

Een formule-manipulator

A. Epskamp

College Hageveld, Heemstede

In dit artikel doet de auteur verslag van zijn pogingen om programma's te schrijven, die als doelstelling hebben het oefenen in het uitwerken van algebraïsche formules.

In de onderstaande paragraffjes laat hij zien hoe het historisch gegroeid is, wat de doelstelling en werkwijze van het programma is en probeert hij nog een (persoonlijke) blik in de toekomst van educatieve software te werpen en te laten zien, hoe zijn programma daarin past.

Geschiedenis

Gedurende enige jaren ben ik bezig met het ontwikkelen van programma's, die de gebruiker in staat stellen het uitwerken van algebraïsche formules te oefenen. De naam van het laatst ontwikkelde programma was oorspronkelijk: 'Formule manipulator', maar vanwege het feit dat er noodzakelijk nog meerdere programma's op moeten volgen, noem ik het nu: 'Algebra I'. U zult zich misschien afvragen, of dat nu zolang moet duren. Echter, het is ten eerste een zeer langdurige taak om alles te coderen en bovendien moet je al coderende ook nog een goed en sluitend systeem ontwerpen. Het mag in programmeurskringen genoeg bekend zijn dat je eerst een complete lay-out van je programma moet maken, maar er staat in het begin zo weinig echt vast dat deze twee taken voortdurend door elkaar lopen. Dit laatste maakt de vereiste ontwikkeltijd in zekere zin soms onnodig lang. Het programma nadert nu echter zijn voltooiing en daarom is het goed om er enige rapportage over te doen.

Doelstelling

De bedoeling van het programma is om de leerling van de onderbouw te helpen bij het leren werken met formules. Je zou ook kunnen zeggen: de leerling het uitwerken van algebraïsche formules aan te leren. Met deze twee zinnnetjes is echter een heleboel gezegd. Gaat u maar na: Welke formules? Tot op welk niveau? Met hoeveel hulp en begeleiding? In welke vorm? Moet de snelheid of de tijd daarbij een rol spelen? Wat is de rol van de leraar daarbij? Welke mate van zelfstandigheid moet de leerling met het programma krijgen? Hoe zal de aansluiting bij de verschillende schoolboeken en de verschillende

schooltypen zijn? En zo zijn er nog wel wat vragen te bedenken. U zult overigens van mij niet kunnen verwachten dat ik op al die vragen een duidelijk antwoord formuleer, want dat zou op zich met de nodige beargumentering al een hele Nieuwe Wiskrant vereisen. Toch wil ik proberen u iets te vertellen over de manier waarop ik deze bovenstaande en andere vragen in het programma beantwoord heb.

Een eerste uitgangspunt van mijn programma is geweest dat het programma eigenlijk niet in de plaats van de leraar kan en mag treden. Het gebruik van het programma kan geen enkele leraar ontslaan van zijn begeleidende taak bij de uitleg van de stof. Die taak is dermate interactief dat een computer, gestuurd door een programma, dat voorlopig niet van de leraar kan overnemen. Misschien zijn sommige leraren dat niet met mij eens, maar dan verschillen wij dus van mening over de rol van de leraar in het (wiskunde)onderwijs. Misschien is het in een wat verderweg gelegen toekomst op dit punt anders gesteld, maar dan zullen wij het ook over een totaal ander soort programma hebben en bovendien over een nogal wat grotere computer. Het programma kan echter wel heel goed als 'sometjesboek' functioneren. En dat is eigenlijk wat het programma voornamelijk probeert te zijn. Ik geef u daar enige voorbeelden van. Als onze leerlingen in de onderbouw met het onderdeel algebra beginnen, dan zijn de eerste sommen van het type $a+a=2a$. Daarna van hetzelfde met meer termen en ook meer letters. Vervolgens komen in de eerste klas, afhankelijk van het schooltype, aan bod: vermenigvuldigen (bijvoorbeeld: $a*a=a^2$), delen (bijvoorbeeld $ab:a=b$), machtsverheffen (bijvoorbeeld: $(ab)^2=a^2b^2$) en tenslotte ook de formules van de merkwaardige producten (bijvoorbeeld: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$).

