van bepaalde parameters op het verloop van het proces. De aanwezigen maakten kennis met

het opstellen van modellen, het implementeren ervan in VU-Dynamo en het gebruiken van de resultaten voor het trekken van conclusies, aan de hand van lesmateriaal van een experiment in 5-vwo B.

– *OR en Statistiek:*

(H. C. Tijms, VU Amsterdam)

De lezing in deze werkgroep betrof een demonstratie van een software-pakket, bestaande uit zeven modules: lineaire programmering, het kortste pad probleem, de wet van de grote aantallen, de normale klokvormige curve, het handelsreizigersprobleem, statistische tabellen en grafieken, het Steiner-probleem. Met het pakket is het mogelijk de betreffende onderwerpen aan de orde te stellen en daarbij de computer voor grafische en numerieke ondersteuning te gebruiken. De spreker wees de aanwezigen erop dat door een dergelijk pakket het mogelijk is veel leuke en praktische toepassingen in de wiskundelessen aan de orde te stellen, die alle leerlingen kunnen begrijpen. Het onderwijs wordt boeiender en motiverender, mede ook doordat het laboratoriumexperiment door de computer binnen het bereik van de leerlingen komt. Opmerkelijk was dat de spreker daarbij voortdurend dacht aan de wiskunde B-leerlingen, terwijl de onderwerpen tot wiskunde A behoren.

– *Goniometrie:*

(H. J. Smid, A. Verwey, TU Delft)

Voor vier tot zes lesuren is door de TU-Delft en het Christelijk Lyceum Delft een COO-serie ontwikkeld en uitgeprobeerd voor het onderdeel goniometrie voor 4-vwo. Daarbij komen aan de orde de eigenschappen van de grafieken van de sinus- en cosinusfunctie, het oplossen van vergelijkingen die eenvoudig tot het type $a \sin x = b$ of $a \cos x = b$ te herleiden zijn het oplossen van overeenkomstige ongelijkheden, het bepalen van de grafiek van een functie van de vorm $a \sin(bx + c) + d$ en het bepalen van een functievoorschrift als een dergelijke grafiek gegeven is. De deelnemers konden kennismaken met het pakket en kregen ervaringen te horen die opgedaan zijn in het samenwerkingsproject.

– *HAVO en VU-Grafiek:*

(D. Kok, H. van der Kooy, P. van Wijk)

Door twee docenten van het HAWEX-experiment werd verslag gedaan van ervaringen die zij hebben met het gebruiken van het grafisch pakket VU-Grafiek voor de nieuwe examenprogramma's voor de havo. Met het programma is het mogelijk op het computerscherm grafieken te tekenen en vele onderwerpen die te maken hebben met functies en hun grafieken met ondersteuning van de computer te behandelen. Men kan 'inzoomen' op punten van de grafiek ten behoeve van de introductie van het begrip differentiëren en men kan in een leerlingenpracticum het functievoorschrift laten zoeken bij een op het scherm getekende grafiek. VU-Grafiek kent de volgende onderdelen: zoek het functievoorschrift, grafiek tekenen, uitvergrooten, differentiëren, integreren, vergelijkingen numeriek oplossen, Taylor polynomen, Blancmange, definiëren van eigen functies, parametervoorstellingen, krommen in de ruimte, complexe functies, differentiaalvergelij-

kingen, simultane differentiaalvergelijkingen, functies van twee variabelen. U ziet dat de meeste van deze onderwerpen passen binnen het curriculum van het voortgezet onderwijs, maar dat ook enkele onderdelen meer geschikt zijn voor het tertiaire onderwijs.

– *Informatica en wiskunde:*

(C. K. M. Crutzen, Open Universiteit Heerlen, D. K. Wielenga, Hogeschool Holland Diemen)

In de plannen voor de basisvorming wordt, volgens de telling van de sprekers van deze groep, een derdiende vak genoemd: informatiekunde. Een eindtermencommissie heeft doelstellingen weten te formuleren voor dit vak, dat slechts twintig lesuren krijgt toebedeeld. Dit maakt dat een aantal doelstellingen in andere vakken gerealiseerd moet worden. Het thema van de groep was dan ook welke werkbare voorbeelden er te bedenken zijn voor de overlap tussen informatiekunde en wiskunde. Daarbij moet gedacht worden aan informatiekunde die helpt bij het leren of begrijpen van wiskunde en aan wiskunde die helpt bij het leren of begrijpen van informatiekunde. Wiskunde en informatiekunde raken elkaar als het gaat over het bewerken van ongeordende gegevens, zó dat er informatie uit te halen is (statistiek, grafieken, e.d.). Maar ook bij (gegevens) modellering ten behoeve van modelvorming, het werken met goed geformuleerde beweringen en logische operatoren en het gebruiken van toepassingsprogramma's.

