Het eerste HAWEX-amen

H. van der Kooij
Strabrechtcollege, Geldrop

Woensdag 24 mei 1989, 9.00-12.00 uur:
Verspreid over het hele land zijn ruim 37.000 (!) havo-leerlingen ingespannen aan het werk in een poging om het wiskunde-examen voldoende te maken. Ongeveer 60% zal daarin slagen.
Tegelijkertijd proberen 181 HAWEX-amenkandidaten op de drie HAWEX-perimenteerscholen in Dokkum, Utrecht en Geldrop aan te tonen dat ze de HAWEX-amenstof van de afgelopen twee jaren voldoende verwerkt hebben. Bij de wiskunde A-kandidaten lukte dat vrijwel iedereen. Het wiskunde B-werk was duidelijk niet voor alle kandidaten op maat gesneden.

De examens die de afsluiting vormden van de eerste ronde van het HAWEX-periment zijn in het vorige nummer van de Nieuwe Wiskrant gepubliceerd. In dit nummer zijn de werken van het tweede tijdvak te vinden.
Voor velen zullen deze examens een eerste kennismaking betekenen met de nieuwe wiskundevakken die volgend cursusjaar landelijk op havo worden ingevoerd.
Het leek ons (HAWEX-team) daarom goed om de 'kale' werken van een begeleidend commentaar te voorzien. In dit artikel wordt, voor beide vakken afzonderlijk, onder andere aandacht besteed aan:
- Doel en inhoud van het vak. Dit gebeurt globaal en onvolledig. Bij de publikatie van het examenprogramma zal hieraan meer aandacht worden besteed.
- Overwegingen die een rol hebben gespeeld bij het samenstellen van de examens.
- Een selectie uit het leerlingenwerk.

Wiskunde A

Het belangrijkste doel van het vak wiskunde A is dat leerlingen aan de werkelijkheid ontleende problemen kunnen doorgronden en kunnen oplossen met wiskundige hulpmiddelen.
Bij het doorgronden van die problemen valt onder meer te denken aan:
- het herkennen van een wiskundige probleemstelling in een tekst;
- het kiezen van een geschikte wiskundige werkwijze om een probleem op te lossen;
- het kritisch analyseren van een redenering of een conclusie.

De wiskundige hulpmiddelen zijn niet per definitie formeel-algoritmisch van aard. Sterker geformuleerd: het formeel manipuleren is op vrijwel alle gebieden tot een uiterste minimum beperkt. Daarvoor in de plaats is er veel aandacht voor het verstandig benutten van allerlei 'grafische' voorstellingen en een goed hanteren van de rekenmachine.

Het spreekt vanzelf dat interpretatie van verkregen resultaten binnen de gegeven realistische context veel aandacht krijgt. Deze algemene doelstellingen staan centraal bij elk van de drie leerstofgebieden van wiskunde A.

Tabellen, grafieken en formules
Leidraad bij dit leerstofgebied is: hoe worden tabellen, grafieken en formules gebruikt in de 'dagelijkse' praktijk (tijdschriften en vakliteratuur) en wat moet een leerling in zijn mars hebben om daarmee uit de voeten te kunnen.
Bij grafieken en formules komt het onderwerp differentiaalrekening niet aan bod. Veranderingen worden discreet behandeld, met differenties, differentiequotiënten ('gemiddelde verandering') en toenamendiagrammen.

In de praktijk komen formules met één ingang (de 'normale' functies) minder vaak voor dan formules met meerdere ingangen (functies van meer variabelen). Om die reden is er ook aandacht voor (het lezen van) ruimtelijke grafieken en het werken met bundels van grafieken.

Discrete wiskunde
Bij dit onderdeel staat het *modelleren* centraal. Het gaat vooral om het kiezen van een geschikte representatievorm bij een gegeven probleemsituatie. Aan de orde komen onder andere de matrix, de graaf (netwerk), het boomdiagram, het rooster (driehoek van Pascal).
Aan technische vaardigheden worden geen hoge eisen gesteld. Veel belangrijker zijn vaardigheden in het *interpreteren* van bewerkingen en uitkomsten en het *herkennen* van isomorfe situaties. Visuele hulpmiddelen, zoals de graaf in welke verschijningsvorm dan ook, zijn daarbij nuttige gereedschappen.

Statistiek en kansrekening
Het ontwikkelen van een kritische houding ten aanzien van statistisch getinte informatie vormt de kern van dit leerstofgebied. Er wordt aandacht besteed aan het opzetten van steekproeven, het ordenen en visualiseren van statistische gegevens en het kritisch beoordelen van generalisaties en conclusies gebaseerd op steekproefresultaten.
Bij kansrekening wordt relatief weinig gedaan aan het rekenen met kansen. De nadruk ligt meer op het kansbegrip en de relatie tussen kans en het statistisch begrip verwachting.
Het onderdeel statistiek vindt een afsluiting in de normale verdeling, terwijl de kansrekening wordt 'afgerond' met de binomiale verdeling.
In de eerste ronde van het experiment is wel de binominale kansverdeling aan de orde geweest, inclusief de tabel; de normale verdeling is helemaal niet behandeld. Vandaar dat in beide tijdvakken van het examen de binomiale verdeling wel voorkomt en de normale verdeling helemaal niet.

Twee activiteiten worden dusdanig belangrijk geacht voor het wiskunde A-programma dat ze expliciet vermeld worden:
- Rekenen, met name:
  - het doorlichten van teksten waarin al rekenend conclusies worden getrokken;
  - globaal rekenen, schatten en benaderen;
  - visualiseren van rekenschema's;
  - rekenen met verhoudingen en procenten.
- Redeneren, met name:
  - nagaan welke veronderstellingen gemaakt moeten worden om een conclusie te kunnen trekken;
  - nagaan of een bepaalde opvatting te verdedigen is met de beschikbare gegevens;
  - nagaan of een in de tekst gebruikte redenering correct dan wel plausibel is.

