

Dynamische simulatie in de klas

P. van Blokland/D. Kok

Faculteit Wiskunde en Informatica, VU Amsterdam

Samenvatting

Dynamische simulatie, een nieuwe trend binnen de wiskunde, sluit goed aan bij een andere trend: meer modelvorming en mathematiseren binnen het wiskundeonderwijs. Essentieel bij dynamische simulatie is de terugkoppeling – een bekend voorbeeld: de periodieke prooi-roofdierenmodellen.

Inleiding

De computer kan op verschillende manieren gebruikt worden binnen het wiskundeonderwijs. Met een grafisch pakket als *VU-grafiek* kan men van elke functie snel de grafiek onder ogen krijgen. De computer is dan een soort elektronisch schoolbord. Ook kan men de computer benutten als 'learning-machine': een vaardigheid als het vinden van een functievoorschrift bij een gegeven grafiek, kan met behulp van de computer inge oefend worden.

In dit artikel gaat het om weer een ander type gebruik: de computer als een instrument dat van pas komt bij het bouwen van modellen en bij het uittesten ervan. Je hebt dan wel speciale software nodig. Binnen onze vakgroep is daarom het pakket *VU-dynamo* [1] ontwikkeld. Het biedt de gebruiker de mogelijkheid te experimenteren met zogenaamde 'dynamische modellen'.

De ontwikkeling en het gebruik van dit pakket sluit aan bij de belangrijkste trend in het denken over het wiskundeonderwijs op het voortgezet onderwijs. Mathematiseren en modelvorming worden steeds belangrijker geacht. Ook wordt veelvuldig de nadruk gelegd op de toepassingen van de wiskunde. Hewet op het vwo en Hawex op de havo laten dat duidelijk zien.

Reden genoeg om iets te tonen van de mogelijkheden van *VU-dynamo*.

Er komt nog iets bij: sinds een half jaar wordt er door ons in enkele 5vwo-klassen geëxperimenteerd met het onderwerp 'Dynamische Simulatie', waarbij *VU-dynamo* als software gebruikt wordt. Ons is gevraagd na te gaan of dit onderwerp een geschikt onderdeel zou kunnen vormen van het vwo B-programma.

Dit artikel heeft als opbouw:

- informatie over Dynamische Simulatie;
- informatie over *VU-dynamo*;
- enkele ervaringen in de klas;
- een 'echt' model: *Boomsterfte*.

Wat is Dynamische Simulatie?

Dynamische simulatie is een simulatiemethode die de nadruk legt op de structuur en het gedrag van systemen die zijn samengesteld uit een of meer feedback-loops.

Een voorbeeld:

Hoe verloopt de afkoeling van een kopje koffie?

Voor dit proces zijn onder andere van belang:

- de temperatuur van de koffie;
- de temperatuur van de kamer;
- de vorm van het kopje en het materiaal waarvan het is gemaakt.

Volgens de afkoelingswet (van Newton) geldt dat de koelsnelheid evenredig is met het verschil tussen de kamertemperatuur en die van de koffie. Hoe hoger de koffietemperatuur, hoe sneller verloopt de afkoeling. Maar aan de andere kant geldt: des te sneller de afkoeling, des te lager de koffietemperatuur.

Deze situatie kan met onderstaand oorzaak-gevolg-diagram beschreven worden.



Essentieel in het proces is de terugkoppeling, de feedback.

De methode van Dynamische Simulaties is aan het einde van de jaren vijftig ontwikkeld aan het beroemde Massachusetts Institute of Technology, het M.I.T. [2]. De eerste toepassingen lagen op het gebied van management. De systeemdynamische aanpak van allerlei problemen is aan het eind van de zestiger jaren algemeen bekend geworden door toepassingen op macro-niveau, met name door het wereld-model ('Grenzen aan de groei') en door modellen van steden. [3] [4]

Dynamische simulatie bleek een krachtige techniek te zijn om het gedrag van grote complexe systemen – ondernemingen, industrie, steden, de ecologie van de aarde – te bestuderen. De onderzoeker kan de invloed van verschillende beheerspolitieken nagaan.

