

Computerondersteund onderwijs bij goniometrie in 4 vwo

H.J. Smid/A. Verweij/J. Vastenhouw

TU Delft

Samenvatting

Vakdidactici wiskunde, leerpsychologen en informatici van de Technische Universiteit Delft bundelden hun krachten in een COO-onderzoeksproject.

De volgende aspecten spelen daarbij een rol: aspecten van didactische, sociale en organisatorisch/financiële aard. Verbeteringen van leerresultaten lijken mogelijk, maar hoge ontwikkelkosten zullen een belemmering vormen.

Inleiding

Al langere tijd bestaan er op de Technische Universiteit Delft groepjes die zich, elk vanuit hun eigen invalshoek, bezig houden met onderzoek van onderwijs. In het najaar van 1984 werd het idee geboren om drie van deze groepjes te combineren in een onderzoeksproject op het gebied van computerondersteund onderwijs (COO) bij het vak wiskunde in het secundair onderwijs. Het ging om de vakdidactici wiskunde (de eerste twee auteurs van dit artikel), de leerpsychologen die een taak hebben in de universitaire lerarenopleiding (waaronder de derde auteur van dit stuk) en enkele informatici die COO als specialiteit hebben.

We zullen nu eerst iets zeggen over het globale doel van het project en de nadere afbakening van het terrein waarop het onderzoek zich zou gaan richten. Vervolgens geven we een korte beschrijving van structuur en inhoud van de ontwikkelde software en van het verloop van de computerlessen die in het kader van het onderzoeksproject met behulp van deze software gegeven werden. Tenslotte bespreken we de belangrijkste resultaten en verbinden daar enkele conclusies aan.

Doel van het project en afbakening onderzoeksterrein

Met het project wilden wij meer inzicht verkrijgen in de volgende aspecten van COO:

- Aspecten van didactische aard: in hoeverre en in welke richting beïnvloeden de mogelijkheden en de beperkingen van de computer de didactiek van het schoolvak?

- Aspecten van sociale aard: welke effecten heeft COO op de beroepsuitoefening van de leraar, op het gedrag van de leerlingen en op de waardering van leerlingen voor het schoolvak?
- Aspecten van organisatorisch/financiële aard: hoe dient het ontwikkelen van COO georganiseerd en gefinancierd te worden; welke invloed heeft de school op dit proces; hoeveel kost het ontwikkelen van COO?

Het project moest, gezien de beperkingen in tijd en middelen, kleinschalig worden. Daarom werd besloten het onderzoek te gaan opzetten en uitvoeren in samenwerking met één school voor voortgezet onderwijs. Bovengenoemde vraagstelling zou dan ook toegespitst worden op de situatie die in die school werd aangetroffen. Die situatie moest geen bijzondere zijn; we wilden met een 'doorsnee'-school gaan werken om een zo realistisch mogelijk beeld van de mogelijkheden van COO te krijgen. De enige eis die we verder aan de school stelden, was dat er voldoende microcomputers beschikbaar waren. Een hele klas leerlingen zou tegelijk met de computer moeten kunnen werken. Het was niet moeilijk een school te vinden die aan onze eisen voldeed en die geïnteresseerd was in deelname aan het project: het Christelijk Lyceum Delft (CLD). In overleg met de wiskundesectie van het CLD werd als onderwerp uit de schoolwiskunde waarop het onderzoek zich zou richten gekozen: de goniometrie van 4 vwo, een onderwerp dat duidelijk als een knelpunt werd ervaren in een klas waarin betrekkelijk rustig geëxperimenteerd zou kunnen worden.

Het uitgangspunt voor de ontwikkeling van COO bij dit onderwerp werd:

het werken met de computer moet een regulier onderdeel van het onderwijs zijn; in de lessenserie over het betreffende onderwerp moeten enkele 'gewone' lessen vervangen worden door 'computerlessen' waarin de leerlingen op interactieve wijze via de computer onderwijs volgen.

Juist in een situatie waarin COO zou worden ingezet bij een knelpunt in het onderwijs, leek deze vorm van computerondersteund onderwijs aantrekkelijk. De keuze voor interactief werken betekende dat het ontwikkelen van de benodigde software weliswaar vrij gecompliceerd en daardoor duur zou worden, maar ook didactisch bijzonder interessant: de didactische problemen die in 'gewone' lessen door leraar en leerboek opgelost moesten worden, zouden in de computerlessen voor het grootste deel via de programmatuur aangepakt worden.