De examens wiskunde-A

Het samenstellen van een wiskunde A-examen is beslist geen eenvoudig werk. De geest van het vak laat zich niet gemakkelijk vangen in een schriftelijk werk. Daarin speelt ook mee dat de vraagstellingen om examentechnische redenen aan tamelijk strikte eisen moeten voldoen.
Bij een allereerste examen komen daar nog wat randverschijnselen bij. Omdat het vak een proceskarakter heeft, is het (zeker bij een eerste ronde) moeilijk om op enig moment gedurende dat proces te taxeren op welk eindniveau de leerlingen zullen uitkomen. Het examen moest gereed zijn op het moment dat de leerlingen nog drie lesmaanden voor de boeg hadden. Om die reden is er bij de vraagstellingen de nodige voorzichtigheid betracht.
Verder waren twee onderwerpen, te weten de binomiale verdeling en exponentiële groei nog helemaal niet in de klas behandeld. Het eerste onderwerp is, zij het voorzichtig, wel afgevraagd.

Ondanks alle onzekerheden die meespelen, zijn er toch wel een aantal aspecten te noemen die naar onze mening in examens wiskunde-A aan bod moeten komen. Het volgende lijstje is niet uitputtend, en het zal beslist geen eeuwigheidswaarde hebben. Het kan wel dienen als richtingwijzer. Als die aspecten in de twee examens aan de orde zijn geweest, staat dat erachter vermeld met het vraagnummer. Verder geldt I: eerste tijdvak, II; tweede tijdvak.

- Het *rekenaspect*; dat is aan de orde bij:
  - rechtstreekse getalsubstitutie in formules (I: 15, 16, 18, 21; II: 3, 16);
  - substitutie van formules in formules;
  - procentrekenen (I: 17);
  - berekeningen aan de hand van tabel, graaf of matrix (I: 2, 10; II: 7, 9, 16, 18).
- *Grafieken* interpreteren en gebruiken voor schattingen en benaderingen (I: 4, 6; II: 5, 6, 14).
- *Formules*
  - doorgronden van formules; met name de *betekenis* van de constanten en de variabelen (I: 14, 19; II: 4, 15);
  - het aanpassen of zelf maken van formules (I: 3, 5, 20).
- Het *beoordelen* van redeneringen of getrokken conclusies (II: 8, 10). Hoewel dat nu niet is gebeurd, zou dat ook goed mogelijk zijn op basis van een stuk tekst uit een tijdschrift.
- Het goed *verwoorden* van een argumentatie. (I: 9).
- Het werken met *nieuwe*, ter plaatse ingevoerde *begrippen*. Ook een beoordeling van de zinvolheid van zo'n nieuw begrip kan gevraagd worden. (II: 2, 13).
- *Open* probleemstelling, waarbij de *keuze* van een oplossingsstrategie belangrijk is (I: 13, 20; II: 4, 10).

Een onderlinge vergelijking van de twee tijdvakken is moeilijk omdat geen enkele leerling zich geroepen voelde om het werk van het tweede tijdvak te maken. Plezierig voor de leerlingen, maar jammer voor ons. De vraagstukken van het tweede tijdvak hadden voor een deel weer een heel ander karakter dan bij het eerste tijdvak. We zijn nog steeds benieuwd hoe die gemaakt zouden zijn.

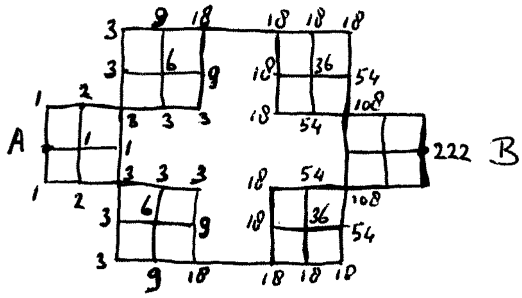
Leerlingen aan het werk

Een examen komt pas echt tot leven als je kunt zien wat leerlingen erop gepresteerd hebben. Per opgave volgt nu een greep uit het leerlingenwerk. (Voor de duidelijkheid zijn deze teksten cursief gezet.)
Telstrategieën zoals die bij opgave 1 nodig zijn, kwamen uitgebreid aan de orde in het boekje Telproblemen (begin vierde klas). Dat niet iedereen meer wist hoe dat precies in zijn werk ging, blijkt wel uit dit antwoord:

8! = 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1
= 10080 verschillende routes.

De meesten wisten er wel raad mee, hoewel de complicaties van de overbodige stukken boven en onder de vijver en het bij elkaar komen van de twee stukken rechts van de vijver niet door iedereen vlekkeloos werden verwerkt. (Zie figuur 1).
Figuur twee laat verschillende soorten goede oplossingen zien.

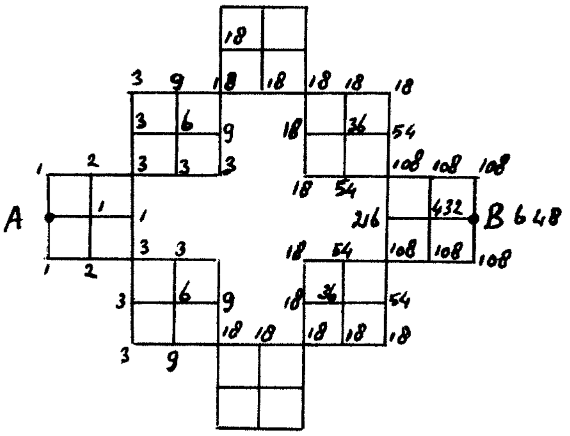
Voer voor al degenen die een niveauverschil menen te moeten opmerken tussen deze twee manieren van oplossen: de doortelstrategie werd gehanteerd door de beste leerling (cijfer 9,9); de vermenigvuldigingsstrategie werd gepresenteerd door één van de 'zwakkere' leerlingen (cijfer 6,9).



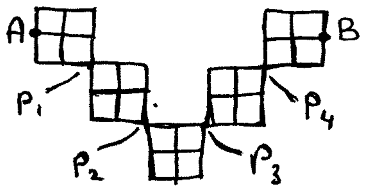
op 222 verschillende manieren.

fig. 1

Zo kort mogelijk van A naar B.



648 verschillende routes.



