Modelvorming en computergebruik bij wiskundeonderwijs

H.B. Verhage
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

In dit artikel worden populatievoorspellingsmatrices (Lesliematrices) in verband gebracht met lineaire programmering. De vraagstelling die de twee onderwerpen met elkaar verbindt, betreft het vinden van een optimale fokstrategie. Aan de hand van dit probleem wordt tevens een viertal computerprogramma's besproken.

Inleiding

De meeste ontwikkelingen op het gebied van computergebruik in het onderwijs hebben de afgelopen jaren plaatsgevonden in het kader van het NIVO-project [1]. De standaardisatie van apparatuur heeft een zekere rust gebracht. Daar was ook dringend behoefte aan na de chaotische start van de beginjaren met een enorme verscheidenheid aan inmiddels alweer antieke apparatuur.

Het NIVO-project heeft tevens op grote schaal nascholing voor docenten in gang gezet. Het betreft zowel basiscursussen informatica als vakgerichte cursussen over de computer als hulpmiddel binnen schoolvakken. Eén van de schoolvakken waarvoor een cursus ontwikkeld is, is wiskunde. Voor die cursus zijn negen verschillende thema's uitgewerkt en één daarvan is het thema 'Besliskunde'. In deze bijdrage wil ik op dit thema verder ingaan. Verder zal ik ook de thema's *spreadsheet* en *dynamische simulaties* kort aanstippen.

Onderwerpen uit de matrixrekening en besliskunde (in het bijzonder lineair programmeren) maken deel uit van het examenprogramma voor wiskunde A op het vwo. Het mag geen toeval heten dat juist bij deze onderwerpen ten tijde van de experimenten met wiskunde A al nagedacht werd over het gebruik van de computer daarbij. Matrices worden in wiskunde A vooral gebruikt als hulpmiddel bij het maken van wiskundige modellen om situaties en processen mee te beschrijven. In de praktijk wordt zo'n matrix dan algauw vrij groot en is het bijkomende rekenwerk met de hand niet meer te doen. Een computer kan dan uitkomst bieden. Daarmee komt de aandacht vrij voor het *opstellen van modellen* en het *interpreteren van de uitkomsten*. Voor lineair programmeren geldt hetzelfde verhaal, computergebruik ligt daar voor de hand bij het verwerken van het standaardalgoritme voor LP-problemen, de Simplexmethode.

Het type software dat bij dit soort computergebruik nodig is, zouden we kunnen aanduiden met *instrumentale software*. De programmatuur is een hulpmiddel om de leerling rekenwerk uit handen te nemen en een didactische inkleuring is in eerste instantie nauwelijks aanwezig. Professionele software uit de beroepspraktijk zou bij wijze van spreken voldoen, ware het niet dat het leren omgaan met een professioneel pakket vermoedelijk een te grote tijdsinvestering vraagt ten opzichte van het beperkte aantal lessen dat leerlingen met zo'n programma bezig kunnen zijn. Om die reden is het dan toch wenselijk dat voor het onderwijs eenvoudige versies van dergelijke programmatuur ontwikkeld worden.

Aan de hand van enkele voorbeelden wil ik u iets laten zien van thans voor het onderwijs beschikbare programmatuur en het mogelijk gebruik daarvan in de klas.

Een model uit de biologie

Sinds de invoering van wiskunde A is elke vwo-docent vertrouwd geraakt met populatievoorspellingsmatrices (ook wel Lesliematrices genaamd). Een voorbeeld louter daarover zal dus wellicht niet veel nieuws brengen. Toch start ik met een dergelijk probleem in de hoop dat het vervolg van mijn voorbeeld, waar Lesliematrices en lineair programmeren bij elkaar komen, wel een bruikbare nieuwe suggestie voor de schoolpraktijk zal bevatten.