Enkele voorbeelden van dynamische simulaties uit de literatuur zijn:

– *World2*

De eerste geslaagde poging om een samenhangend model te maken van de wereldeconomie, bevolkingsgroei, milieu en voedsel vanuit systeemdynamisch perspectief.

– *Economie*

Er zijn veel vergeefse pogingen ondernomen de prijzen van grondstoffen als olie, suiker, jute, koffie, te stabiliseren. Met behulp van dynamische modellen kan men inzicht krijgen waarom deze pogingen mislukten. Ook kan men het effect van andere pogingen simuleren.

– *Heroïne*

Een model over het verband tussen heroïne, misdaad en politie. Het model maakt duidelijk dat het enige effect van een heroïnevangst daarin bestaat, dat de prijs van heroïne toeneemt en dus ook het aantal misdaden die de junks plegen om het geld te verdienen waarmee de heroïne betaald moet worden.

– *Kaibab*

Een ecologisch model over herten, tijgers en voedsel. Door de natuurlijke vijand van de herten te doden groeit de hertenpopulatie explosief. Hierdoor ontstaat overbegrazing, met dramatische gevolgen voor de hertenstand.

Op dit model komen we verderop nog terug.

Enkele opmerkingen over VU-Dynamo

De taal *Dynamo* is ontwikkeld door J.W. Forrester, oorspronkelijk voor grote computersystemen. Aan *Micro-dynamo*, een afgeleide versie voor de PC is dat nog wel te zien. [5] Met *VU-Dynamo* is geprobeerd een leerling-vriendelijke versie van deze taal te maken, die tevens gebruik maakt van de grafische mogelijkheden van de PC.

Als voorbeeld nemen we weer de afkoeling van een kopje koffie. Dat proces kan beschreven worden via:

$$\begin{aligned} \text{koffie_nieuw} &= \text{koffie_oud} - \Delta t * \text{koelsnelheid} \\ \text{koelsnelheid} &= \text{constante} * (\text{koffie_oud} - \text{kamer}) \end{aligned}$$

We kiezen als beginwaarden: koffie = 90, kamer = 20, t nemen we 1 (minuut) en de waarde voor de constante stellen we op 0.2.

Dit levert de volgende tabel op:

tijd	koffie	koelsnelheid
0	90	14
1	76	11.2
2	64.8	..

Een programma in *VU-dynamo* dat het afkoelingsproces beschrijft luidt:

```

note KOFFIE
note hoe verloopt de afkoeling van koffie?
note een model gebaseerd op de afkoelingswet van Newton

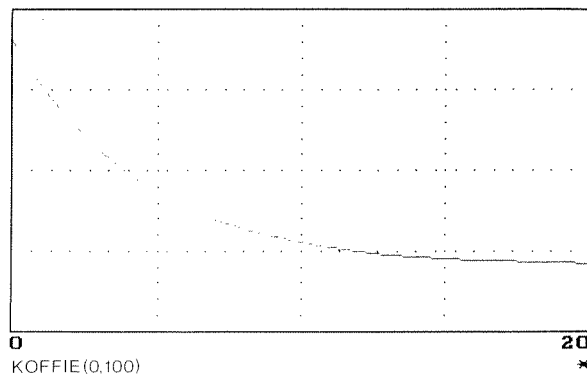
l koffie = koffie - dt*koelsnelheid ;koffie = koffietemperatuur
r koelsnelheid = constante*(koffie - kamer) ;kamer = kamertemperatuur
;koelsnelheid is afkoeling
;van de koffie (in graden
;per minuut)

n koffie = 90
n kamer = 20
c constante = 0.2

spec dt = 1/eindtijd=20/prtper=1
print koffie,koelsnelheid
plot koffie(0,100)

```

TIJD	KOFFIE	KOELSNEL
0.0000	90.0000	14.0000
1.0000	76.0000	11.2000
2.0000	64.8000	8.9600
3.0000	55.8400	7.1680
4.0000	48.6720	5.7344
5.0000	42.9376	4.5875
6.0000	38.3501	3.6700
7.0000	34.6801	2.9360
8.0000	31.7441	2.3488
9.0000	29.3952	1.8790
10.0000	27.5162	1.5032
11.0000	26.0130	1.2026
12.0000	24.8104	0.9621
13.0000	23.8483	0.7697
14.0000	23.0786	0.6157
15.0000	22.4629	0.4926
16.0000	21.9703	0.3941
17.0000	21.5763	0.3153
18.0000	21.2610	0.2522
19.0000	21.0088	0.2018
20.0000	20.8070	0.1614



Enkele opmerkingen over dit programma:

De letter L komt van LEVEL, Engels voor niveau. In deze regel wordt aangegeven hoe een hoeveelheid, in dit geval de temperatuur van koffie, in de loop van de

tijd verandert.