Zoals u bekend zal zijn kunnen wij nog steeds niet op het computerscherm de exponenten boven het grondtal plaatsen. Daarom wordt er algemeen voor het kwadraat van a geschreven a^2 . Hierbij staat het teken '^' dus voor 'tot de macht'. Welnu, met het programma zal het mogelijk zijn al deze verschillende typen sommen te oefenen. Toch leek het mij gewenst om voor de wat meer gemotiveerde leerlingen ook wat ingewikkelder opgaven mee te nemen. Daarom is bij de ontwikkeling van het programma eigenlijk als uitgangspunt genomen, dat (bijna) elke som die tot een der hierboven genoemde typen of combinaties daarvan herleid kan worden, door het programma tot een goed eind gebracht zou moeten worden. U moet daarbij wel beseffen, dat in dit programma alleen maar formules worden uitgewerkt. Er wordt dus niet het omgekeerde gedaan. Beter gezegd: er wordt door het programma niet ontbonden. Dat laatste is hopelijk onderdeel van een nieuw programma. De naam hiervan is klaar: 'Algebra II'. Daar hoop ik u over 1 à 2 jaar over te kunnen berichten.

U heeft er waarschijnlijk niet zo bij stilgestaan, maar als u er goed over nadent, dan blijken bij het eenvoudig uitrekenen van zulke eenvoudige sommen al een groot aantal belangrijke beslissingen genomen te moeten worden. Bijvoorbeeld: hoe evalueer je iets als $(a+b)^{2p}$? Je zou kunnen zeggen $(a^2+2ab+b^2)^p$. Maar ook $(a+b)^{2p}$ is goed. En zo zijn er wel meer sommen te bedenken die aanleiding geven tot twee verschillende goede uitkomsten. Als leidraad bij dit soort beslissingen is zoveel mogelijk voor een didactische benadering gekozen, maar ook telde soms mee, zoals bij het laatste voorbeeld, hoe je het in andere, analoge situaties zou doen. In het geval van het laatste voorbeeld heb ik me laten leiden door de analoge situatie van $(a+b)^{2^3}$, die terecht bij voorkeur als $(a+b)^6$ herleid wordt en tenslotte tot $a^6+\dots+b^6$ en niet eerst tot $(a^2+2ab+b^2)^3$ en vervolgens tot $a^6+\dots+b^6$. Bij alle uitwerkingen is steeds voor een stapsgewijze benadering gekozen en wel zodanig, dat elke kleine stap apart op het scherm getoond wordt. Als voorbeeld hiervan de uitwerking van: $(a^p+b^q)^2$:

Machtsverheffingen van veelterm(en):

$$\{(a^p)^2+2(a^p)(b^q)+(b^q)^2\}$$

Haakjes uit- of weggevoerd:

$$(a^p)^2+2a^p b^q+b^q^2$$

Gebruik $a^p \cdot q = a^{(pq)}$:

$$\{a^{(p*2)}+2a^p b^q+b^{(q*2)}\}$$

Factoren geordend:

$$\{a^{(2p)}+2a^p b^q+b^{(2q)}\}$$

Haakjes weggevoerd:

$$a^{(2p)}+2a^p b^q+b^{(2q)}$$

Uitwerking is klaar.

Zo zal het scherm er ook uitzien als een leerling deze opgave intoetst om hem door de computer voor te laten doen. U ziet dat de uitwerking altijd vanuit de binnenste haakjes begonnen wordt. Volledigheidshalve vertel ik u er nog even bij dat de getallen in de opgaven steeds ook allemaal breuken mogen zijn. Zo zal de leerling ook kunnen intoetsen om voor te laten maken: $(1\frac{1}{3}a+1\frac{1}{4}b)^2$. Maar het zullen natuurlijk

meestal gewoon gehele getallen zijn. Het spreekt voor zich dat dit een wat moeilijker opgave is, die waarschijnlijk niet op elk schooltype geoefend zal worden, maar het programma kan het aan en deze opgave illustreert in hoe kleine stapjes een opgave voorgedaan wordt. Als de leerlingen zelf hun opgaven oefenen, dan wordt elk ingetoetst antwoord op één en dezelfde manier herleid en gecontroleerd of hij (of zij) het goede antwoord heeft ingetoetst. De leerling kan elke opgave dus geheel op zijn eigen manier doen en de enige criteria zullen steeds zijn of het antwoord correct is, of het voldoende is uitgewerkt en of het binnen het daartoe (ruim) gestelde aantal keren gedaan is.

Werking van het programma (1)

De werking van het programma is in grote lijnen als volgt: In het programma zijn vijf typen sommen ingebakken met elk vijftien verschillende niveaus. Deze opgaven zijn in principe afgesteld op de cursus die u in de klas gebruikt. Het zal mijn zorg zijn om voor elk gangbaar schoolboek in de onderbouw deze 75 opgaven bij het boek te laten aansluiten. Voorlopig denk ik aan niet meer dan drie belangrijke en veel voorkomende boekenseries. Ook is er een speciale versie aanwezig voor het lbo-onderwijs. Dit type sommenbestand wordt een intern modellenbestand genoemd. Verder is het mogelijk met de bijgeleverde programmatuur om deze vaste kern van opgaven zelf te wijzigen.