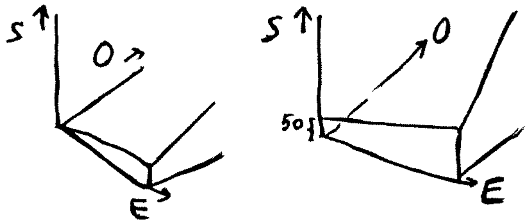
Met zo kort mogelijke route kun je
van A naar p1 op 3 manieren
van p1 naar p2 op 6 manieren
van p2 naar p3 op 1 manier
van p3 naar p4 op 6 manieren
van p4 naar B op 3 manieren
dat vermenigvuldig je met elkaar
$3 \times 6 \times 1 \times 6 \times 3 = 324$ manieren.
Je kunt ook via de bovenkant van de vijver op precies hetzelfde aantal manieren (324), dan moet je die bij elkaar optellen
$324 + 324 = 648$ manieren
in het totaal om met zo'n kort mogelijke route van A naar B te gaan.

fig. 2

Het kermisvraagstuk (opgave 2) bleek achteraf wat aan de gemakkelijke kant te zijn.
De vragen 2 t/m 5 gaven geen problemen. Het aflezen in een ruimtelijke grafiek (vraag 4) en de aanpassing ervan aan de nieuwe formule (vraag 6) waren niet aan de orde gekomen in de lessen. Vandaar ook de kleurrijke antwoorden bij vraag 6

De figuur hoeft niet aangepast te worden, want S wordt alleen f 50,– hoger, de rest verandert niet.

Er wordt vijftig gulden bij opgeteld dus verschuift de grafiek in de verticale richting vijftig gulden omhoog.



oude situatie *nieuwe situatie*

Bij S moet 50 opgeteld worden d.w.z. alle getallen die daar staan + 50.

Onder de bodem, zeg maar, moet nog een ruimte van 50 komen (die 50 bij de S-lijn) zodat alle kosten 50 omhoog gaan.

Bij vraag 7 hadden we problemen verwacht bij een groter aantal leerlingen. Dat viel erg mee. Twee verschillende oplossingen

1 ritje duurt 5 minuten, dat zijn 12 ritjes per uur (60 : 5)
De kermis is 10 uur per dag open, dus $10 \cdot 12 = 120$ ritjes per dag.
De totale kosten zijn f 2375,– + f 50,– = f 2425,–
Per ritje per dag is dat f 2425,– : 120 =
$20{,}208333 \approx 20{,}2$
dus voor 1 ritje is de attractie f 20,2 kwijt.
1 ritje kost f 4,– dus 20,2 : 4 = 5,05
dus 5,05 mensen per ritje, maar ,05 mens bestaat niet.
5 mensen is te weinig (dan hou je dus 0,5 mens over) dus om alle kosten van de staanplaats eruit te halen moeten er gemiddeld 6 mensen per ritje mee.

Kosten breakdance = f 2375,– + f 50,– = f 2425,–
Opbrengst moet dus ook f 2425,– zijn.

10 uur = 600 minuten $\frac{600}{5} = 120$ dus 120 ritten

$\frac{2425}{4} = 606{,}25$

Er moeten dus 607 mensen mee $\frac{607}{120} = 5{,}06$ dus er moeten gemiddeld 6 mensen mee want bij 5 zijn de kosten er nog niet uit en je hebt geen halve mensen.

Veranderingen worden discreet behandeld en niet met behulp van de differentiaalrekening. In plaats van de grafiek van een afgeleide functie, zijn de leerlingen

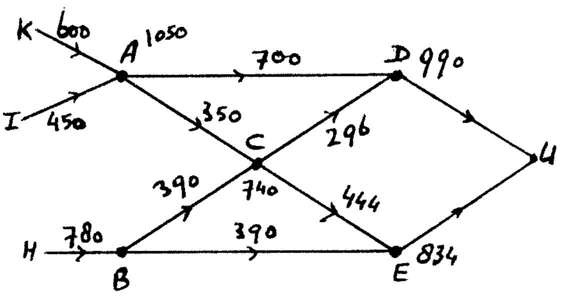
vertrouwd gemaakt met het discrete apparaat dat de toepasselijke naam 'toenamendiagram' heeft gekregen. Vraag 8 (bij opgave 3) is dus een directe vraag naar een techniek die de leerlingen moeten beheersen. De vervolgvraag is, voor zover wij weten, een nieuw type vraagstelling. Het goed onder woorden brengen van een overtuigend argument is nog niet zo makkelijk.
Er zijn er die de overtuiging zoeken in een joviale toon

Ik zou 4 jaar wachten en de visvangst van 20.000 per jaar, dan kan het niet meer fout gaan joh.

Er waren er ook die zich lieten verleiden tot het schrijven van een echte brief.

Als u wacht tot het eind van het 5e jaar dan heeft u jaarlijks de grootste oogst: namelijk 20.000kg vis en dat is niet niks!! U kunt elk jaar 20.000kg vis oogsten zonder dat het aantal vissen afneemt. Als u een jaar korter zou wachten dan zou het maar 17.000kg vis zijn en bij 1 jaar langer maar 18.000kg vis.
Dus het hoogste rendement heeft u na 5 jaar wachten, wees dus niet ongeduldig en wacht die paar jaar. (Voor uw eigen bestwil.)

De verkeersstromen van opgave 4 werden in het algemeen keurig verwerkt, zonder filevorming.
De vragen 10 en 11 kunnen in principe op dezelfde manier worden opgelost: zet de aantallen auto's bij de meest linkse knooppunten en verdeel ze steeds op de aangegeven manier. Bij vraag 10 werd dat meestal ook op die manier gedaan:



De toevoeging 'verwachten' bij vraag 11 zette veel leerlingen kennelijk op het spoor van de kansrekening

$(\frac{2}{3}) + (\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15} + \frac{2}{15} = \frac{12}{15}$
$\frac{12}{25} \times 200 = 160.$

De laatste vraag (13) gaf, zoals verwacht, wel veel problemen. Een typisch fout antwoord dat in vele varianten voorkwam:

Nee want als je de kansen van de matrix optelt, zodat je ziet hoeveel kans je hebt dat de auto's over een weg rijden, zie je dat 1,8(0,8+0,8+0,2) over weg DU rijdt en dat 1,2(0,2+0,2+0,8) over weg EU rijdt. Over weg DU zullen dus altijd meer auto's rijden dan over weg EU.