– *Courseware voor wiskunde uit de USA:*

(J. L. Schwartz)

Hoewel de titel iets anders suggereert wilde Schwartz, aansluitend op zijn ochtendlezing, zijn programma's toelichten door te vertellen over ervaringen ermee op scholen. Hij deed bijvoorbeeld verslag van een experiment met het meetkundeprogramma. Zogenaamde experimentele leerlingen ontdekten met het programma eigenschappen van meetkundige figuren en traditionele leerlingen kregen het normale onderwijs in die eigenschappen. Beide groeperingen deden zowel een traditioneel als een experimenteel examen, waarbij het laatstgenoemde examen opgaven bevatte waarmee leerlingen hogere wiskundige vaardigheden konden demonstreren als: vermoeden, bewijzen, generaliseren. Schwartz meldde als resultaat dat op het traditionele examen de beide groepen gelijk scoorden, terwijl bij het experimentele examen de experimentele leerlingen verbazend beter scoorden.

Over de computer als uitlegmiddel was Schwartz heel uitgesproken: het uitleggen zit niet in de computer. De software moet geen vragen stellen; leerlingen moeten zelf vragen (leren) stellen. Inzicht ontstaat op basis van het generaliseren van voldoende wiskundige ervaringen. De computer kan hierbij helpen, maar wel pas nadat de leerlingen met pen en papier aan de slag zijn geweest.

Het werken met goede software maakt het vak van leraar moeilijker, maar ook spannender en interessanter. De weg die leerlingen ingaan levert soms onverwachte vondsten op. De leraar wordt daar dan mee geconfronteerd, maar dat kan ook voor hem/haar stimulerend en motiverend zijn.

Tot slot nog een hoofdstelling van Schwartz voor het wiskundeonderwijs. 'Stel nooit een vraag die maar één antwoord heeft. Het is altijd mogelijk de vraag anders te stellen'. Zo kun je van de vraag: 'los de vergelijking op' ook de vraag maken: 'hier is de vergelijking en hier is de oplossing, laat zien hoe je van het ene op het andere komt'.

Computer Based Microworlds for mathematics education

(C. Hoyles)

In de avond was er weer een plenaire voordracht, deze keer van dr. C. Hoyles uit Londen. Zij heeft daar veel gewerkt met Logo, Spreadsheets, Database en Graph Plotting.

Enkele hoofdpunten van haar ervaring daarmee waren:

- De Logo-omgeving is heel goed te gebruiken voor andere dingen dan alleen maar meetkunde: bijvoorbeeld voor evenredigheden en verhoudingen.
- Bij Spreadsheet-programma's is het gebruik van een muis onontbeerlijk.
- De leraar 'ziet' meestal wel allerlei mooie wiskunde in de programma's, maar zien de leerlingen dat ook?
- De subtiele tussenkomst van de leraar bij het gebruik van de computer in de klas kon weleens van doorslaggevend belang zijn voor het succes.
- Nascholing is zeer belangrijk. Je moet niet zomaar op een achternamiddag met programma's leren omgaan. De leraar moet vertrouwen krijgen in het apparaat, moet het zichzelf als didactisch middel eigen kunnen maken en moet zich weten te vinden in de nieuwe wiskunde die het voortbrengt.

Nadat ons een nachtrust was gegund, waren er op de tweede dag weer parallelzittingen, met aan het einde van de middag een afsluitende paneldiscussie. Ik doe een verdere poging tot verslaggeving van de verschillende zittingen die voor die dag nieuw waren.