De letter R is afkomstig van RATE. Dit woord heeft in het Engels heel veel betekenissen. Het duidt op de mate van verandering, de snelheid, het tempo. In dit model is het de koelsnelheid die bepaalt hoe snel de temperatuur van de koffie verandert. In de 'Rate-vergelijking' staat dus de snelheid van de verandering.

N komt van iNitial. In een regel die met N begint, wordt altijd een beginwaarde opgegeven, in dit geval de beginwaarde van de koffietemperatuur.

C is de eerste letter van CONSTANT. Het gaat hier om een constante waarde, een waarde dus die tijdens het doorrekenen van het model niet verandert.

SPEC is een afkorting van SPECIFICATION. In deze regel wordt aangegeven in welke stappen het model wordt doorgerekend. Behalve de stapgrootte dt , moet hier ook de eindtijd opgegeven worden. Daarnaast kan men ook de printperiode opgeven. Bij $dt = 0.1$ en $PRTPER = 1$ worden dus elke tiende keer dat het model wordt doorgerekend, de gevraagde waarden afgedrukt.

Wiskundig bekeken gebeurt er dit:

Men stelt eerst een aantal differentievergelijkingen op. Vervolgens worden die met de computer doorge-rekend. Als men de stapgrootte dt steeds kleiner neemt dan nadert de oplossing tot de oplossing van het continue probleem. Aldus kan men de oplossing van de differentiaalvergelijking benaderen.

Dynamische simulatie in de klas

Als gevolg van het toenemende maatschappelijke belang van de informatica en de daardoor veroorzaakte introductie van de computer binnen het voortgezet onderwijs, wordt de laatste jaren de roep om een examenvak informatica van verschillende kanten vernomen. Echter, vorig jaar is de politieke beslissing genomen dat (voorlopig?) een dergelijk zelfstandig examenvak er niet komt. Men heeft in Den Haag gekozen voor 'integratie van elementen van informatie-technologie binnen verschillende schoolvakken'. Tot die vakken behoren wiskunde, natuurkunde en economie.

In dat kader zijn er voor wiskunde twee experimenten gestart. Aan de universiteit van Groningen gaat men de mogelijkheid onderzoeken onderwijs in de statistiek te koppelen aan computergebruik, met behulp van een op het onderwijs toegesneden statistisch pakket. Men wil dat pakket ook voorzien van een zogenaamde SQL-laag.

Aan de Vrije Universiteit zijn we vorig jaar begonnen met een experiment rond dynamische simulatie. We werken daartoe samen met twee leraren van het Waterlant College in Amsterdam. Het ligt in de bedoeling een leerpakket te ontwikkelen voor ongeveer twintig lessen.

De leerlingen brengen veel tijd door achter de computer, maar ook klassikale momenten zijn essentieel. Het gaat ons erom leerlingen ervaringen op te laten doen met allerlei modellen bij verschijnselen, die zich zonder computer niet lenen voor kwantitatieve analyse.

De eerste modellen zijn eenvoudig en van de leerlingen wordt slechts gevraagd de parameters te wijzigen of een eenvoudige verfijning aan te brengen. Gaandeweg worden de modellen ingewikkelder. Ook wordt er steeds meer aan het initiatief van de leerling overgelaten.

Allerlei modellen passeren de revue:

Bibliotheek

Hoe ontwikkelt zich het boekenbestand, als men rekening houdt met zaken als wegraken van boeken, subsidie en prijsontwikkeling?

Vervuiling

Een beschrijving van het afbreken van bepaald afval in open water. Wat zijn de effecten van maatregelen ter bescherming van het milieu?