Toch kwamen er ook nog vrij veel goede antwoorden. Twee voorbeelden daarvan:

Ja dan moeten er uit K en I samen evenveel auto's komen als uit H.
De kans om vanuit K en I over DU te rijden is evengroot als de kans om vanuit H over EU te rijden en de kans om vanuit K en I over EU te rijden is evengroot als de kans om vanuit H over DU te rijden.

Ja, als er over K geen auto's rijden dan rijden er evenveel auto's over DU en EU.
Als er over I geen auto's rijden dan rijden er evenveel auto's over DU en EU.
Als er over K + I samen evenveel auto's rijden als over H dan rijden er evenveel auto's over DU en EU.

$\frac{\cancel{12}^{6}}{15} \quad \frac{\cancel{12}^{6}}{25} \quad \frac{3}{15} = \frac{15}{15}$
$\frac{\cancel{3}^{1\frac{1}{2}}}{15} \quad \frac{\cancel{3}^{1\frac{1}{2}}}{15} \quad \frac{12}{15} = \frac{15}{55}$
$\begin{pmatrix} \frac{12}{15} \\ \frac{3}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{15} \\ \frac{3}{15} \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{3}{15} = \frac{15}{15} \left(\frac{15}{15}\right) \\ \frac{12}{25} = \frac{15}{15} \left(\frac{15}{15}\right) \end{matrix}$

Bij de 'CO-emissie' stond het rekenen aan een formule centraal. Een typerend voorbeeld van de verhalende vorm, waarin vergelijkingen (met hulp van de rekenmachine) worden opgelost:

De snelheid van de wagen was:
$14 = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{?}$
? = 14 − 6,9 = 7,1 dus als je 298,5 door ? deelt moet er 7,1 uitkomen.
Dan doe je eerst 298,5 : 7,1 = 42,0
dus 298,5 : 42,0 = 7,1 en 7,1 + 6,9 = 14
dus het antwoord is
$14 = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{42{,}0}$
de snelheid was dus 42,0km/h.

Van te voren waren we ervan overtuigd dat vraag 20 alleen maar voor de beste leerlingen zou zijn. Tot onze verbazing bleek een groot deel van de leerlingen ermee uit de voeten te kunnen. Opvallend was zonder meer al dat niemand de vraag oversloeg.
Dat vrijwel iedereen het eerste stuk ($e_{tot} = 6{,}9\ L$) opschreef is misschien nog niet zo verbazingwekkend. Er werden nog vele wegen bewandeld om ook het tweede deel te pakken te krijgen. Bijvoorbeeld door een parallel te trekken met de al bekende formules.

$e_{tot} = 6{,}9L + 0{,}082T$
Verklaring:
196 : 0,054 = 3629,6296
298,5 : 3629,6296 = 0,0822398
Neem net als bij warm 4 getallen = 0,082
6,9 bij warm stond 4,4 + en later 4,4L
dus ik doe hetzelfde als bij warm: 6,9 + .. wordt 6,9L + ...

Er waren ook tamelijk veel oplossingen, waaruit bleek dat ze de *betekenis* van de formules goed doorhadden

$e_{tot} = 6{,}9L + 0{,}083T$
$(0{,}083T = \frac{298{,}5}{3600})$ *(3600 = sec. per uur.)*

Tenslotte een heel bijzondere oplossing die gebruik maakt van de resultaten van vraag 19:

$e_{tot} = 6{,}9L + x$
$e = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{37{,}5}$ $e = 74{,}3$
$km = 5$ minuten $= 8$ tot $v = 37{,}5$
$74{,}3 = 6{,}9 \cdot 5 + x$
$74{,}3 - (6{,}9 \cdot 5) = 39{,}8$
$74{,}3 = 6{,}9 \cdot 5 + 39{,}8$
$8 \times 60 = 480$ seconden $\frac{39{,}8v}{480} = 0{,}0829$
formule: $E_{tot} = 6{,}9L + 0{,}0829T$

En wij maar denken dat dit dé oplossingsmethode was:

$e_{tot} = 6{,}9 \ast L + \ldots \ast T$ voor zover lijkt de zaak op 'warm'.
In $e = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{V}$ stelt V aantal km per uur voor.
dus $V = \frac{L}{T} \ast 3600$ omdat T in sec. is.
Dit invullen in (2): $e = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{\frac{L}{T} \ast 3600}$

$$e_{tot} = e \ast L = 6{,}9 \ast L + \frac{298{,}5}{\frac{3600}{T}} =$$
$$= 6{,}9 \ast L + \frac{298{,}5}{3600} \ast T \approx$$
$$\approx 6{,}9 \ast L + 0{,}083 \ast T$$

In het laatste vraagstuk (de druivenoogst) kwam, na een inleidende vraag, de binomiale tabel op tafel. Op een voorzichtige manier, zoals al eerder is gemeld. De vraag die betrekking had op de tabel (22) werd zonder meer goed gemaakt. De formulering van het model en het opzoeken in de tabel van de gevraagde kans levert dus weinig problemen op voor deze leerlingen. Dat was door velen anders ingeschat.
In de allerlaatste vraag van het examen kwam het begrip verwachtingswaarde om de hoek kijken. Hoewel er zo af en toe bij de kansrekening weleens gevraagd was naar 'wat je op de lange duur mag verwachten', was het begrip verwachtingswaarde zelf niet aan de orde geweest. Er waren dan ook maar weinig leerlingen die deze vraag volledig goed beantwoordden.
De antwoorden varieerden van:

vage kansbespiegelingen:

Hij kiest denk ik voor de 1e manier, want voor de helft van de oogst krijgt hij in ieder geval f 2,– en het percentage dat het 2 of meer dagen zal regenen is wel wat groot dus nogal riskant.

en wat hardere bespiegelingen:

Kans op aangetaste oogst is 0,3521 dus moet de opbrengst bij II als alles goed gaat minimaal
$1 - 0{,}3521 = 0{,}6479$ maal zo groot zijn als I
$0{,}6479 \times f\ 27600 = f\ 17882{,}04$
en dat is minder dan bij I (f 19800) dus hij neemt manier I.

tot volledig correcte verhalen:

$P(S \leq 2) = 0{,}6479$ bij $P(S) = \frac{15}{100}$ en $n = 14$
er is dus 64,79% kans op een opbrengst van f 27600,– en 35,21% kans op een opbrengst van f 15600,–.
De te verwachten opbrengst is dus:
64,79% • f 27600,– + 35,21% • f 15600,– =
f 23374,83 bij manier II.
Bij manier I haalt hij f 19800,– binnen.
De te verwachten opbrengst bij manier II is f 3574,83 hoger dan bij manier I.
Hij zal dus kiezen voor manier II.