– *Statistiek en bestanden:*

(S. L. Kemme)

Zoals de titel al suggereert kwam in deze groep de integratie van informatica en wiskunde aan de orde. De deelnemers konden kennismaken met een experimenteel computerprogramma, genaamd 'SORBet', waarmee het mogelijk is statistiek te plegen op relationele bestanden. De gebruiker kan bestanden van gegevens opbouwen en daaruit door middel van een SQL-achtige vraagtaal weer gegevens selecteren. Vervolgens is het mogelijk om deze gegevens te ordenen of te typeren met behulp van de beschrijvende statistiek. Een bestand moet men opgebouwd denken uit tabellen, waarin gegevens over een bepaalde context zijn opgeslagen. Voor de goede ordening kunnen meerdere tabellen gebruikt worden om de gegevens in op te slaan. Deze tabellen kunnen worden bewerkt: rijen veranderen, rijen verwijderen. Doordat meerdere tabellen een gemeenschappelijke kolom hebben, kan men via een vraagtaal gegevens combineren en selecteren: selecteer uit tabellen ... waarvoor geldt ... de kolommen ... op volgorde van ... Van dergelijke resultaten kan men dan, met het programmagedeelte

beschrijvende statistiek, kijken naar scoreverdelingen (frequentietabellen, diagrammen, grafieken), kruistabellen, correlaties en regressies en transformaties van gegevens. Het geheel biedt de mogelijkheid om in het wiskundeonderwijs, in relatie met de informatica, gegevens van praktische voorbeelden te betrekken, via een vraagtaal daaruit dingen te selecteren en daarop statistiek te bedrijven. Een punt van discussie tussen de deelnemers was de vraag of een computerprogramma, dat bijvoorbeeld het gemiddelde oplevert van de waarden van een variabele (hier dus een kolom), nu wel of niet een poging tot middeling van waarden op nominaal niveau moet afstraffen. Wanneer scholen bijvoorbeeld in een tabel een nummer krijgen toebedeeld, is het dan beter dat de gebruiker dan ook moet opgeven dat dit een variabele op nominaal niveau is en zal het programma dan weigeren het gemiddelde van de nummers te presenteren, of moet dat juist niet en krijgt de leerling in een onbepaald dienstbetoon op zijn verzoek het gemiddelde aangeboden?

– *Meetkunde met LOGO:*
(G. Bakema)

Hier kwam ter sprake het bedrijven van zogenaamd schildpadmeetkunde met behulp van de computertaal Logo. Logo is een taal die de gebruiker in staat stelt om met commando's als stapvoorwaarts 30, stapachterwaarts 5, draairechtsom 20, draailinksom 45, enzovoort, een 'schildpad' in de driedimensionale ruimte te besturen en die al dan niet een streep achterlaat. Het resultaat daarvan wordt op het computerscherm geprojecteerd. Door nu figuren te definiëren in termen van deze bewegingen en in termen van reeds gedefinieerde figuren, kan men Schildpadmeetkunde (Turtle Geometry) bedrijven. Daarbij kunnen onderwerpen aan de orde komen als veelhoeken en spiralen, maar ook zintuigmeetkunde, fractals, vlakvullingen, vectormetkunde, ruimtemetkunde, bolmeetkunde, topologie en niet-euclidische wiskunde (zie het boek 'Turtle Geometry' van Abelson en diSessa). Een dergelijke twee- en driedimensionale omgeving is onder andere beschikbaar via de Nederlandse LCN-Logo. De deelnemers kregen dit gedemonstreerd en konden het enthousiasme proeven van de spreker over de bijdrage die dit aan het meetkundeonderwijs kan leveren, een enthousiasme dat ik met hem deel.

– *Eerlijk verdelen:*
(F. van Galen, J. Zuidema)

Het breukenonderwijs op de basisschool krijgt een ander karakter. Het 'mechanistische' rekenonderwijs wordt vervangen door het 'realistische' rekenonderwijs. Zo dus ook de didactiek van het breukenonderwijs. Wat breuken zijn en hoe je ze optelt, aftrekt, vermenigvuldigt en deelt, wordt niet onderwezen door het domweg van buiten leren van regeltjes, maar wordt opgebouwd vanuit een heel concreet niveau: verdelen van chocoladerepen over een aantal kinderen. Deze didactiek wordt ondersteund door het programma 'Eerlijk verdelen', waarmee leerlingen bijvoorbeeld repen (van pannekoeken of zuurstokken) op allerlei manieren kunnen snijden en uitdelen. Via tussenfasen kunnen ze dan uitein-

delijk in het programmaonderdeel komen waarin hun gevraagd wordt 'schuilnamen' (breuken dus) te bedenken voor sommen en producten van breuken. In de groep stond verder ter discussie of een dergelijk programma, primair bedoeld voor het basisonderwijs, ook bruikbaar is in het voortgezet onderwijs. De sprekers vroegen zich af of een leerkracht, die constateert dat leerlingen weinig van breuken snappen, daar maar in moet berusten en volstaan met nog maar eens oefenen, of is het zinvol om het toch nog eens anders te proberen?