Naast de bovenvermelde opgaven kan het programma ook nog een sommenbestand van een twintigtal andere opgaven laden van de schijf. Van deze sommenbestanden worden er ook een gering aantal bijgeleverd, omdat het de bedoeling is dat de leraar deze opgaven met de alweer bijgeleverde programmatuur zelf kan creëren.

Dit type sommen wordt een extern modellenbestand genoemd. De twee hiergenoemde extra programma's worden bij het pakket geleverd. Het zal geen enkele wiskundedocent moeilijk vallen om hiermee zelf zijn eigen opgaven te creëren en in een bestand op schijf te bewaren. De leerlingen kunnen dit externe modellenbestand dus tijdens een sessie met de computer in de les laden. Voor het eerste type sommenbestand, het interne modellenbestand, geldt dat alleen de leraar bepaalt welk intern modellenbestand in het programma operationeel is. Het spreekt voor zich, dat u op die manier ook zeer individueel kunt werken en ook uw proefwerken en overhoringen kunt organiseren. Ik hoop, dat hiermee een aantal van de hierboven gestelde vragen beantwoord zijn: U kunt het niveau, het schooltype, de gebruikte serie schoolboeken en de gewenste opgaven zelf instellen.

Werking van het programma (2)

Ik ga graag nog iets nader in op de manier waarop het programma werkt om ook nog wat antwoorden op een aantal van de resterende vragen te kunnen formuleren. De opzet van het programma is zo, dat alle opgaven op drie manieren benaderd kunnen worden:

de leerling kan de opgave laten voordoen, hij kan ze met heel veel hulp en begeleiding oefenen en hij kan ze in testvorm maken met veel minder actuele hulp. Ik besef dat dit natuurlijk veel beter aan de hand van het programma te zien valt, maar ik zal toch weer een poging doen om dit duidelijk te maken. Het programma is honderd procent menu-gestuurd. Dat wil zeggen dat de leerling altijd met slechts een toetsing zijn keuze aan het programma duidelijk kan maken. Hij kan dus in het hoofdmenu een der letters 'V', 'O' of 'T' toetsen om een opgave (V)oor te laten doen, een opgave te (O)efenen of een (T)est te doen in een of andere opgave. Tijdens het doen van een oefening is hij nooit meer dan een paar toetsaanslagen verwijderd van het laten voordoen van welke opgave dan ook. Tijdens een test is hem dat wat moeilijker gemaakt. Maar ook daar kan dat, hoewel dat dan tevens inhoudt dat hij zijn actuele testopgave moet overdoen. Verder kan de leerling in elk van de drie onderdelen altijd de formules manipuleren: wijzigen, x^2 bijvoorbeeld door X vervangen en meer van zulks.

Ik neem niet aan dat u dit allemaal erg ingewikkeld vindt. In heb vele leerlingen bezig gezien met een van mijn eerdere programma's, dat een absoluut gelijkwaardige structuur heeft en merkte steeds dat de leerlingen ontzettend snel wennen aan de menu-gestuurde werking. Natuurlijk is enige coaching vooraf noodzakelijk, maar de feitelijke gewinning vindt plaats vanaf het moment dat uw leerlingen met het programma werken. Vanaf dat moment zijn zij ook zeer begerig om alle mogelijkheden uit het programma te gebruiken. De meeste van de andere vragen zijn hiermee beantwoord: u kunt steeds de leerling laten kiezen uit elk niveau van begeleiding en de leerling kan er voor honderd procent zelfstandig mee werken.

Didactische software

Hoewel er voldoende opgemerkt lijkt te zijn over het oefenprogramma zelf mag ik, ook ter verheldering van mijn opvatting van het oefenen met behulp van een computer van dit stukje wiskunde, er nog enkele dingen betreffende het programma aan toevoegen. Het valt immers niet mee om de eisen waaraan een educatief programma moet voldoen, eenduidig en definitief te formuleren. Toch lijken een aantal zaken niet meer aan zoveel twijfel onderhevig. De leerling moet zoveel mogelijk zelfstandig kunnen werken met het programma. Hij moet daarbij zo functioneel mogelijk worden begeleid. De programmatuur dient zo doorzichtig mogelijk te worden aangeboden en de leraar dient in grote mate greep op de werking van het programma te hebben. Dit heeft gevolgen voor de werking van het programma. Immers, uit het bovenstaande volgt een aantal eisen waaraan het educatieve programma moet voldoen. Zo zal het niet goed zijn als de leerling geen inzicht heeft in de manier waarop zijn eventuele score tot stand komt. Of hoe hij zijn score te weten kan komen. Of dat hij zijn invoer steeds op een andere manier of op een andere plaats moet doen. Of dat hij zijn keuzen op teveel verschillende manieren aan de computer kenbaar moet maken.

