Hoe kan dat nou?

S.L. Kemme

Inleiding

Verbazing, dat is: iets zien en niet snappen hoe dat kan en dat toch wel graag willen weten. Samengevat in de vraag: hoe kan dat nou?
Naar mijn idee is 'verbazing' een aspect van de wiskunde dat van essentieel belang is voor het onderwijs en dus ook voor wiskunde 12-16.
Eerst geef ik zes voorbeelden, gevolgd door een conclusie en een tweetal kritische kanttekeningen.

Hoe een kwartje door een dubbeltje kon

Dit eerste voorbeeld komt uit het raamplan.
Knip een rondje uit een stuk papier dat precies zo groot is als een dubbeltje en laat zien dat door dat gat een kwartje gaat.
Hoe kan dat nou?

Sierpinski

De volgende opgave stond in Pythagoras (februari 1988).
Kies een punt P en drie punten A, B, C. Verbind nu P met één van de willekeurig gekozen punten A, B of C.
P_1 is het midden van dit lijnstuk.
Verbind P_1 met één van de willekeurig gekozen punten A, B of C.
P_2 is het midden van dit lijnstuk. Enzovoorts.

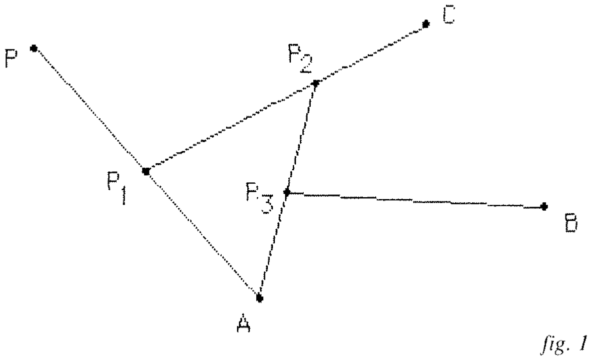


fig. 1

Hoe ziet de verzameling van al deze punten P er uiteindelijk uit? (Zie fig. 2.)

Dit plaatje is volkomen onverwacht. Zowel voor leraren, eerstejaars studenten wiskunde en informatica, geleerden, maar ook gewone mensen. Altijd is de reactie hetzelfde: 'Hé? Hoe kan dat nou?'

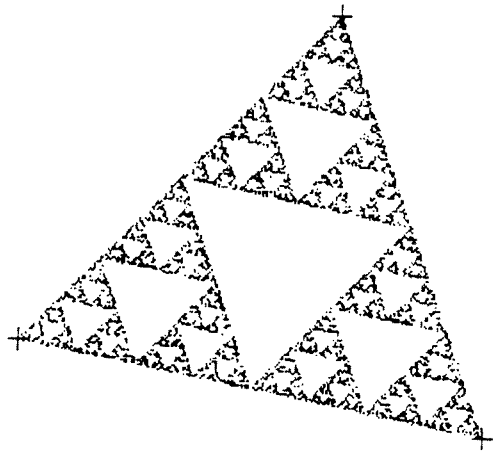


fig. 2

Priemgetallen

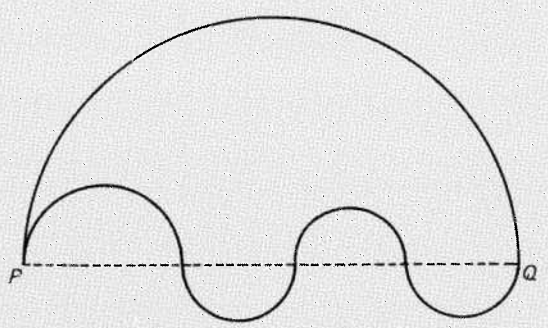
Martin Wagenschein was een begaafd leraar wis- en natuurkunde in Zwitserland. Hij was een fervent voorstander van de zogenaamde 'genetische' methode van lesgeven. Daarbij neemt hij een bekend, maar fundamenteel probleem uit de wiskunde of natuurkunde als voorbeeld en gaat daar heel diep op in. In die uitwerking manifesteren zich dan wel allerlei belangrijke aspecten van de wiskundige methode van denken. Hij heeft het een en ander beschreven in het boek: '*Naturphänomene sehen und verstehen*' (Klett 1980). Het lijkt natuurkunde, maar er staat zeer veel wiskunde in. Toch is de titel niet misleidend. Het geeft aan op welke manier hij naar de wiskunde kijkt. Alsof het natuurverschijnselen zijn die je ziet en die je wilt begrijpen. Eén van die voorbeelden is de volgende vraag: Hoeveel priemgetallen zijn er?
Hij beschrijft een serie van vijf lessen die hij met een gymnasiumklas besteed heeft aan deze vraag. Uiteindelijk komen de leerlingen, geleid door vragen van Wagenschein, tot een formulering en een bewijs van de oneindigheid van het aantal priemgetallen. Gabi is één van de leerlingen van Wagenschein. Een aantal maanden na deze serie schrijft ze Wagenschein een brief. Wagenschein citeert daaruit: 'U hebt er geen