Het algemene populatievoorspellingsmodel zoals dat in wiskunde A behandeld wordt, luidt:

$$X(t+1) = PX(t)$$

$$\text{met } P = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ en } X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Uitgaande van een gegeven beginpopulatie $X(0)$ kan door het herhaald vermenigvuldigen van de matrix met de populatievector het model doorgerekend worden. In het algemeen luidt de probleemstelling: *onderzoek hoe de populatie zich ontwikkelt.*

Door wat te experimenteren met de vruchtbaarheidscijfers f_i en de overlevingskansen p_i kunnen de leerlingen groei, periodiciteit en stabiliteit ontdekken. Bij dit experiment is de computer een onontbeerlijk hulpmiddel. Sterker nog, zonder computer kan dit onderwerp op deze manier nauwelijks behandeld worden, want de achterliggende wiskundige theorie over eigenwaarden en eigenvectoren behoort niet tot de wiskunde A-stof.

Ter illustratie rekenen we een Lesliematrix voor een populatie met drie leeftijdsklassen door. Een matrix en populatievector met beginwaarden:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ en } X(0) = \begin{pmatrix} 33.3 \\ 33.3 \\ 33.3 \end{pmatrix}$$

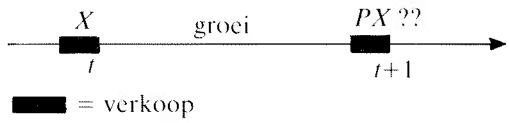
Wie niet zo gecharmeerd is van de decimale dieren, kan de beginpopulatie als een verdeling van de totale populatie genormeerd op 100 opvatten.

Voor het doorrekenen van het model is gebruik gemaakt van een spreadsheetprogramma, en wel het door NIVO verspreide programma PCcalc. In het Wiscom-materiaal [2] zijn toepassingen van PCcalc voor het wiskundeonderwijs uitgewerkt. Enkele van de in dit kader gemaakte templates voor PCcalc betreffen het rekenen met matrices. In figuur 1 staat een beeldschermafdruk met de uitvoer voor de Lesliematrix en beginpopulatie van hierboven.

Ter toelichting: L is de populatievoorspellingsmatrix, B de beginpopulatie. Na enig doorrekenen blijkt dat een verdeling over de leeftijdsklassen van 82.8% jong, 13.8% middel en 3.4% oud, stabiel is, althans relatief gezien. In absolute zin verdubbelt de populatie zich iedere tijdseenheid. Vervolgens voegen we een nieuw element aan de probleemstelling toe door aan te nemen dat de Lesliematrix de ontwikkeling van een populatie fokdieren voorstelt en ons te verplaatsen in de huid van de fokker. Het probleem luidt nu:

Een fokker fokt een bepaalde diersoort en wil elke tijdseenheid een aantal dieren aan de populatie onttrekken voor de verkoop. Wat is een goede fokstrategie?

Groei en verkoop van de dieren schematisch weergegeven:



Een mogelijke oplossing zou kunnen zijn: neem als uitgangspunt de stabiele verdeling van dieren zoals hiervoor bepaald. Verkoop na elke tijdseenheid voor elke leeftijdsklasse het aantal dieren waarmee de omvang van die klasse is toegenomen. In het voorbeeld betekent dit:

$$\text{als } X(t) = \begin{pmatrix} 82.8 \\ 13.8 \\ 3.4 \end{pmatrix} \text{ dan } X(t+1) = \begin{pmatrix} 165.0 \\ 27.6 \\ 6.9 \end{pmatrix}$$

$$\text{zodat } X(t+1) - X(t) = \begin{pmatrix} 82.8 \\ 13.8 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

```
        A       B         C         D         E         F         G         H         I         J
 1
 2                                  *** MATRIX 3x3  ***                        af begin rekenen
 3
 4              (         .000     9.000   12.000 )              (          33.3 )
 5          L = (         .333      .000     .000 )          B = (          33.3 )
 6              (         .000      .500     .000 )              (          33.3 )
 7
 8     tijd        0         1         2         3         4         5         6         7         8
 9   ------------------------------------------------------------------------------------------------
10      1:      33.3     699.3     300.3    2163.3    2298.0    7083.6   11209.2   25820.4     47747
11      2:      33.3      11.1     232.9     100.0     720.4     765.2    2358.8    3732.7      8598
12      3:      33.3      16.7       5.6     116.5      50.0     360.2     382.6    1179.4      1866
13   ------------------------------------------------------------------------------------------------
14   total       100       727       539      2380      3068      8209     13951     30733     58211
15   groei               7.270      .741     4.416     1.289     2.676     1.699     2.203     1.894
16
17      1:       33%       96%       56%       91%       75%       86%       80%       84%       82%
18      2:       33%        2%       43%        4%       23%        9%       17%       12%       15%
19      3:       33%        2%        1%        5%        2%        4%        3%        4%        3%
20
21     F3=3 decimalen  F4=6 dec.  F5=rekenen  F6=verder rekenen  F7=schoonmaken
156K (Tekst) "af begin
```