– *Proefstation West Nederland:*
(H. Spek, M. Simons)

In dit proefstation worden experimenten gedaan waarin aandacht wordt besteed aan de rol van het schriftelijk materiaal bij het werken met de computer. Bij zogenaamde 'open' software wordt de leerling niet over een door de computer gebaande weg geleid, maar kan de leerling een eigen weg bewandelen en functioneert de computer als hulpmiddel bij het uitvoeren van opdrachten en het oplossen van problemen in dat kader. Vanwege het open karakter is de rol van het begeleidende, schriftelijke practicummateriaal van belang, omdat daarin de uitdagende opdrachten moeten staan die de leerlingen aanzetten tot onderzoekend leren. Op het Cals College streeft men naar integratie van het schriftelijk materiaal dat de leerlingen gebruiken: boek, schrift en werkbladen voor de computer. De opdrachten in de werkbladen zijn dan zo, dat de computer het eventuele reken- en tekenwerk verricht en de leerlingen deze resultaten moeten interpreteren. De deelnemers konden met deze aanpak kennismaken aan de hand van de programma's 'Verbindingsmatrices' en 'Badkuip' (onderdeel van 'Grafiektaal').

– *ALCOR en W12-16:*
(A. Goddijn)

In 1992 moet het team W12-16 een uitgewerkt wiskundeprogramma kunnen voorstellen, met voorbeelden en door onderzoek ondersteund, dat enerzijds aansluit bij de ontwikkelingen in het basisonderwijs en anderzijds geschikt moet zijn voor zowel leerlingen die na die jaren geen wiskunde meer zullen doen en leerlingen die verder gaan met havo en vwo (wiskunde A en wiskunde B). Van een dergelijk programma valt te verwachten dat er meer aandacht zal worden besteed aan toepassingen en de formele wiskunde minder aandacht krijgt. In deze bijeenkomst konden de deelnemers kennismaken met 'ALCOR', een in ontwikkeling zijnde programmeertaal die in de experimenten gebruikt gaat worden. Met deze taal kunnen op heel eenvoudig niveau reken- en tekenopdrachten ingetikt worden, die direct worden uitgevoerd of, met enig commentaar, ter verbetering worden aangeboden. Maar er kunnen ook programma's in geschreven worden, die door de leerlingen bij het onderzoeken van variabelen en functies gebruikt kunnen worden. De deelnemers konden zelf werken met de taal en constructief commentaar leveren.

– *Computer-Algebra:*
(G. Bakema, E. B. N. P. Kamerich)

Aan de hand van opgaven zoals je die in de school-

boeken tegenkomt, kregen de deelnemers van deze groep een parallelle demonstratie te zien van de programma's 'Maple' en 'Derive'.

Dit zijn twee programma's die met name ook in staat zijn formules te manipuleren. Ze zijn in staat tot 'exact rekenen': breuken, wortels en dergelijke worden niet decimaal afgerond als men dat niet wenst, breuken worden zonnodig gelijkmatig gemaakt, enzovoort. Verder kunnen de programma's letterrekenen, ontbinden in factoren, haakjes wegwerken, rekenen met vectoren en matrices, afgeleide functies bepalen, primitieve functies bepalen, limieten bepalen, enzovoorts. Ook zagen de deelnemers grafieken getekend worden van functies waarvan op het examen gevraagd wordt: onderzoek en teken ... Niet alleen functies van één variabele, maar ook van twee variabelen en functies gedefinieerd als parametervoorstelling of met poolcoördinaten. Het verschil tussen de programma's bleek dat Maple (nu nog alleen beschikbaar op Apple-Mac computer) qua mogelijkheden verder gaat (differentiaalvergelijkingen oplossen, en dergelijke). Het grote pluspunt van Derive bleek echter de gebruikersvriendelijkheid. Zo komen bij Derive de formules op het scherm te staan zoals dat in de lessen gebruikelijk is, terwijl bij Maple de resultaten eerst naar deze notatie geïnterpreteerd moeten worden. De sprekers hadden twee bedoelingen met de demonstratie. Op de eerste plaats om de vraag aan de orde te stellen wat de consequentie is van de beschikbaarheid van dergelijke programma's voor het wiskundeonderwijs: zullen we een accentverschuiving te zien krijgen van oefenen in rekenvaardigheden naar gebruik en interpretatie van berekende resultaten? Op de tweede plaats om COO-programmeurs uit te nodigen een dergelijk pakket in de COO-programma's op te nemen om betere en intelligentere hulp- en instructieprogramma's te krijgen.