Radioactief verval

Over het opstellen van een model dat een complete vervalketen beschrijft.

Duidelijk moet worden:

- dat veel van de modellen een zelfde structuur bezitten;
- wat de kenmerken zijn van een labiel en een stabiel evenwicht;
- dat er een groot onderscheid is tussen een lineaire en exponentiële ontwikkeling.

Het klasgesprek zal in dat leerproces een belangrijke rol spelen.

Al doende leert men heel wat van de taal VU-dynamo, maar we willen ervoor waken dat de aandacht zich teveel op het programmeeraspect richt.

In de tweede serie van tien lessen ligt de nadruk op het maken van een ingewikkeld model. Daarom wordt een schema behandeld dat beschrijft hoe deskundigen zo'n model ontwikkelen.

We hebben gekozen voor een model voor het Kaibab-plateau. Dit uit de literatuur bekende model [6] beschrijft de ontwikkeling van een hertenpopulatie die bedreigd leek door de panthers, maar bijna ten onder ging door goed bedoelde, maar verkeerd uitpakkende maatregelen van natuurbeschermers.

Het model wordt in vijf fasen opgebouwd.

Eerst is er alleen sprake van herten die geboren worden en dood gaan. Vervolgens komt er een constant aantal panthers in het model. Deze panthers leven van de jacht op herten.

Als derde wordt het aantal panthers variabel: er worden immers panthers geboren en er gaan panthers dood. Bovendien zet de overheid een premie op het doden van de panther.

In de vierde fase komt het voedsel binnen het model.

In de vijfde fase van het model tenslotte, wordt ook in rekening gebracht dat de hoeveelheid aanwezig voedsel variabel is. De groei van de hoeveelheid voedsel hangt immers ook af van de hoeveelheid voedsel die er is.

Bij het opstellen van het Kaibab-model komt men in contact met enkele krachtige hulpmiddelen van de taal Dynamo.

- DELAY
Sommige verschijnselen hebben een natuurlijke vertraging. Een verminderd voedselaanbod heeft

pas na enige tijd invloed op de gemiddelde levensduur.

- STEP

Sommige maatregelen worden op een zeker moment genomen en oefenen dan een geheel nieuw effect uit. Bijvoorbeeld het met ingang van een bepaalde datum uitloven van een premie op het neerschieten van tijgers.

- TABEL

Soms is het verband tussen twee grootheden alleen bekend voor bepaalde waarden. De tabelfunctie berekent dan de tussenliggende waarden via lineaire interpolatie.

Er is een sterk verband tussen de vergelijkingen in een dynamomodel en de analyse. Neem onderstaande level-vergelijking:

$$L \text{ afstand} = \text{afstand} + \text{snelheid} * \hat{t}$$

In de dagelijkse schoolpraktijk schrijven we meestal

$$s(t + \hat{t}) = s(t) + v(t) * \hat{t}$$

En hier staat uiteraard:

$$\frac{\hat{s}}{\hat{t}} = v(t).$$

Ofwel: je vindt de afstand door te zoeken naar een primitieve van de snelheid.

Dit blijkt ook uit het volgende programma.

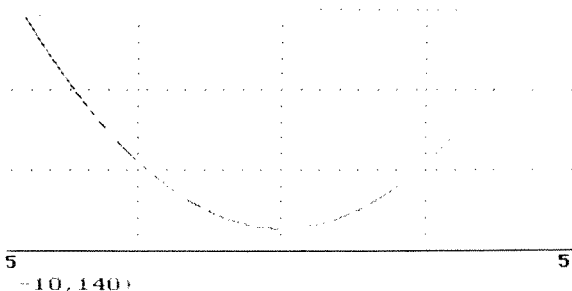
```
l   s = s + v * dt
r   v = 10*t

n   s = 125

spec dt=0.01/begintijd=5/eindtijd=5/prtper=1
plot s
print s
```

Draaien van dit programmaatje levert op:

TIJD	Y
-5.0000	125.000
-4.0000	79.950
-3.0000	44.900
-2.0000	19.850
-1.0000	4.800
-0.0000	-0.250
1.0000	4.700
2.0000	19.650
3.0000	44.600
4.0000	79.550
5.0000	124.500



Inderdaad: als \hat{t} maar voldoende klein genomen wordt, nadert s tot aan de formule $5t^2$.