Wiskunde-B

Bij de invoering van het vak wiskunde-A op het vwo werd ook gesleuteld aan het bestaande vak wiskunde I. Het onderdeel 'kansrekening en statistiek' werd vervangen door 'ruimtemeetkunde'. Het analyse-gedeelte werd ongewijzigd van wiskunde I overgeheveld naar wiskunde B. Aan de examens is dan ook af te lezen dat daar bijna alles nog bij het oude is gebleven.
De situatie op het havo is wezenlijk anders. Het huidige vak wiskunde is niet goed vergelijkbaar met het nieuwe vak wiskunde B, omdat het nieuwe programma bestemd is voor een andere doelgroep. Het wiskunde B-programma is veel meer toegespitst op de groep leerlingen die een vervolgopleiding voor ogen hebben waar het vak wiskunde een zelfstandige status heeft. Te denken valt daarbij aan vwo (wiskunde B), hts, Hogere Zeevaartschool en enkele richtingen binnen het heao. Het programma moet daarom zo zijn dat leerlingen die het vak met goed gevolg hebben doorlopen, een goede kans op succes hebben in het vervolgonderwijs.

Er zijn bij wiskunde-B drie belangrijke doelstellingen:
- het op peil houden en uitbreiden van algoritmische vaardigheden (formule manipulaties, oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden, e.d.);
- het kunnen hanteren van wiskundige begrippen en inzichten in al-dan-niet-wiskundige probleemsituaties;
- het ontwikkelen van een probleemoplossende houding.

Tijdens de eerste ronde van het experiment is gebleken dat met name de twee laatstgenoemde punten veel eisen van de havoleerling. Ze geven meteen ook het grote verschil met het huidige programma aan. Leerlingen die binnen het huidige programma aangewezen zijn op hard zwoegen en zeer veel (routinematige) oefening lopen groot gevaar dat ze het binnen het nieuwe programma niet redden.
Het programma wiskunde-B beslaat 'slechts' twee leerstofgebieden.

Toegepaste analyse
Dit gebied is gebouwd rond de differentiaalrekening. De naam *toegepaste* analyse geeft weer dat toepassingen in elk stadium van de theorie-opbouw een wezenlijk bestanddeel vormen.
Zeer belangrijk is het *inzicht* in het fenomeen 'afgeleide functie als maat voor verandering'. Om dat inzicht

in probleemsituaties operationeel te maken is een goede beheersing van technieken en algoritmische vaardigheden natuurlijk pure noodzaak.

Ruimtemeetkunde
Dit gebied heeft een volledig meetkundige vulling gekregen. De vectorrekening en andere onderdelen uit de lineaire algebra komen niet aan bod. Bij berekeningen kan volstaan worden met technieken die rechtstreeks ontleend zijn aan de vlakke meetkunde en de goniometrie.
Van de leerling wordt ruimtelijk inzicht gevraagd bij het aanpakken van problemen. Bij vraagstukken zullen vaak foto's, tekeningen of meetkundige beschrijvingen van een object als uitgangspunt dienen. Het zelf tekenen (of voltooien van een tekening) en het interpreteren van een tekening of foto zijn belangrijke vaardigheden. Enige kennis van de verschillende projectiemethoden is daarbij natuurlijk noodzakelijk. Aan de orde komen parallelprojectie (scheef en orthogonaal), centrale projectie (onder andere perspectief) en aanzichten in verschillende kijkrichtingen (zoals loodrechte projecties op coördinaatvlakken).

De examens wiskunde-B

De doelstellingen van het vak wiskunde-B staan niet toe dat de (examen)vraagstukken voornamelijk een reproduktief karakter krijgen.
Vragen als 'onderzoek de functie' zijn traditiegetrouw het startschot voor zogenaamde AP-wiskunde (AP = automatische piloot; zet een paar knopjes in de juiste stand en de rest voltrekt zich volautomatisch). Dit type vragen veronderstelt geen wiskundig inzicht, maar doet 'slechts' een beroep op goede beheersing van technische, algoritmische vaardigheden. De soort arbeid die daarvoor nodig is kan een computer tegenwoordig ook al heel behoorlijk verrichten.
Bij de examens wiskunde-B is gepoogd vragen te maken, waarbij naast technische vaardigheden ook begrip en inzicht nodig zijn om tot beantwoording te komen. Verder zijn er, naast kaal-wiskundige, ook context-vraagstukken opgenomen.

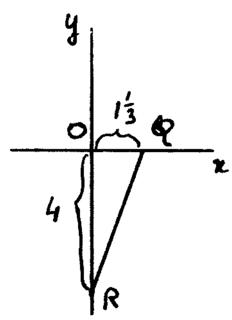
We hebben zelf het idee dat die poging redelijk is geslaagd. Van onverwachte zijde zijn we in dat idee gesterkt. Er zijn tegenwoordig zeer krachtige computerprogramma's die in staat zijn formules te manipuleren. *Derive* is zo'n programma. Een ingevoerde functie wordt desgevraagd achteloos gedifferentieerd of geprimitiveerd. Vergelijkingen en ongelijkheden, hoe ingewikkeld ook, worden in minder dan geen tijd opgelost. Ook differentiaalvergelijkingen verwerken ze als volleerde wiskundigen.

Op de Technische Universiteit te Eindhoven is nagegaan wat een dergelijk programma kan presteren op examens uit het middelbaar onderwijs. De wiskunde A-examens van zowel vwo als havo bleken niet geschikt voor computerverwerking. Bij het wiskunde B-examen van het vwo werden de drie analysevraagstukken in zeer korte tijd probleemloos opgelost (is dat dan toch alleen maar AP-wiskunde?). Het programma bleek met de meeste analysevragen uit het HAWEX wiskunde-B-examen geen raad te weten!