– *Prolog en Intelligent Tutoring Systems:*

(P. M. A. Bergervoet)

Bij een 'Intelligent Tutoring System' (ITS) moet men denken aan een COO-programma dat een zekere mate van intelligentie bevat en daardoor, bijvoorbeeld, niet alleen kan constateren dat een leerling een fout maakt, maar ook wát de leerling precies fout doet. De spreker van deze groep legde uit dat de programmeertaal 'Prolog' daartoe waarschijnlijk erg goed kan worden toegepast. Prolog is een programmeertaal die behoort tot de zogenaamde nieuwe generatie, waarin het programma niet bestaat uit door de computer in een bepaalde volgorde uit te voeren instructies. In Prolog definiëert men als-dan-regels, die samen de probleemsituatie beschrijven. Door vervolgens een vraag in te voeren, probeert Prolog het probleem op te lossen door middel van het evalueren van de als-dan-regels. Op deze manier kan men wiskundig correcte regels programmeren, maar ook niet-correcte regels, met behulp waarvan een leerling in een COO-programma vervolgens geholpen kan worden. De deelnemers van de groep maakten in een practicum kennis met de taal Prolog en kregen door middel van voorbeelden een idee van hoe dat

dan zou kunnen functioneren in een ITS. Voor er echter een in de klas werkend ITS is zal er nog een lange ontwikkelingsweg te gaan zijn.

– *Objectif géométrie:*

(J. Delerue)

De Franstalige titel van deze (drie keer herhaalde) bijeenkomst verradt het geboorteland van de spreker. Delerue sprak echter Engels en dat was slechts één van de charmes van het bijwonen van zijn lezing. Hij bleek ook een actief spreker: van links van het podium naar rechts van het podium, springend van het podium en vervolgens, via het trapje, het podium weer bestijgend. Door lijf en leden ondersteund, demonstreerde hij de aanwezigen een videoplaats die in Frankrijk specifiek ten behoeve van het meetkundeonderwijs is gemaakt. De interactie tussen computer, videobeelden en het leraarskrijt werd door Delerue als essentieel aangeduid om twee aspecten van het onderwijzen van wiskunde gestalte te geven:

- het verband leggen tussen observaties van de werkelijkheid en representaties ervan in de vorm van diagrammen, tabellen, figuren, enzovoorts;
- het verband leggen tussen representaties en vormen van wiskundige activiteiten en begrippen.

Allereerst kregen de deelnemers fragmenten van de videoplaats te zien: stijgende roltrappen, dalende roltrappen, verschillende ruitewissers, een sleutelkopieerder, enzovoorts. Met de afstandbediening van de recorder kon, door een nummer in te typen, een bepaald beeld meteen worden opgeroepen: de ruitewisser van een bus. Door op het beeldscherm met een stift het wisserblad over te trekken, het fragment een stukje verder te laten lopen en vervolgens opnieuw het wisserblad over te trekken, kon ieder duidelijk zijn wat je anders misschien helemaal niet opvalt: de twee op het scherm getrokken lijnstukken kunnen worden gezien als origineel en beeld van een evenwijdige verschuiving, steeds blijft het wisserblad verticaal op de ruit staan. Hoe komt dit? Bij nadere studie van de arm van de ruitewisser bleek dat een parallellogram te zijn: hij bestond uit twee evenwijdige steunen. Nu snel een ander plaatje van een andere ruitewisser geselecteerd en weer twee strepen op het scherm: duidelijk géén parallellogram! De arm bestond dan ook niet uit twee evenwijdige steunen, maar uit een enkelvoudige steun. De twee strepen kunnen worden gezien als origineel en beeld van een rotatie. Nu weer vlot naar beelden van een schommel in een speeltuin. In de tussenstanden van het zitje kon men opnieuw een evenwijdige verschuiving herkennen en in de ophanging van het zitje een parallellogram.

...