Op een vergelijkbare manier kunnen differentiaalvergelijkingen onderzocht worden die niet analytisch oplosbaar zijn.

We hebben nog geen gegevens over wat leerlingen op dit terrein kunnen. Wel valt er al iets te melden over de eerste tien lessen 'Dynamische simulatie'.

Die ervaringen zijn positief. Er werd enthousiast gewerkt. Dit geldt zowel voor de leerlingen als voor de leraar. Het enthousiasme van de leerlingen werd duidelijk uit hun werkhouding tijdens de lessen, maar bleek ook uit het feit dat ze in de tussenuren naar het computerlokaal gingen.

De lessen droegen het karakter van een practicum, een voor de wiskundeleraar nieuwe situatie. Leerlingen werken samen, helpen elkaar, nemen resultaten van elkaar over. Het is in zo'n situatie niet eenvoudig uit te maken welke kennis persoonlijk eigendom is en welke gemeenschappelijk bezit.

De meeste leerlingen werkten gemotiveerd. Sommigen accepteerden bijvoorbeeld niet dat de docent de zaak wilde 'versnellen', ze wilden alles zelf ervaren.

Ons viel op dat het werken met VU-dynamo op relatief weinig problemen stuitte.

Wel problematisch waren de pogingen van de docent om een klasgesprek te houden over zaken als modelvorming. Dan verslapt de aandacht snel. Hierbij speelt misschien mee dat ook in de 'gewone' wiskundelessen klasgesprekken geen belangrijke rol speelden.

Het is nog veel te vroeg om conclusies te trekken. Hoogstens kunnen we vaststellen dat leerlingen bereid zijn met nieuwe en toch tamelijk moeilijke leerstof aan de slag te gaan. Ze moeten zich dan wel uitgedaagd voelen. Dit laatste geldt overigens ook voor de docenten die bij het experiment betrokken zijn. Ook voor hen is het onderwerp immers vrijwel nieuw en niet eenvoudig.

Met de aanwezigheid van de computer in het voortgezet onderwijs is er geen reden meer ons tot die differentiaalvergelijkingen te beperken die analytisch oplosbaar zijn. De computer voert niet alleen de numerieke benadering uit, maar is ook in staat de numerieke methode grafisch toe te lichten. VU-dynamo is voor beide zaken geschikt.

Maar het is minstens zo belangrijk dat de nadruk verschuift van het oplossen naar het opstellen van differentiaalvergelijkingen. En dat laatste gebeurt als leerlingen een dynamisch model opstellen.

Ook vanuit het standpunt van de informatica is deze aandacht voor modelvorming van belang. Leerlingen ervaren dat je niet zomaar kunt beginnen met een model te maken. Een analyse vooraf is noodzakelijk.

Een ingewikkeld model: Boomsterfte

Tot slot willen we aandacht besteden aan een nogal ingewikkeld model dat ook deel uitmaakt van het leerlingmateriaal. Het model *Boomsterfte* is te ingewikkeld om door leerlingen te worden opgesteld, maar we denken dat het voor hen leerzaam is er mee

geconfronteerd te worden.

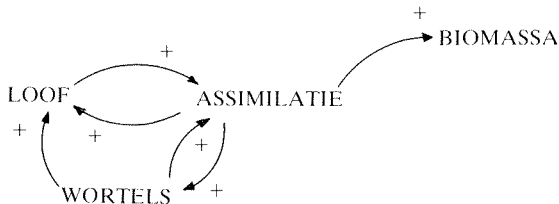
Door met verschillende waarden van de parameters te experimenteren krijgen de leerlingen enig gevoel voor de situatie, hopen we. Zo kunnen ze ervaren hoe een kleine wijziging in een parameter een dramatisch effect kan hebben op het verdere verloop.