fig. 1

De populatie verdubbelt zich elke tijdseenheid, zodat de fokker steeds net zoveel dieren kan verkopen als hij al had. Bij een beginpopulatie van 100 dieren zijn dit 82.8 jonge dieren, 13.8 middel-dieren en 3.4 oude dieren, dus 100 dieren in totaal. Een sterk punt van deze oplossing is dat de fokker in elk geval niet inteert op z'n kapitaal, de beginpopulatie. Aangezien de populatie elke tijdseenheid weer toeneemt, is de verkoop van dieren op deze manier gegarandeerd.
Het is echter de vraag of deze strategie *optimaal* is. Zou een andere verdeling over de leeftijdsklassen niet lucratiever kunnen zijn? Om hier iets over te kunnen zeggen is het nodig meer te weten van de verkoopopbrengsten van de fokker. Laten we om te beginnen eens aannemen dat alle dieren evenveel opbrengen. Dan kan het heel goed zijn dat er een andere relatieve verdeling is die een hogere opbrengst geeft dan de verdeling die bij de stabiele situatie hoort. Bijvoorbeeld:

$$\text{als } X(t) = \begin{pmatrix} 72 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{dan } X(t+1) = \begin{pmatrix} 276 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{zodat } X(t+1) - X(t) = \begin{pmatrix} 204 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Voor de verkoop zijn nu 210 dieren beschikbaar, zodat deze tweede verdeling voor de fokker heel wat gunstiger is dan de eerder geprobeerde stabiele verdeling. De vraag die rijst, luidt:

Bij welke relatieve verdeling van het aantal dieren per leeftijdsklasse is de toename van het totaal aantal dieren per tijdseenheid maximaal?

We nemen ook nog aan dat de fokker voor elke leeftijdsklasse een minimum aantal dieren wil aanhouden. Doet hij dit niet, dan wordt immers de kip met de gouden eieren geslacht: een fokker zonder fokdieren verliest zijn broodwinning. Aan deze voorwaarden wordt voldaan als de fokker steeds per leeftijdsklasse alleen de *toename* van het aantal dieren verkoopt.
Om tot een wiskundige formulering van de probleemstelling te komen is het handig een winstvector in te voeren, waarin voor elke leeftijdsklasse de opbrengst per dier genoteerd wordt: $W = (w_0\ w_1\ \ldots\ w_n)$.

Lineair programmeren

De verbinding met het onderwerp *lineaire programmering* kan nu gelegd worden, want het probleem van de fokker is een optimaliseringsprobleem met een lineaire doelfunctie en lineaire nevenvoorwaarden. Het LP-model ziet er zó uit:

MAX $W(X(t+1) - X(t))$	(de opbrengst bij de verkoop van $X(t+1) - X(t)$ dieren)
Onder de voorwaarden:	
$X(t+1) \geqslant X(t)$	('interen' moet voorkomen worden)
$X(t) \geqslant 0$	(biologische vanzelfsprekendheid)
$\Sigma x_i(t) = N$	(het totaal aantal dieren wordt genormeerd op N)

Deze laatste voorwaarde is nodig omdat het probleem anders onbegrensd is.