Besloten werd eerst een vooronderzoek te houden waardoor meer inzicht in de problematiek van het onderwijs in de goniometrie van 4 vwo op het CLD verkregen kon worden.

In dit artikel zullen we niet verder ingaan op de opzet, de uitvoering en de resultaten van het vooronderzoek in het voorjaar van 1985. Ook het proces van ontwikkeling van de benodigde courseware in de periode zomer 1985 tot maart 1987 (!) laten we onbesproken. We zullen ons nu beperken tot een korte beschrijving van structuur en inhoud van de ontwikkelde software en een weergave van de belangrijkste aspecten van de uitvoering en evaluatie van de computerlessen, waarin deze software gebruikt werd.

In een drietal onderzoeksrapporten van de faculteit TWI van de T.U. Delft is het onderzoeksproject in al zijn aspecten uitvoerig beschreven. Exemplaren van deze rapporten zijn bij ons kosteloos verkrijgbaar.

Structuur en inhoud van de ontwikkelde software.

In de computerlessen worden voorbeelden, vragen en opdrachten steeds via het beeldscherm aangeboden. De leerlingen moeten via het toetsenbord aangeven wanneer ze de tekst van het scherm gelezen hebben of korte antwoorden intypen, meestal numeriek van aard. Feedback wordt ook via het beeldscherm gegeven, in de vorm van commentaar en/of beknopte uitleg, of er wordt een 'hulpscherm' getoond met een extra figuur of een uitgewerkt voorbeeld. Meestal verschijnt na enkele mislukte pogingen het goede antwoord op het scherm.

Alleen in de vierde computerles zijn minder controles via de programmatuur ingebouwd. Daar wordt steeds de consequentie van het antwoord van de leerling voor functievoorschrift of grafiek in beeld gebracht. De leerling kan dan zelf zien of hij/zij op de goede weg is en beslissen of een nieuwe poging ondernomen moet worden.

De voor de computerlessen ontwikkelde programma's hebben een lineair vertakte structuur. Op een enkele uitzondering na krijgen alle leerlingen per computerles dezelfde serie opgaven aangeboden. Steeds is

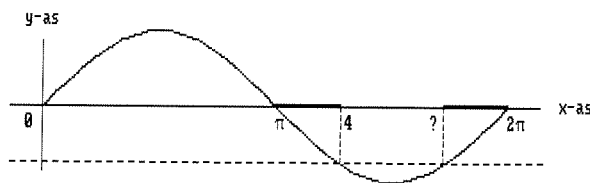
geprobeerd zo'n serie opgaven zo op te bouwen dat leerlingen die niet zo snel werken en/of veel fouten maken geen essentiële zaken missen, als zij aan het einde van het lesuur nog niet alle oefeningen hebben gemaakt. Voor leerlingen die snel en goed werken zou de omvang van de serie opgaven juist voldoende moeten zijn om een lesuur te vullen.

In de eerste twee computerlessen wordt de kennismaking met de grafieken van $x \rightarrow \sin x$ en $x \rightarrow \cos x$ op het interval $[0, 2\pi]$, die in de voorafgaande 'gewone' les plaatsgevonden moet hebben, verdiept. Op het CLD waren drie gewone lessen voorafgegaan, waarin de paragrafen 3.1 tot en met 3.6 van het leerboek Sigma 4AB behandeld waren; de laatste paragraaf mondt uit in het tekenen van de bedoelde grafieken. Door het invoegen van twee computerlessen wordt de uitbreiding van sinus- en cosinusfunctie tot domein \mathbb{R} , die in Sigma 4AB direct volgt, uitgesteld. In de computerlessen wordt geoefend met het aangeven van de juiste getalwaarden bij belangrijke punten van het assenstelsel, met het reproduceren van de sinus- en cosinuswaarden bij $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ en met uitbreiding van de grafieken van sinus en cosinus op $[0, \frac{\pi}{2}]$ tot $[0, \pi]$ en vervolgens tot $[0, 2\pi]$. Hierbij wordt een aantal symmetrie-eigenschappen van de grafieken benadrukt, doordat de gelijkheid van een aantal langs de x -as getrokken lijnstukjes door de leerlingen moet worden opgemerkt.