Boomsterfte gaat over de invloed van de milieuvervuiling op de bomen. Al jarenlang wordt er door verschillende wetenschappelijke instituten gewaarschuwd dat, als er geen heel drastische maatregelen genomen worden, binnen enkele tientallen jaren de meeste bomen in Nederland dood zullen zijn. Kijken we echter om ons heen, dan lijkt er weinig aan de hand te zijn. Alleen hier en daar kun je zien dat een boom er slecht voor staat.

Hoewel het nog onbekend is waardoor deze sterfte precies wordt veroorzaakt, is het al wel duidelijk dat de luchtverontreiniging de grote boosdoener is. Onduidelijk is of de schadelijke stoffen direct op het assimilatieproces werken of indirect via de verzuring van de bodem op de wortels.

Bossel (1987) heeft een aantal modellen gemaakt om dit probleem van boomsterfte te bestuderen.

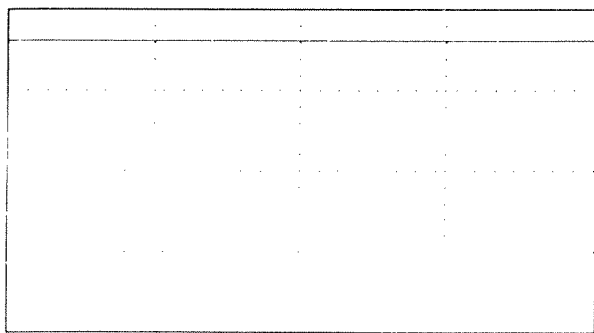
Zijn model *Boomsterfte* is een model voor een enkele naaldboom.



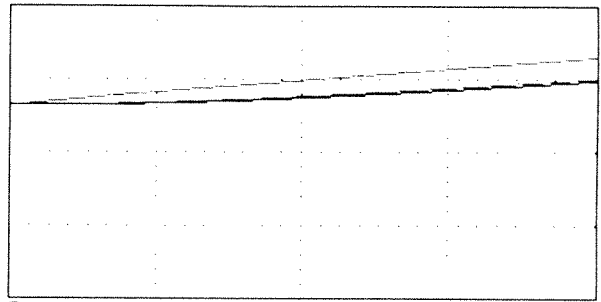
Eenzijds zorgt het loof door assimilatie (de omzetting van CO₂ door fotosynthese in organische stoffen) voor voedingsstoffen die de wortels nodig hebben om te groeien. Aan de andere kant zorgen de wortels weer voor de aanvoer van vocht en mineralen die het loof weer nodig heeft om te kunnen functioneren.

Bossel ging uit van de volgende veronderstellingen met betrekking tot de energieverdeling:

- Een boom heeft in ieder geval 0,3 van zijn biomassa per jaar nodig om te kunnen functioneren. Wat over is aan voedingsstoffen wordt verdeeld tussen vruchten, wortels en loof.
- Bij voldoende voedingsstoffen blijven de naalden acht jaar aan de boom hangen.
- De wortels hebben voedsel nodig vooral voor de vervanging van de kleine haarworteltjes. Het restant van de energie wordt omgezet in houtgroei.

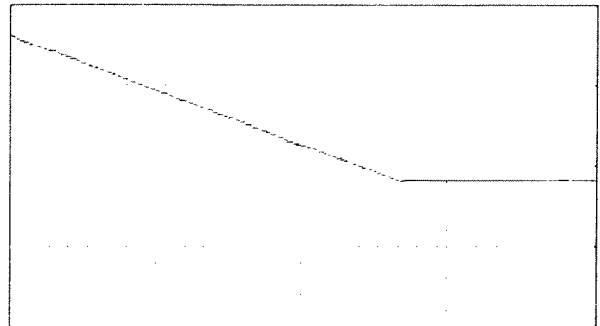


BIOMASSA(0, 1.51)
LOOFMASSA(0, 1.51)
WORTEL(0, 1.51)

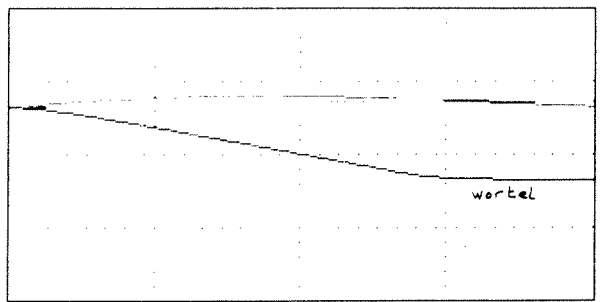


BIOMASSA(0, 1.51)
LOOFMASSA(0, 1.51)
WORTEL(0, 1.51)

Bij een schone lucht stellen we de bladefficiëntie op 1. We zien wat te verwachten valt: de biomassa neemt gestaag toe. Ook is er een toename van het loof en van de wortels.