vermoeden van hoe opwindend het was. We dachten werkelijk aan niets anders meer. Ik herinner me nog de warme middag met Elnis onder de hazelnotenstruik, toen hij de stelling vond: en 's nachts, boven in de hut, was ik zo opgewonden toen ik het bewijs vond, dat ik uit het raam sprong en ging wandelen.'
Verbazing, hoe kan dat nou: geen grootste priemgetal? Hoe kan een meisje zó geëmotieerd raken door een wiskundig probleem?

Cirkelbogen

Nu een voorbeeld dat dichterbij huis ligt. Het betreft een observatie in een les aan een brugklas van het gymnasium. De les werd gegeven door een hospitant. Hoe lopen dat soort lessen? Niet echt goed, niet echt slecht, rommelig. Zo ook hier. De hospitant is vriendelijk en welwillend, de klas zeer levendig. Er is een constant geroezemoes zonder dat er sprake is van duidelijke wanorde. Tot de hospitant met de behandeling van de volgende huiswerkopgave begint:

Hieronder staat de plattegrond van een paar bospaden.
Elk pad bestaat uit één of meer halve cirkels.



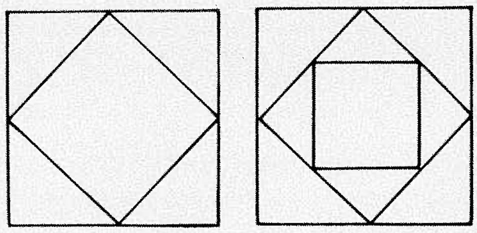
De kortste weg van P naar Q is natuurlijk langs de stippellijn.
Maar welke van de twee gebogen wegen van P naar Q is de kortste?
Schrijf eens op hoe je je antwoord op deze vraag hebt gevonden.

Het maakt niet uit of je langs de grote cirkelboog gaat of langs de kleinere. Tot zover niets aan de hand. Maar dan steekt een leerling zijn hand op en zegt: 'Ja maar... hoe kan dat nou? Als je die cirkelbogen steeds kleiner maakt, dan moet daar toch de lengte van PQ uitkomen?' Toen werd het stil in de klas. Spontaan, zonder verder ingrijpen van de hospitant. Alle aandacht was op dit probleem gericht.

Het vierkant in het vierkant

Nog een voorbeeld uit Moderne Wiskunde. Weer een observatie. Maar nu van een mavo-havo-vwo brugklas met hun eigen leraar.

a. Teken op roosterpapier een vierkant van 10 bij 10. Zoek van elke zijde het midden. Verbind die middens zo met elkaar dat een nieuw vierkant ontstaat.
Hoe groot is de oppervlakte van het tweede vierkant?
b. Zoek de middens van de zijden van het tweede vierkant. Verbind deze middens zo met elkaar dat er een derde vierkant ontstaat.
Hoe groot is de oppervlakte van het derde vierkant?



c. Je herhaalt dit nog een paar keer tot de oppervlakte van het laatste vierkant kleiner dan 10 is. Het hoeveelste vierkant heb je dan?

Het gaat alleen om vraag a.: Hoe groot is de oppervlakte van het tweede vierkant?
Veel leerlingen hebben de zijde gemeten. Ze vinden 7 centimeter. Dus de oppervlakte is 49.
De leraar accepteert deze manier van werken, maar voegt eraan toe: 'Toch weet ik zeker dat de oppervlakte 50 is.'
Ook nu ontstaat zo'n ogenblik van spontane aandacht. '50? Hoe kan dat nou?'

Het touw rond de aarde

Wittgenstein, een beroemde filosoof, was verrukt over de volgende situatie: 'Stel je spant een touw rond de evenaar, mooi strak. Dan knip je dat touw door, je zet er een meter tussen en je spant dat touw weer mooi rond de aarde, bijvoorbeeld met behulp van paaltjes. Hoever zal dat touw dan van de aarde af gaan staan?'