Als voorbereiding op het oplossen van eenvoudige goniometrische vergelijkingen, in Sigma 4AB behandeld in paragraaf 3.7C, wordt verder uitvoerig geoefend met opgaven in de trant van:

als $x = 4$, voor welke andere x -waarde in $[0, 2\pi]$ neemt de sinusfunctie dan dezelfde waarde aan?

Daarbij wordt steeds gebruik gemaakt van een grafiek en van gelijke lijnstukjes op de x -as. Bij het genoemde probleempje ziet de figuur er als volgt uit:



Door de symmetrie van een deel van de grafiek zijn de dik gemaakte lijnstukjes even lang en kan de gezochte andere x -waarde gemakkelijk gevonden worden. Op dezelfde manier worden oefeningen aangepakt waarbij, bij een gegeven x -waarde, ook x -waarden in $[0, 2\pi]$ met tegengestelde functiewaarde moeten worden opgespoord.

Aanvankelijk worden de figuren geheel compleet, zoals bovenstaand, op het scherm getoond. Daarna wordt steeds meer aan de leerling zelf overgelaten. Uiteindelijk volgen opgaven zonder dat figuren worden getoond; de leerlingen kunnen dan, op papier of mentaal, zelf grafieken en 'dikke lijnstukjes' tekenen. Alleen als hulp nodig blijkt, of bij de samenvatting achteraf, verschijnen dan nog figuren.

De derde computerles geeft oefening in het met behulp van grafieken oplossen van eenvoudige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden met $x \in \mathbb{R}$.

zoals $2 \sin x + 1 = 0,5$, $x \in \mathbb{R}$ of $2 \cos x + 1 > -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. De vergelijkingen en ongelijkheden zijn steeds te herleiden tot een vorm waarin het linkerlid alleen $\sin x$ of $\cos x$ bevat en het rechterlid een numerieke waarde; deze vorm wordt 'standaardvorm' genoemd. De te gebruiken grafieken zijn dan ook alleen de grafieken van $x \rightarrow \sin x$ en $x \rightarrow \cos x$ op domein \mathbb{R} .

In de voorafgaande 'gewone' lessen moeten deze grafieken, en het oplossen van eenvoudige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden hiermee, al behandeld zijn. Op het CLD gebeurde dat door in drie 'gewone' lessen tussen de tweede en de derde computerles de stof van Sigma 4AB paragraaf 3.7 en 3.8, aangevuld met enkele ongelijkheden, door te werken. In de computerles wordt steeds volgens een vast patroon naar de oplossing toegewerkt: eerst herleiden tot de 'standaardvorm', dan één waarde in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (bij sinus) respectievelijk in $[0, \pi]$ (bij cosinus) bepalen die aan de vergelijking voldoet en tenslotte, met behulp van de grafiek, de oplossingsverzameling van vergelijking of ongelijkheid voor $x \in \mathbb{R}$ geven. Bij het geven van feedback en hulp wordt vaak teruggegrepen op de in de eerste computerlessen behandelde methode van de 'gelijke lijnstukjes' om een tweede x -waarde met dezelfde functiewaarde te vinden.

De vierde computerles is gewijd aan het transformeren van de grafieken van $x \rightarrow \sin x$ en $x \rightarrow \cos x$ en aan de functievoorschriften die bij de getransformeerde grafieken passen. Deze functievoorschriften zijn van de vorm: $x \rightarrow d + c \sin(bx + a)$ of $x \rightarrow d + c \cos(bx + a)$, waarin $b > 0$ en verder $a = 0$ of $b = 1$.

De oefeningen van deze computerles moeten voorbereid zijn in de voorgaande 'gewone' lessen. In de paragrafen 3.9 en 3.10 van Sigma 4AB is de benodigde leerstof te vinden; deze leerstof werd op het CLD tussen de derde en de vierde computerles in twee 'gewone' lessen behandeld.