Leerlingen aan het werk

Direct bij vraag 1 blijkt al dat de leerlingen niet voorgeprogrammeerd werken. Wanneer op dit soort vraagstukken routinematig zou zijn getraind had je mogen verwachten dat een oplossing als deze door de meeste leerlingen gegeven zou worden:

$y = x\sqrt{x}$
$x = 4 \quad (P)$
vergelijking raaklijn:
$\frac{dy}{dx} = 1 \bullet \sqrt{x} + x \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$
helling in $x = 4 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{4} + \frac{4}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{4}{4} = 3$
$y = 3x + b$; $x = 4$ *invullen in grafiek.*
$y = 4\sqrt{4} = 4 \bullet 2 = 8$
$P(4,8) \rightarrow 8 = 12 + b;\ b = -4$
vergelijking raaklijn $y = 3x - 4$
snijpunt x-as $\rightarrow y = 0;$
$0 = 3x - 4;\ 3x = 4; \rightarrow x = 1\frac{1}{3} \rightarrow Q(1\frac{1}{3},0)$
snijpunt y-as $\rightarrow x = 0;\ y = 0 - 4;\ y = -4 \rightarrow R(0,-4)$

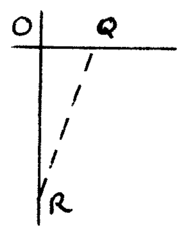


Opp. $OPQ = \frac{1}{2} \times 4 \times 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

In de praktijk bleek een directere manier meer gebruikt te worden:

$y = x\sqrt{x}\ P \rightarrow x = 4 \quad (4,8)$
$y = 4\sqrt{4} = 8$
$f'(x) = 1 \bullet \sqrt{x} + x \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}};$
$\qquad \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$
$x = 4$ *helling is* $\sqrt{4} + \frac{4}{2\sqrt{4}} = 3$
raaklijn snijdt y-as in $8 - 4 \bullet 3 = -4 \rightarrow (0,-4)$
raaklijn snijdt x-as in $4 - \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3} \rightarrow (1\frac{1}{3}, 0)$

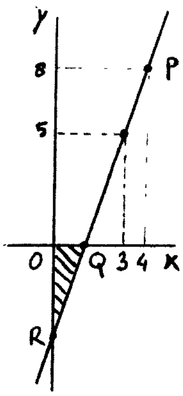
$\Delta\, OQR$



$O_{oqr} = \frac{1}{2} \bullet 4 \bullet 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

Echt problematisch bij de beoordeling was deze oplossing:

$y = 3x - 4 \rightarrow x = 0; y = -4$
$x = (y + 4)/3 \rightarrow y = 0; x = 1\frac{1}{3}$
Opp $\Delta OQR = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 4 = 2\frac{2}{3}$.

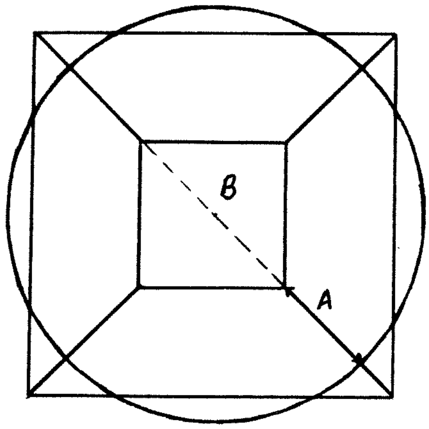


Wat is belangrijk genoeg om opgeschreven te worden bij de beantwoording van een vraag? Deze leerling vond het beginstuk kennelijk niet interessant genoeg om te vermelden. Hoewel hij vast en zeker (op kladpapier) een goede weg had bewandeld, zag ik geen mogelijkheid om hem daarvoor te belonen. Ik realiseerde me wel dat het aspect 'wat schrijf je op' in het nieuwe programma in mijn lessen kennelijk nog wat meer aandacht had moeten krijgen. In het oude programma gebeurt dat vrijwel automatisch, omdat daar veel meer routinematig wordt ingeslepen. Bij het nieuwe programma moet je daar kennelijk meer bewust aandacht aan schenken.

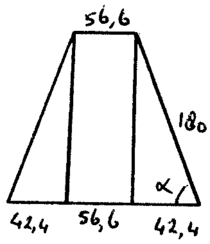
Hopelijk is het opgevallen dat bij de formulering van de vragen zo min mogelijk formeel taalgebruik is gehanteerd. Dat is bewust gedaan, omdat we vinden dat een wiskunde-examen geen test behoort te zijn op formele-taal-kennis. Gewone taal is echter vaak niet eenduidig. Dat bleek bij vraag 3. Iedereen die het examen van te voren had gezien vond dat daar naar het antwoord '3, 4 of 5' werd gevraagd. De leerlingen zagen dat kennelijk anders. Veel leerlingen gaven als antwoord '5'. Bij navraag bleek dat ze daarmee bedoelden dat er maximaal 5 konden zijn. Ze hadden de vraag geïnterpreteerd als 'hoeveel kunnen dat er *maximaal* zijn'.
Opgave 2 (de lichtboei).
Vraag 4 gaf weinig problemen en was ook meer bedoeld als opstap naar de twee volgende vragen.
Deze leerling gebruikt het plaatje van vraag 4 optimaal bij de vragen 5 en 6:

lijnstuk A : $\frac{2}{3}$ van $\sqrt{30^2 + 30^2} = 28{,}3$ cm
lijnstuk B: $\sqrt{40^2 + 40^2} = \sqrt{3200} = 56{,}6$ cm
$2 \times$ lijnstuk A + lijnstuk B $= 2 \cdot 28{,}3 + 56{,}6 = 113{,}2$ cm (tek. 1)

schuine doorsnede van de piramide:
$\cos \alpha = \frac{42{,}4}{180} = 0{,}23444\ldots$
$\alpha = 76°$ (tek. 2)



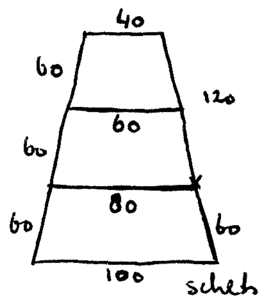
tek. 1

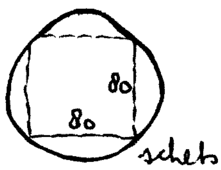


tek. 2

Een andere oplossing. Vraag 5 wordt heel kort, maar zeer volledig beantwoord. De uitweiding bij vraag 6 lijkt voornamelijk bedoeld om zichzelf te overtuigen.