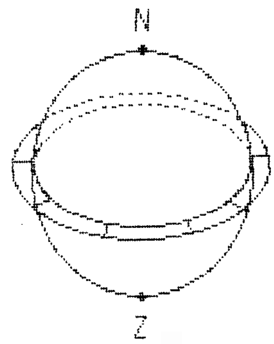


fig. 3

Wat lijkt een redelijke schatting? Bij een touw van 40000 kilometer zet je 1 meter ertussen. Tienden van millimeters?
Het antwoord is ongeveer 16 centimeter.
'16 centimeter? Hoe kan dat nou?'
Je kunt dit probleem aanpakken met behulp van een grafiek.

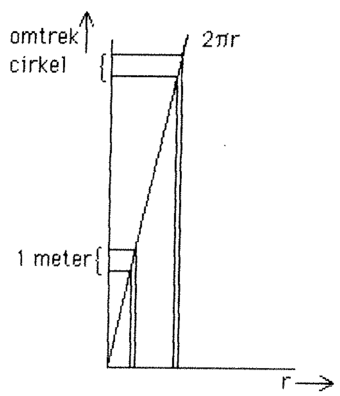
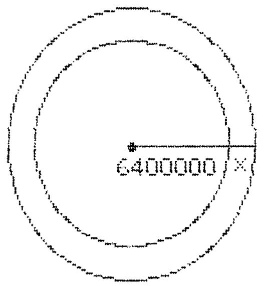


fig. 4

Uit de grafiek kun je aflezen dat je r altijd met een zelfde waarde moet vermeerderen om een toename van 1 meter in de omtrek te krijgen. Heel duidelijk, heel inzichtelijk, maar het doet tekort aan de verbazing.
Zo'n grote omtrek, zo'n klein stukje ertussen en dan toch gaat nog 16 centimeter van de aarde af. Naar mijn idee is de enige verklaring die recht doet aan deze verbazing een verklaring die gebruik maakt van de formule:



$$2\pi(6400000 + x) = 2\pi(6400000) + 1$$

fig. 5

Pas daarin wordt dat contrast in grootte zichtbaar.

Alle voorgaande voorbeelden zijn nogal meetkundig van aard (behalve het voorbeeld van Wagenschein). Kan die verbazing ook leiden tot formele aspecten van de wiskunde? In dit laatste mooie voorbeeld van verbazing wordt zichtbaar hoe het rekenen met lettervariabelen een heel natuurlijke rol kan spelen.

Drijvende krachten

Als je een schommel een duwtje geeft, dan gaat die een aantal keren heen en weer om uiteindelijk tot rust te komen. Tenzij er iemand achter staat die iedere keer op het goede ogenblik een duw geeft. Zo iets heet in de natuurkunde op zijn Engels een 'driving force'. De uitdrukking 'drijvende kracht' is daarvan een zeer slechte vertaling. Maar die heeft een hele mooie dubbele betekenis. Drijvend in de zin van: stuwend (denk aan veedrijver) en drijvend in de zin van: dragend (denk aan drijven op water).
Verbazing kan in beide betekenissen een drijvende kracht zijn in het wiskundeonderwijs. Het is een sturende, stuwende kracht die het onderwijs op gang houdt. De vraag: 'hoe kan dat nou?' zet iedere keer weer opnieuw aan tot wiskundige activiteiten, zoals de duw met de schommel. Het is bovendien een soort onderlaag waar de wiskunde op drijft. Een onderlaag die je in alle onderdelen van de wiskunde terugvindt. Deftig gezegd: het is een attitude, een houding, een manier van naar de dingen om ons heen kijken. Een typisch wetenschappelijke attitude overigens.

Twee kanttekeningen

Tot slot nog twee kritische kanttekeningen.
De eerste gaat over toetsen. Als je verbazing dan zo belangrijk vindt, dan moet je het ook op één of andere manier kunnen toetsen! Hoe kun je nou verbazing toetsen? In een proefwerk gaat dat zeker niet. Als het al te toetsen is, dan zul je daar een alternatieve manier voor moeten bedenken. Of hoef je dat niet te toetsen? Je kunt nou eenmaal niet alle aspecten van je onderwijs toetsen. Het is bekend dat je attitudes eigenlijk niet kunt toetsen. Verbazing heb ik een attitude genoemd.
De tweede opmerking is dat de wiskundige verbazing een typisch intellectuele verbazing is. Dat zou wel eens heel erg slecht aan kunnen sluiten bij de belevingswereld van veel leerlingen. Die verbazen zich misschien over heel andere dingen. Maar dat intellectuele zit nu eenmaal in het vak wiskunde. Wiskunde blijft in essentie een denk-vak, ook in actieve praktische toepassingen. Dat conflict lijkt me de grootste uitdaging voor leerplanontwikkelaars van wiskunde 12-16.