In het eerste deel van de computerles wordt steeds gevraagd bij een gegeven functievoorschrift van bovengenoemd type, aan te geven door middel van welke transformaties de grafiek van sinus respectievelijk cosinus stap voor stap in de grafiek van de gegeven functie overgevoerd wordt. Daarbij moeten ook de bijbehorende numerieke waarden opgegeven worden. De leerlingen kunnen hoogstens drie transformaties opgeven, achtereenvolgens te kiezen uit horizontale verschuiving, vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as, vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as en verticale translatie. Bij iedere stap wordt direct het bijbehorende resulterende functievoorschrift getoond, waarna de leerling kan kiezen voor doorgaan óf het weer ongedaan maken van de opgegeven transformatie(s).

In het tweede deel van de vierde computerles gaat het erom bij gegeven 'getransformeerde' grafieken het bijpassende functievoorschrift te bepalen. Maar steeds wordt weer eerst gevraagd aan te geven welke transformaties achtereenvolgens nodig zijn om de grafiek van de sinus- respectievelijk de cosinusfunctie in de gegeven grafiek over te voeren, waarbij dezelfde beperkingen gelden als bovengenoemd. Nu wordt bij iedere stap het effect van de gekozen transformatie op

de grafiek van sinus respectievelijk cosinus, of de hieruit al door vorige transformaties ontstane grafiek, getoond. De leerling kan eventueel terug, dat wil zeggen al uitgevoerde transformaties ongedaan maken en opnieuw kiezen. Als de leerling tenslotte vindt dat de resulterende grafiek de gegeven grafiek bedekt, wordt gevraagd, ook stap voor stap, het bijbehorende functievoorschrift te geven.

Bij het maken van een didactisch ontwerp voor de software is aangesloten bij de globale didactische aanpak van het op het CLD gebruikte leerboek. Het door ons ontwikkelde materiaal is niet alleen bedoeld als een verzameling oefenopgaven, maar vooral als oplossing voor de didactische lacunes in het leerboek. Explicitering van de manier waarop symmetrieën van de grafiek van sinus of cosinus gebruikt kunnen worden bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden (de methode van de gelijke lijnstukjes) is hiervan een voorbeeld.

Het verloop van de computerlessen

De voor vier computerlessen ontwikkelde courseware, bestaande uit de hierboven beschreven software, aanwijzingen op papier voor de leerlingen en een handleiding voor de docent, is in het voorjaar van 1987 voor het eerst gebruikt in de drie 4vwo-klassen van het CLD. De computerlessen maakten toen deel uit van een lessenserie van veertien lessen over de stof van Sigma 4AB hoofdstuk 3 tot en met 3.12. Het aantal van veertien was gekozen omdat in het vorige schooljaar óók veertien lessen aan deze leerstof waren besteed. We wilden de omstandigheden zo 'normaal' mogelijk houden en de invoering van COO niet gepaard laten gaan met het uittrekken van méér lessen voor hetzelfde onderwerp. De in de computerlessen behandelde stof kwam in de plaats van een aantal opgaven uit het leerboek.



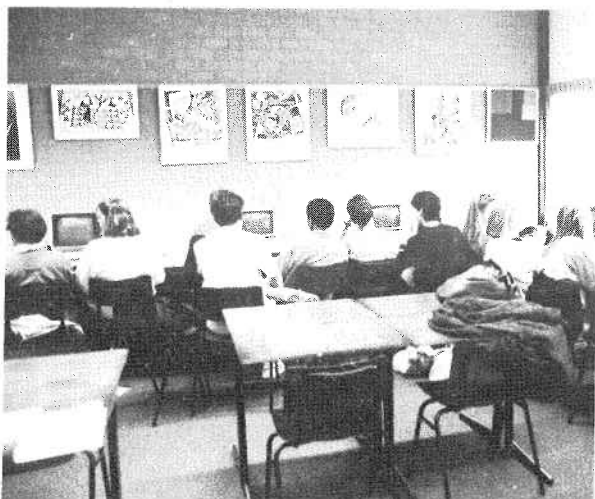
Niet 'normaal' voor leraren en leerlingen was dat er in het kader van het onderzoeksproject zoveel gegevens verzameld werden. Alle computerlessen in het voorjaar van 1987 werden bijgewoond door observatoren, er werden geluidsopnamen gemaakt, de door de

leerlingen doorlopen 'takken' van het programma werden op de diskettes geregistreerd, de leerlingen vulden vragenlijstjes in en de docenten schreven over elke computerles een verslagje.