Na verkoop van $X(t+1) - X(t)$ dieren heeft de fokker weer het oorspronkelijke aantal van $X(t)$ dieren tot zijn beschikking, zodat het proces van groei en verkoop in iedere tijdseenheid op dezelfde wijze kan verlopen. Substitutie van $X(t+1) = P.X(t)$ in het model en enig herschrijven geeft:

MAX $W(P-I)X(t)$
Onder de voorwaarden:
$(I-P)X(t) \leqslant 0$
$X(t) \geqslant 0$
$\Sigma x_i(t) = N$

Hiermee staat het probleem in de standaardvorm voor lineaire programmering. Uitschrijven van het model voor het concrete voorbeeld:

$$\text{met } P = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},\ W = (1\ 1\ 1) \text{ en } N = 100 \text{ geeft:}$$

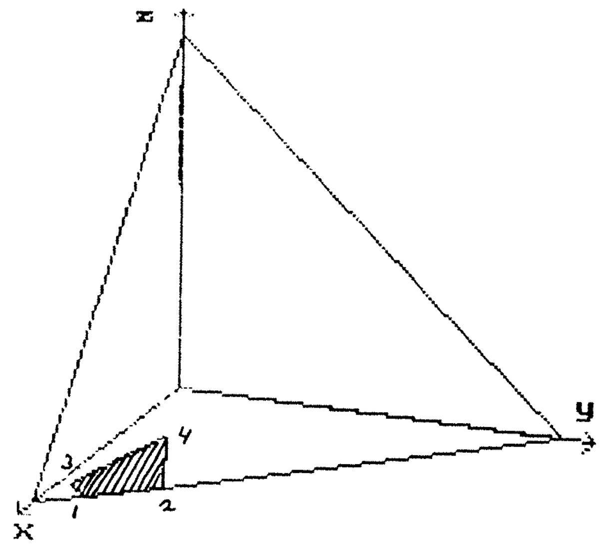
MAX $-(\frac{2}{3})x_0 + 8.5x_1 + 11x_2$
Onder de voorwaarden:

$$\begin{aligned} x_0 - 9x_1 - 12x_2 &\leqslant 0 \\ -\tfrac{1}{3}x_0 + x_1 &\leqslant 0 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &\leqslant 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 &= 100 \end{aligned}$$

Omwille van de overzichtelijkheid is $x_i(t) = x_i$ geschreven.

Dit probleem met drie beslissingsvariabelen kan opgelost worden met standaardprogrammatuur voor LP. Terugkerend naar de schoolpraktijk zijn hiervoor verschillende programma's te gebruiken. Omdat het een probleem met drie variabelen betreft, is een mogelijke oplossingsweg de grafische methode. De grafische methode houdt in dat eerst het toelaatbare gebied (dat altijd convex is) volledig bepaald wordt. Vervolgens wordt gekeken in welk hoekpunt (eventueel: langs welke ribbe of grensvlak) de doelfunctie optimaal is. De grafische methode is echter in de praktijk met de hand nauwelijks uitvoerbaar vanwege het vele tekenwerk. Het tijdrovende tekenen van toelaatbare gebieden zou dan de overhand krijgen, hetgeen niet de bedoeling van lineair programmeren kan zijn. Dit praktische probleem neemt niet weg dat het *idee* van de grafische methode wel aantrekkelijk is. Het maakt immers het principe om langs de ribben van een convex gebied te wandelen aanschouwelijk.

Om toch de grafische methode te kunnen toepassen, is het programma Linprog ontwikkeld [3]. In dat programma wordt het toelaatbare gebied stap voor stap opgebouwd, waardoor de ligging van elke beperking in de driedimensionale ruimte goed te zien is. We verwerken het probleem van de fokker met dit programma. In de figuur hieronder is het toelaatbare gebied gearceerd en in de tabel naast de figuur staan de coördinaten van de hoekpunten van het toelaatbare gebied en de bijbehorende waarden van de winstfunctie.



	Hoekpunten			Winst
1	90	10	0	25
2	75	25	0	75
3	90.90	6.06	3.03	24.24
4	66.67	22.22	11.11	266.67