De videoplaats bevat in totaal zo'n 53.000 plaatjes. Daarmee konden fragmenten uit de werkelijkheid getoond worden, eventueel in slow-motion of plaatje voor plaatje. Maar er zijn ook animaties in opgenomen die onderwerpen als puntspiegeling/-symmetrie, lijnspiegeling/-symmetrie, puntvermenigvuldiging, congruentie, gelijkvormigheid verduidelijken en waarin stripfiguren voor een komische noot zorgen. Bij het onderwerp symmetrie was

zelfs de achtergrondmuziek symmetrisch! En bij een versnelling ging ook het fluittoontje versneld omhoog!

Hieruit kan dan met behulp van de afstandbediening geselecteerd worden, maar ook de computer is aangesloten. Met het computerprogramma is de selectie van fragmenten te maken en kan er gestopt, langzaam verder gegaan of gecontinueerd worden. Met behulp van menu's is een en ander te organiseren en voor te programmeren. Het bleek zelfs mogelijk videoplaatjes te digitaliseren en, via een netwerk in de klas, te plaatsen op het beeldscherm van de computers van de leerlingen. Zij worden dan in staat gesteld hieruit meetkundige vormen te selecteren en te manipuleren (CAD). Steeds is het motto: 'je ziet iets, je vermoedt iets, maar je hebt wiskunde nodig om het te bewijzen!'.

Deze lezing heeft mijn mening bevestigd dat met de computergestuurde videoplaat iets essentieel nieuws aan de wiskundeles kan worden toegevoegd. Volgens mij hebben we met Delerue in het wiskundelokaal van de toekomst kunnen kijken.

Dan was er, tot slot van de conferentie, de afsluitende paneldiscussie. De deelnemers aan de conferentie hadden steeds vragen schriftelijk bij de voortreffelijke organisatie, onder leiding van G. Vonk, kunnen indienen. Met name twee vragen kwamen in de discussie aan de orde.

Allereerst was er de vraag naar leerlingenmateriaal, door OW & OC te ontwikkelen, voor de Graphics Calculator. De kersverse hoogleraar J. de Lange antwoordde, namens het OW & OC, dat geconstateerd

wordt dat deze apparaten nog niet zo gebruikersvriendelijk zijn dat gebruik in de klas al op grote schaal kan plaatsvinden. Maar dat wil niet zeggen dat er gewacht moet worden tot alles klaar is. Er wordt van dergelijke apparatuur een drastische invloed verwacht op ons onderwijs. Vandaar dat men zal bijhouden wat er op dit gebied gaande is en zullen kleinschalige experimenten wel worden uitgevoerd.

Dan was er de vraag of een computerprogramma als Derive, wat immers wel de gebruikersvriendelijke mogelijkheden tot formulemanipulatie en tekenen van grafieken in zich bergt, tot gevolg zal hebben dat wiskunde als schoolvak wordt afgeschaft. Niemand was daar echt bang voor. Het bood Schwartz nog eens de mogelijkheid zijn ideeën over de 'Broken Calculator' naar voren te brengen. Men kan twee soorten 'tools' onderscheiden: een om er iets mee te doen (uitrekenen, manipuleren, formules, enzovoorts), een om je te helpen iets te begrijpen. Men kan een programma als Derive ook op laatstgenoemde, intellectuele manier gebruiken door het te behandelen als een 'Broken Tool': maak een deel ervan 'stuk' en laat de leerlingen bepaalde problemen ermee oplossen.

Nadat de benodigde dankwoordjes waren uitgesproken, kwam er dan een einde aan de WIT-conferentie. Al met al de moeite waard, omdat een goed beeld werd geschetst van de huidige stand van zaken waar het gaat om het gebruik van de informatietechnologie in het wiskundeonderwijs. Soms konden we zelfs kennismaken met mogelijkheden die wat verder in de toekomst lagen. Ik hoop met dit verslag de lezer een indruk te hebben gegeven van wat hij/zij gemist heeft.

Vrouwen en Wiskunde

Op zaterdag 7 april 1990 organiseert de werkgroep Vrouwen en Wiskunde de zestiende landelijke dag. Het onderwerp van deze dag is:

Wiskunde A en B in het voortgezet onderwijs en de (mogelijke) gevolgen voor de deelname van meisjes aan het wiskundeonderwijs.

Deze dag wordt gehouden in het Zalencentrum 'Vredenburg', Vredenburg 13 te Utrecht, van 10.00 uur tot 16.00 uur.

Voor nadere informatie kunt u bellen met Sylvia van der Werf, 030-612806 op dinsdag, woensdag en vrijdag.