Tijdens de lessenserie werden, met die van het vorige schooljaar vergelijkbare, toetsen afgenomen: een voortoets, een tussentoets en een eindtoets. Na afloop van de lessenserie werden de docenten en enkele leerlingen geïnterviewd. Wat wij hieronder over de computerlessen schrijven is op deze gegevens gebaseerd.

De computerlessen duurden steeds een heel lesuur (50 minuten) en werden gehouden in het computerlokaal van het CLD. In dit lokaal waren in totaal vijftien microcomputers van het type Apple II respectievelijk Apple IIe aanwezig, waarvan er meestal zo'n dertien goed functioneerden.

De beschikbaarheid van het computerlokaal was geen probleem; het lokaal werd onder schooltijd verder alleen voor informaticalessen aan klas 3 gebruikt. Door die informaticalessen waren de leerlingen van 4vwo al goed vertrouwd met de situatie in het computerlokaal en met de bediening van de apparatuur. Wat dat betreft bestond de voorbereiding in de 'gewone' les voorafgaand aan de eerste computerles alleen uit het geven van enkele aanwijzingen aan de leerlingen over bijzondere notaties, zoals p in plaats van π .



De leerlingen werkten in tweetallen, die op basis van vrijwilligheid samengesteld werden. Alleen als er apparatuur uitviel, wat in de meeste computerlessen wel voorkwam, werden enkele drietallen (en soms een viertal) gevormd.

De werksfeer in de computerlessen was over het algemeen erg goed. De leerlingen waren veelal actief bezig met de stof, overlegden met de teamgenoot voordat een antwoord ingetoetst werd en als de één iets niet begreep probeerde de ander het uit te leggen. Hierbij werd, in de eerste drie computerlessen, veel op het scherm gewezen om aan elkaar duidelijk te maken welke gelijke lijnstukjes gebruikt konden worden.

Opvallend was wel dat er in de groepjes van méér dan twee leerlingen vaak zoveel slechter gewerkt werd dan in de tweetallen.

De in de 'gewone' wiskundelessen op het CLD gebruikelijke centrale rol van de docent werd in de computerlessen, zoals bedoeld, vervangen door een meer begeleidende rol. De docent kwam op verzoek te hulp bij problemen met de apparatuur en bij notatieproblemen, hij gaf desgevraagd uitleg over de stof aan tweetallen leerlingen, sprak hier en daar wat bemoedigende of vermanende woorden, stelde af en toe een vraag aan een leerling om na te gaan of de stof begrepen werd en praatte wat na met snelle leerlingen die even voor het einde van het lesuur klaar waren.

Bij de derde computerles waren in twee van de drie klassen de tempoverschillen veel groter dan we verwacht hadden; voor deze klassen werd een extra 'computer-uur' ingelast. In een van de klassen werden de snellere leerlingen aan het werk gehouden door middel van een werkblad dat de docent tevoren had opgesteld met schriftelijk te maken, extra opgaven. In de andere klas zorgde een aantal zich vervelende leerlingen in het extra uur voor grote onrust. Daarom nam de docent deze leerlingen uiteindelijk maar mee naar het gewone lokaal.

Bij de vierde computerles bleek het voor nog minder leerlingen doeltreffend te zijn de stof in één lesuur door te werken. Niet duidelijk was of dit alleen te wijten was aan de (te) korte voorbereidingstijd die in de voorafgaande 'gewone' lessen beschikbaar was geweest. Misschien is, ook bij een adequate voorbereiding, de hoeveelheid stof van deze computerles voor sommige klassen wat te groot voor één lesuur.

Leerresultaten en opinies van leerlingen en leraren

De prestaties op de voortoets waren in 1987 iets, maar niet significant, beter dan in 1986. Op de tussentoets werd in 1987, na afloop van drie van de vier computerlessen, wél significant hoger gescoord dan in het jaar ervoor. Beter prestaties zijn met name vastgesteld op vragen uit de tussentoets die handelden over problemen die tijdens de computerlessen waren geoefend, bijvoorbeeld het vinden van een tweede x -waarde met dezelfde sinus- of cosinuswaarde, het bepalen van x -waarden met tegengestelde functiewaarde en het oplossen van eenvoudige goniometrische ongelijkheden. Het is dan ook zeer waarschijnlijk dat de betere resultaten toe te schrijven zijn aan de eerste drie computerlessen.