Verder zal de leerling met weinig hulp direct met het programma moeten kunnen werken. Hoewel enige scholing bij het gebruik van het programma in het geheel niet overbodig zal zijn, is in praktisch elk onderdeel de hulp bij het doen van de juiste keuze, bij het vinden van de juiste toets, of zelfs enige uitleg over de algebra zelf, nooit verder dan een of enkele toetsaanslagen weg.

Al deze zaken dienen doorzichtig, overzichtelijk en van hulpschermen voorzien aangeboden te worden. Ik heb in ieder geval mijn best gedaan om in elk programma-onderdeel met behulp van de bekende functie-toetsen F1, F2, ..., F6 steeds alle mogelijke hulp voor de leerling toegankelijk te maken.

Verder dient een educatief programma ook voor de leraar het nodige comfort te bieden. Nu is comfort een erg rekbaar begrip, maar ik heb er in ieder geval nog voor gezorgd dat de leraar de scores van zijn leerlingen op een comfortabele manier kan bekijken en dat hij alle bijgeleverde sommenbestanden ook weer kan veranderen naar zijn eigen zin.

De toekomst

Nu wij net in het begin zijn van het tijdperk van onderwijs met behulp van computers, liggen veel zaken nog niet erg vast. Wij weten nu toch nog erg onvolledig wat wij van deze vorm van onderwijs moeten en mogen eisen. Dat alles geldt natuurlijk ook voor mijn programma. Sommigen verwachten een methodische of geprogrammeerde instructie. Anderen zullen misschien zeggen: geef mij maar een instrument dat alles voor mijn leerling uitrekenet, zodat mijn leerling zijn aandacht aan andere zaken dan rekenen kan besteden. Ongetwijfeld zullen er in de toekomst dergelijke programma's komen. U kunt nu al wiskundige programma's kopen, die (bijna) alles voor u uitrekenen. Zij doen dit echter allemaal totaal zonder enige didactische schroom. Ik geloof zelf niet dat wij zo zitten te springen om blackbox-achtige machine's, die alles voor onze leerlingen kunnen uitrekenen. Wij hebben veeleer behoefte aan programmatuur die in het verlengde ligt van wat de leraar met zijn leerlingen doet.

Wij hebben dus didactische programma's nodig. Dat is precies wat ik geprobeerd heb te maken: een didactische machine die de leraar behulpzaam kan zijn om de effectiviteit van zijn lessen te verhogen. Ik heb goede hoop, dat mijn programma ergens in de zomer klaar en getest zal zijn. Het zal dan een volstrekte overeenkomst vertonen met een eerder door mij gemaakt programma zowel naar lay-out als werking. Voorlopig ziet het er naar uit dat de door mij gehanteerde manier van interactief werken met een computerprogramma op de huidige NIVO-machines het meest voor de hand liggende optimum zal blijven. Wij gebruiken op de NIVO-machines meestal nog geen muis en dat alleen beperkt en definieert al de manier van interactief werken met het programma. Sommigen van u hebben echter misschien al wel eens computers van andere merken gezien die alles op een grafisch scherm doen (Macintosh, Atari en dergelijke). Dit is in principe met heel veel moeite ook nu al mogelijk op

de huidige PC's. Echter, de ontwikkeltijd voor een dergelijk programma is, zeker voor de eerste keer, zeer veel langer. Bovendien is bij die manier van werken het gebruik van een muis een absolute eis. Zodra wij echter onze programma's onder OS/2 gaan draaien kan de grafische kwaliteit van de programma's op de opvolgers van onze huidige machines ook op dat hoge niveau gebracht worden. Dan zal het mogelijk

zijn om volgens het bekende Macintosh-principe WIMP (Windows, Icons, Mouse & Pointer-device's) nog betere interactieve programma's te maken. Nu echter staat al vast dat daar wegens de nog langere ontwikkeltijd en waarschijnlijk ook de nog te verwerven know-how, een aanzienlijk duurder prijskaartje aan zal hangen.