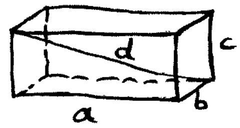
Verhoudingen, zie plaatje



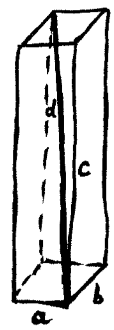


middellijn =
$\sqrt{80^2 + 80^2} = 113$ cm

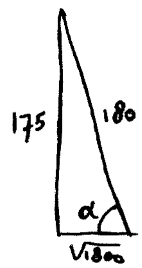
Je neemt de stang uit het geheel en krijgt zodoende een soortgelijk ding als een stok in een rechthoek, namelijk $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$



Dit is nu het geval.



Hier geldt dus ook
$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.
Invullen geeft
$30^2 + 30^2 + c^2 = 180^2$
$c = 175$



$\sin \alpha = \frac{175}{180} \rightarrow \alpha = 76{,}5°$

Helaas misten nogal wat leerlingen het inzicht dat het afgebeelde zijvlak in werkelijkheid natuurlijk scheef staat. Er waren er tenminste nogal wat die bij vraag 5 '80 cm' en bij vraag 6 een hoek van 80,4° (= inv cos $\frac{30}{180}$) vonden.
Bij opgave 3 komen voornamelijk technische vaardigheden aan bod. De hogere graads vergelijkingen die daarbij opgelost moeten worden zijn (in de eerste ronde) niet erg uitvoerig behandeld. Een groot aantal leerlingen liep daar ook op vast.
Een grappig gebruik van een tekenschema als illustratie bij deze opgave:

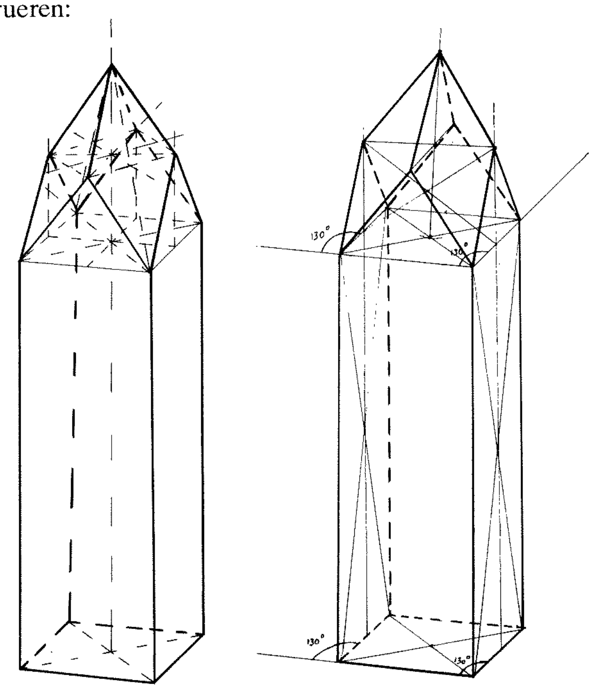
$$\frac{136x^2}{x^4+16} = 8$$
$$136x^2 = 8\,(x^4 + 16)$$
$$136x^2 = 8x^4 + 128$$
$$8x^4 - 136x^2 + 128 = 0$$
$$8(x^4 - 17x^2 + 16) = 0$$
$$8(x^2 - 16)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = 16 \text{ of } x^2 = 1$$
$$x = 4 \text{ of } x = -4 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = -1$$

$f(x)$	– – 8 + + + 8 – – – 8 + + + 8 – – –
x	–4 –1 1 4

dus $4 \leqslant x \leqslant -1 \quad 1 \quad x \leqslant 4$

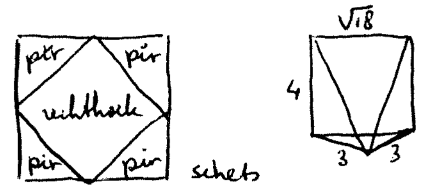
De kerktoren van Bedum (opgave 4) gaf fraaie staaltjes van ruimtelijk tekenwerk te zien, maar ook ontzettende wangedrochten. De constructie van de vier dakdelen bleek niet zo simpel.
Twee mooie platen, elk met een eigen manier van construeren:



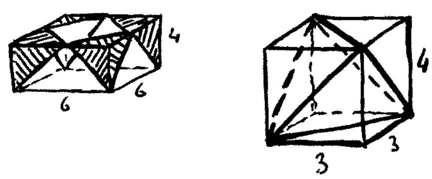
Inhoudsberekeningen, zoals bij vraag 12 kunnen met aanvullen of verdelen opgelost worden. De meesten lieten het rekenwerk vergezeld gaan van de nodige schetsjes. Het is in een aantal gevallen een aardige puzzel om te achterhalen waar de fout zit.

Van 12 tot 18 meter is het een kubus.

I = 6 × 6 × 6 = 216 m³
Van 18 tot 22 meter splits je op in 1 rechthoek en 4 piramides.

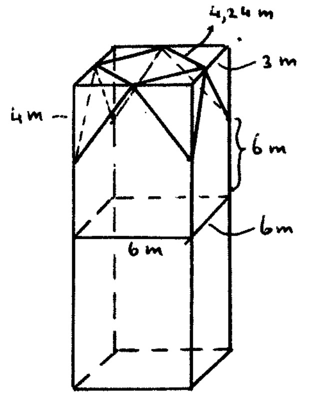


$I_{pir} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h =$
$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{4{,}5} = 12$
$I_{pir}\ tot = 4 \times 12 = 48$
$I_{tot} = 48 + 216 = 264\ m^3$



$I_{balk1} = 6 \cdot 6 \cdot 4 = 144$
$I_{balk2} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$
$I_{ruimte} = 144 - 36 = 108\ m^3$

Er waren ook mooie, overzichtelijke oplossingen.