De prestaties op de eindtoets in de jaren 1986 en 1987 waren niet significant verschillend. Van enig positief effect op de leerprestaties van de vierde computerles was dus geen sprake. Onze indruk was dat er aan het in deze les behandelde, moeilijke onderwerp meer tijd besteed zou moeten worden.

De leerlingen reageerden gematigd positief op de computerlessen. Zij vonden – gemiddeld genomen – dat deze lessen niet vervelend waren, dat zij niet harder dan gewoonlijk hadden moeten werken (hoewel dat volgens observaties wel zo was!), en dat zij wel wat van de lessen geleerd hadden.

Opvallend was dat de leerlingen die vonden dat zij zich in de computerlessen wel wat meer hadden moeten inspannen, juist degenen waren met slechte

resultaten op de toetsen. Er is geen samenhang gevonden tussen het wel of niet leerzaam vinden van de computerlessen en de toetsresultaten.

De leraren waren zeer te spreken over de computerlessen. Het aspect dat alle drie de leraren benadrukten was dat het verzorgen van de computerlessen een veel minder inspannende taak was dan het geven van 'gewone' lessen. De leerlingen waren veel meer aan het werk en de leraar veel minder. Er was steeds voldoende tijd om leerlingen die vragen hadden te helpen en om rustig te bekijken hoe leerlingen met de stof omgingen. Wat de leraren betref zou wel 20 à 30% van de wiskundelessen op deze manier ingericht mogen worden. De didactiek van de computerlessen sloot goed aan bij de didactische ideeën van de docenten van het CLD. De manier waarop lacunes in het leerboek waren opgevuld, zoals met de methode van de gelijke lijnstukjes, werd door de docenten gewaardeerd.

Conclusies

Het lijkt goed mogelijk bij de 'gewone' schoolstof COO van bovenbeschreven aard te ontwerpen en in de klas te gebruiken, maar de ontwikkelkosten zijn hoog.

Met dit type COO wordt gemikt op de doelen die de leraar relevant acht. De computerlessen zijn voor leraren verder aantrekkelijk omdat de leerlingen, gestuurd door de computer, actief bezig zijn terwijl de docent op een rustige en plezierige wijze het leerproces kan begeleiden. Van extra inspanning buiten de computerlessen, voor organisatie of lesvoorbereiding bijvoorbeeld, is geen sprake.

De leerlingen kunnen goed overweg met de programmatuur. Ze werken er naar behoren mee als zij in

tweetalen gegroepeerd zijn; groepjes van drie of vier leerlingen per computer werken minder goed. De leerlingen waarderen deze vorm van COO gematigd positief.

Als besloten wordt de stof van een computerles voor een minder snelle/goede klas over twee lessen te verdelen, lijkt het aan te bevelen deze verdeling ook voor de snellere leerlingen in de klas aan te houden. De tempoverschillen binnen één lesuur blijven dan beperkt en kunnen gemakkelijker met behulp van enkele extra opgaven in de hand gehouden worden. Het is mogelijk gebleken op bescheiden schaal verbeteringen van een aantal leerresultaten te realiseren. Soms lijken de oorzaken van slechte resultaten dieper te liggen en vormt het eenvoudigweg vervangen van enkele gewone lessen door computerlessen, ook met goede courseware, geen oplossing.

Alles overziende zou er voor COO van het beschreven type wel een goede toekomst kunnen zijn, maar de hoge ontwikkelkosten zullen een niet onbelangrijke belemmering vormen.

Tot slot

Op het CLD is de in het kader van dit onderzoek ontwikkelde courseware in de jaren na afloop van het project niet alleen voor 4 vwo, maar ook in 4 havo gebruikt. Naar onze mening is de courseware interessant genoeg om ook voor andere scholen met een vwo-en/of havo-afdeling beschikbaar gesteld te worden.

Binnen de vakgroep Algemene Wiskunde wordt momenteel een MS-DOS-versie ontwikkeld die in het najaar van 1989 verkrijgbaar zal zijn. De verkoopprijs zal circa f 175,- zijn. Belangstellenden kunnen contact opnemen met de auteurs van dit artikel: p/a Faculteit Technische Wiskunde en Informatica, Julianalaan 132, 2628 BL Delft.