Uit de tabel blijkt dat een populatie van $X=(66.7\ 22.2\ 11.1)$ een optimale verdeling van dieren over leeftijdsklassen geeft. Eén tijdseenheid later heeft de fokker dan (333 22.2 11.1) dieren, zodat er 266 jonge dieren verkocht kunnen worden. Het aantal dieren in de andere leeftijdsklassen is precies op peil gebleven, wat één van de randvoorwaarden was! De strategie van de fokker is in dit geval: fok zoveel mogelijk jonge dieren en verkoop die. De opbrengst is nu heel wat groter dan in het geval dat de fokker uitgaat van de stabiele verdeling (82.8 13.8 3.4) die eerder bepaald is. In dat geval schieten er per tijdseenheid immers slechts 100 dieren over. Het wordt nog anders als de oude dieren veel meer waard zouden zijn dan de jonge. De winstfunctie moet dan aangepast worden. Bijvoorbeeld bij een winstvector $W=(0\ 10\ 20)$ wordt het doel:

MAX $\frac{10}{3}x_0 - 20x_2$
Onder dezelfde beperkende voorwaarden als hiervoor.

In dit geval blijkt de verdeling van dieren $X=(90\ 10\ 0)$ optimaal te zijn. Eén tijdseenheid later zijn er dan (90 30 5) dieren, zodat de fokker twintig middel- en vijf oude dieren kan verkopen zonder in te teren, wat een opbrengst geeft van 300.

Het Harvesting-Lesliematrixmodel

De verkoop van dieren kan ook met een matrixmodel beschreven worden. Noem H de matrix met op de hoofddiagonaal per leeftijdsklasse de fractie dieren die overblijft na verkoop (de *Harvesting matrix*):

$$H=\begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}$$

Als na verkoop de populatie weer zijn oorspronkelijke omvang moet hebben en de groei beschreven wordt door $X(t+1)=PX(t)$, betekent dit dat $HX(t+1)$ weer gelijk moet zijn aan $X(t)$. Er is dus evenwicht tussen groei en verkoop als $X(t)=HPX(t)$.
De matrix H is te bepalen als bij een gegeven winstvector W de optimale populatie X is vastgesteld. In het voorbeeld met $W=(0\ 10\ 20)$ en $X=(90\ 10\ 0)$ wordt dat:

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ zodat } HP=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De interpretatie: van de jonge dieren wordt er geen enkele verkocht, van de middel-dieren $\frac{2}{3}$ deel en de oude dieren allemaal.

We hebben nu twee lineaire modellen uit de biologie met elkaar gecombineerd: het *Harvesting model* en het *Lesliematrix model*. Bovendien zijn twee computerprogramma's de revue gepasseerd: een programma voor het doorrekenen van matrixmodellen en een programma voor ruimtelijk lineair programmeren. Beide getoonde programma's zijn alleen geschikt voor modellen met drie variabelen. Een programma voor grotere matrices verschilt niet wezenlijk van het hier gepresenteerde, maar voor lineair programmeren met meer dan drie variabelen moet wel een andere oplossing gezocht worden dan de grafische methode. We komen dan terecht bij het standaardalgoritme voor lineair programmeren: de Simplexmethode. Een geschikt programma hiervoor is Simopt [4]. Aan de hand van een tweede voorbeeld demonstreren we in- en uitvoer van dit programma.

In 1830 waren er in het westen van de VS veertig miljoen bizons. In 1887 waren er nog maar 200 over, want de dieren werden ongelimiteerd afgeslacht.

Van de Amerikaanse bizon is bekend dat:
- *100 volwassen vrouwtjes elk jaar gemiddeld 90 kalveren werpen, waarvan 48 mannetjes en 42 vrouwtjes;*
- *60% van de kalveren het eerste levensjaar overleeft;*
- *75% van de tweejarige dieren volwassen wordt;*
- *elk jaar 5% van de volwassen dieren sterft.*

► *Bij welke leeftijdsopbouw is de relatieve verdeling van de bizons stabiel?*

```
MAX    0.75VMIDDEL  - 0.05VVOLW + 0.75MMIDDEL  - 0.05MVOLW

                              0.42VVOLW                                         >= VKALF
0.6VKALF                                                                        >= VMIDDEL
       0.75VMIDDEL  + 0.95VVOLW                                                 >= VVOLW
                              0.48VVOLW                                         >= MKALF
                                          0.6MKALF                              >= MMIDDEL
                                                   0.75MMIDDEL  + 0.95MVOLW     >= MVOLW
VKALF  +  VMIDDEL  +  VVOLW  +  MKALF  +  MMIDDEL  +  MVOLW                     =  1000
```

fig. 2

De matrix voor de bizonpopulatie is:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0.42 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.95 \end{array}\right)$$