Inh. 1 afgeknotte hoekpunt is:
grondvlak is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$
Inh. $= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
$\frac{1}{3} \cdot 4{,}5 \cdot 4 = 6\ m^3$
Die heb je 4, dus $4 \cdot 6 = 24\ m^3$
Inh. blok is: $l \cdot b \cdot h$
$6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$
inh. ruimte is: $360 - 24 = 336\ m^3$

Opgave 5 was duidelijk het klapstuk. Vraag 13 werd goed gemaakt. De vragen 14 en 15 eisen inzicht. Dat bleek voor velen teveel gevraagd.
Een examentechnische afspraak speelde bij deze twee vragen nog een vervelende rol. De stam voor vraag 13

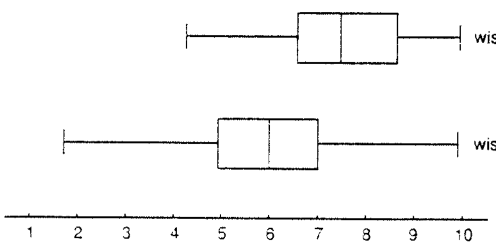
is gebonden aan alleen vraag 13, omdat er geen witregel tussen stam en vraag is. Veel leerlingen gebruikten bij vraag 14 en 15 de 400 m als uitgangspunt. Daardoor vervielen ze automatisch in getallenvoorbeelden die volgens de normering afgestraft dienden te worden.

De resultaten

De behaalde scores voor de twee examens kunnen overzichtelijk weergegeven worden in een zogenaamd *steel-en-blad-diagram*:

wiskunde A		wiskunde B
	1	
	1	7
	2	
	2	5 7 7 9 9
	3	1 4
	3	5 6 8 8 8 9 9
2	4	1 1 1 2 2 4 4
5	4	5 5 6 7 7 7 8 9
4 2	5	0 0 0 0 0 1 2 2 2 3 3 4 4 4 4
	5	5 5 6 6 6 6 6 7 7 8 8 8 8 9
4 4 3 1 1 0 0	6	0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 4
9 9 8 8 8 8 6	6	5 5 5 6 6 7 7 7 8 8 8 8 8 9
4 3 2 1 1 0 0	7	0 0 0 0 0 1 1 2 2 2 4
8 8 8 7 6 5 5	7	5 5 5 5 5 6 7 7 7 8 8 9 9 9
4 3 2 1 1	8	2 2 3 3 4
9 9 8 8 8 8 7 6 6 5	8	7 9
4 3 3 2 2 1 0 0	9	1 2 4
9	9	6 8

De cijfers in het omkaderde deel zijn de stelen. Rechts en links daarvan zijn de blaadjes te vinden.
Een voorbeeld: 4 3 2 1 1 |8| 2 2 3 3 4 geeft weer dat bij wiskunde B de scores 82, 82, 83, 83 en 84 zijn behaald en bij wiskunde A de scores 81, 81, 82, 83, 84. De laagste score bij A was 42, bij B 17.
Het aardige van zo'n diagram is dat er, met behoud van alle individuele gegevens, tegelijkertijd een histogram met klassebreedte 5 is 'getekend'.
De resultaten kunnen ook in een zogenaamde *boxplot-grafiek* worden weergegeven. Van links naar rechts staan de verticale streepjes voor minimum, eerste kwartiel, mediaan, derde kwartiel en maximum. De box bevat dus de middelste 50% van alle scores:



In het steel-en-bladdiagram is duidelijk te zien dat er meer B- dan A-kandidaten examen deden. De precieze aantallen zijn 56 bij A en 125 bij B.
Dat is beslist niet de verhouding die ons voor ogen staat. Bij de eerste ronde was echter op elk van de drie scholen slechts één groep wiskunde A toegestaan. De rest van de leerlingen (die voor de start van het experiment om allerlei redenen al voor wiskunde hadden gekozen) werd automatisch ingedeeld bij wiskunde B. Daardoor deden er nogal wat leerlingen mee aan het B-examen die een vervolgopleiding zoals Pabo, Hotelvakschool of verpleegkunde ambieerden.
Natuurlijk waren die veel beter op hun plaats geweest bij wiskunde A. Dit verklaart mede waarom het aantal onvoldoendes bij wiskunde B vrij hoog uitviel.

Gelet op de doelgroepen van de twee vakken lijkt een verhouding in leerlingaantallen A:B = 2:1 veel 'gezonder'. Het is beslist niet overbodig om hier nog eens te benadrukken dat wiskunde B een moeilijker vak is dan het huidige vak wiskunde.
De cijfers bij wiskunde A zijn zondermeer erg goed te noemen. Het was ook een voorzichtig examen. Dat betekent nog niet dat het (te) gemakkelijk was. Er waren een aantal moeilijke vragen bij. De leerlingen hebben ons aangenaam verrast door ook die moeilijke vragen beter te maken dan wij tevoren hadden ingeschat.

HAWEX-amen of HAW-examen?

Examens worden, bewust of onbewust, vaak gehanteerd als richtsnoer voor onderwijs. Dat wordt ook wel in de hand gewerkt als bepaalde onderwerpen jaar na jaar op steeds dezelfde manier in de examens opduiken. Het beruchte functie-onderzoek is daarvan een treffend voorbeeld. In de loop der jaren is het zodanig gepolijst dat het verworden is tot een voor iedereen hanteerbaar standaardalgoritme. Daar kan uitgebreid routinematig op getraind worden. Op die manier kan onderwijs vervallen tot produktgerichte examentraining.

Wij hopen, zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B, dat ieder examen opnieuw verrassende elementen zal bevatten, waardoor leerlingen gedwongen worden te tonen dat ze de benodigde inzichten hebben verworven, naast voldoende technische vaardigheden.
Om diezelfde reden hopen we dat dit eerste HAWEX-amen niet wordt beschouwd als *het* 'amen' van de HAWEX, waarmee voor eens en voor altijd is vastgelegd hoe de vakken zullen worden geëxamineerd. Dit eerste examen was niet meer (maar ook niet minder) dan een goede afronding van de eerste ronde waarin gewerkt is met de allereerste versies van experimentele leerstofpakketjes. Wanneer de 'kale' examens bij het lezen van de voorgaande tekst voor u wat meer zijn gaan leven, dan is het doel van dit artikel bereikt.