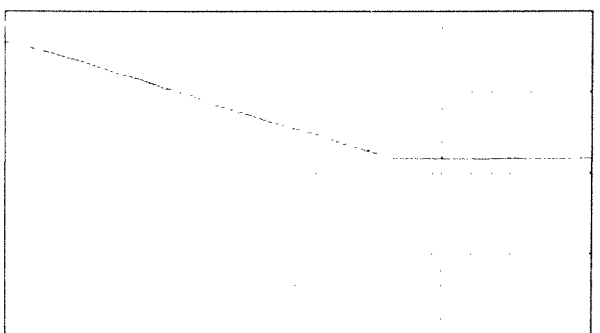


BIOMASSA(0, 1.51)
LOOFMASSA(0, 1.51)
WORTEL(0, 1.51)
BI ADEFFICIENTIE(0, 1.1)

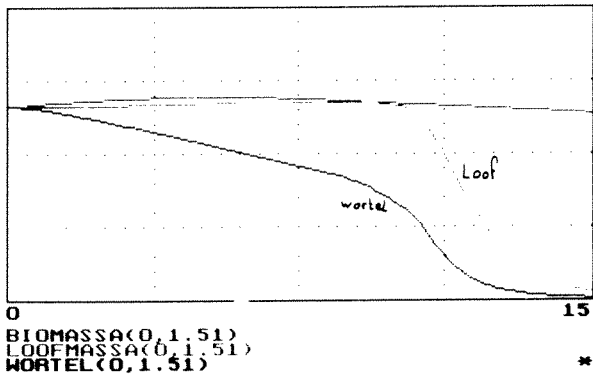


BIOMASSA(0, 1.51)
LOOFMASSA(0, 1.51)
WORTEL(0, 1.51)
BI ADEFFICIENTIE(0, 1.1)

Als de bladefficiëntie in de loop van een aantal jaren daalt naar 0,6, dan heeft dat de eerste vijftien jaar vrijwel geen zichtbare gevolgen. Er lijkt nog steeds geen vuiltje aan de lucht, zou je kunnen zeggen. Maar ondergronds tekent zich een radicale verandering af: een groot gedeelte van de wortels sterft af.



BIOMASSA(0, 1.51)
LOOFMASSA(0, 1.51)
WORTEL(0, 1.51)
BI ADEFFICIENTIE(0, 1.1)



Een relatief kleine extra vervuiling blijkt dramatische gevolgen te hebben. Als de bladefficiëntie daalt naar 0.5 daalt de loofmassa zeer snel naar bijna 0. Dit geldt ook voor de wortelmassa. Met andere woorden: de boom sterft.

In *Boomsterfte* maken de leerlingen kennis met een terugkoppelingsproces dat leidt tot een zichzelf versterkende ineenstorting van het systeem.

Literatuur

- [1] Blokland, P. van: *VU-Dynamo. Een simulatieprogramma voor het onderwijs*, Faculteit Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081, Amsterdam.
- [2] Forrester, J.W. e.a. (1958): *Principles of Systems*, Cambridge Massachusetts, U.S.A., Wright Allen Press.
- [3] Forrester, J.W. (1971): *World Dynamics*, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., Wright Allen Press.
- [4] Meadows, D.H. (1972): *Limits to Growth*.
- [5] Richardson, G.P. and Pugh, A.L.III (1981): *Introduction to System Dynamics Modelling with DYNAMO*, MIT.
- [6] Roberts, N. e.a. (1983): *Introduction to Computer Simulation*, Addison Wesley.
- [7] Bossel, H. (1985): *Umweltdynamik*, München; Tewi-Verlag.