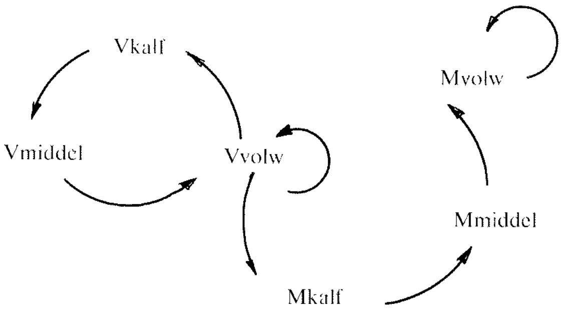
De stabiele leeftijdsverdeling is X = (0.112, 0.061, 0.294, 0.128, 0.069, 0.336). De groeifactor voor de bizonpopulatie is ongeveer 1.105. Stel nu dat men kuddes dieren wil houden en dat alleen de volwassen dieren verkoopwaarde hebben, wat is dan de beste samenstelling voor een kudde?
Geheel analoog aan het vorige voorbeeld kan er weer een LP-model opgesteld worden met de matrix hierboven en W = (0 0 1 0 0 1) als vertrekpunt. Invoer van het model: zie figuur 2.
En verwerking met het programma Simopt geeft als uitvoer:

```
Summary of Results

Value Objectfunction :              145.492

               Activity Level
VMIDDEL   :         103.279
VVOLW     :         409.836
MMIDDEL   :         118.033
MVOLW     :           0.000
VKALF     :         172.131
MKALF     :         196.721
```

Een optimale verdeling over de klassen is nu X = (17.2 10.3 42 19.7 11.8 0). Toepassen van de populatievoorspellingsmatrix geeft de populatie een tijdseenheid later: (17.2 10.3 46.7 19.7 11.8 8.9). Van de volwassen vrouwtjes wordt 12.2% verkocht en de volwassen mannetjes worden allemaal verkocht. Dit model gaat voorbij aan het feit dat er ook mannetjes nodig zijn voor de reproduktie, vandaar die verkoop van 100%. Er zullen dus toch enkele mannetjes gehouden moeten worden ten behoeve van de voortplanting.

Dynamische simulatie

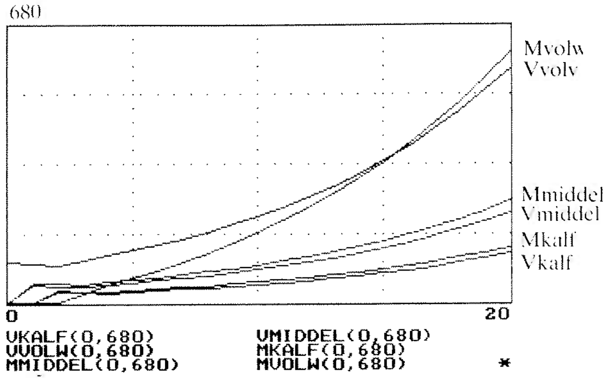
In het NIVO-nascholingsmateriaal voor wiskunde is ook het thema *dynamische simulaties* opgenomen. Bij dit thema staat het maken van wiskundige modellen centraal. Het computerprogramma dat in de cursus gebruikt wordt is VU-dynamo [5]. De werking van dit pakket en de mogelijkheden voor het onderwijs worden besproken in de bijdrage van D. Kok en P. van Blokland elders in deze Wiskrant. Op deze plaats illustreren we de relatie tussen matrixmodellen en het modelleren met VU-dynamo aan de hand van het bizonprobleem.
Een veelgebruikt hulpmiddel bij modelformulering van dynamische processen is het schematisch weergeven van verbanden tussen variabelen in een diagram. Het diagram voor de bizons ziet er zó uit:



De volgende stap is het opstellen van de modelvergelijkingen volgens de regels van het computerprogramma. Het bizonmodel in VU-dynamo is:

```
L vkalf = 0.42 * vvolw
L vmiddel = 0.6 * vkalf
L vvolw = 0.95 * vvolw + 0.75 * vmiddel
L mkalf = 0.48 * vvolw
L mmiddel = 0.6 * mkalf
L mvolw = 0.95 * mvolw + 0.75 * mmiddel
N vkalf=0
N vmiddel=0
N vvolw=100
N mkalf=0
N mmiddel=0
N mvolw=0
SPEC dt=1/eindtijd=10/prtper=1
PRINT vkalf/vmiddel/vvolw/mkalf/mmiddel/mvolw
PLOT vkalf,vmiddel,vvolw,mkalf,mmiddel,mvolw
```

In feite staat hier niet veel anders dan de uitgeschreven matrixvermenigvuldiging van het matrixmodel, gevolgd door een rijtje beginwaarden. Omdat het bizonmodel lineair is, komen beide aanpakken eigenlijk op hetzelfde neer. VU-dynamo kan echter ook niet-lineaire modellen aan. Bovendien is het goed mogelijk om een model stapsgewijs op te bouwen en uit te breiden, een belangrijk voordeel als de modellen ingewikkelder worden. Een grafiek van de uitvoer nadat het model tien tijdseenheden is doorgerekend:



Begonnen is met een populatie van uitsluitend 100 volwassen vrouwtjes. In de grafiek is te zien hoe na wat aanloophobbels in het begin exponentiële groei ontstaat.

Conclusie

Bij het hier gepresenteerde computergebruik ligt het accent sterk op software die ingezet wordt als rekengereedschap. Dit is zeker niet de enige mogelijkheid, maar het is wel een richting die naar mijn smaak perspectief biedt. Bovendien past deze vorm van computergebruik goed in de sfeer van met name wiskunde A: de tendens om leerlingen realistische contexten aan te bieden en aandacht te besteden aan het opstellen en interpreteren van modellen.
Voegt het gebruik van de computer nu daadwerkelijk iets toe aan het wiskundeonderwijs? De discussie over deze vraag kan pas goed gevoerd worden als we niet al te veel last meer hebben van de ruis van allerlei praktische problemen. Nu is het nog vaak zo dat er van een docent die de computer in de les wil gebruiken heel wat organisatie- en improvisatievermogen gevraagd wordt.
Toch valt er al wel iets te zeggen over de potentiële mogelijkheden van het type computergebruik dat uit de voorbeelden spreekt:

- het 'spelen' en experimenteren met wiskundige modellen wordt haalbaar voor het onderwijs, wiskunde kan daardoor een dynamischer vak worden;
- het aanbieden van grotere problemen wordt mogelijk, en daarmee wellicht de integratie van verschillende onderwerpen;
- algoritmen en oplossingsmethoden kunnen stapsgewijs op de computer uitgevoerd worden, zodat de leerling als het ware kan meekijken zonder zelf al het rekenwerk te hoeven doen;
- in sommige gevallen kan het oplossingsproces ook gevisualiseerd worden, zoals bij het ruimtelijk lineair programmeren het geval was.

Uiteindelijk zullen ervaringen uit de schoolpraktijk moeten uitwijzen of computers inderdaad een aanwinst voor het onderwijs zijn. Een noodzakelijke voorwaarde om daarachter te komen is dat docenten voldoende zijn nageschoold om met apparatuur en programmatuur uit de voeten te kunnen. Het is dan ook heel terecht dat het NIVO-project heeft voorzien in nascholing van docenten.

Noten

[1] NIVO: Nieuwe Informatietechnologie in het Voortgezet Onderwijs.
[2] Wiscom – voorbeelden van computergebruik bij wiskunde, Vakgroep OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht, 1987.
[3] Het programma Linprog is ontwikkeld bij OW&OC te Utrecht door Kees Henzen en Heleen Verhage. Zie voor de bestelprocedure van dit programma elders in dit blad.
[4] Het programma Simopt is ontwikkeld aan de VU te Amsterdam door Erwin Kalvelagen.
[5] Het programma VU-dynamo is ontwikkeld aan de VU te Amsterdam door Piet van Blokland.

Lezing ten behoeve van het 25ste Nederlands Mathematisch Congres, 31 maart 1989.