

# Wiskunde zonder angst

H.G.B. Broekman

## Puzzels, spelen en zakrekenmachines

Aan het eind van de VALO-conferentie 1987 werd door de deelnemers een enquête ingevuld. Bij de vraag of 'een ander wiskunde 12-16-programma ook een andere manier van werken in de klas' vraagt, antwoordde een van de deelnemers: 'Ja, spelenderwijs leren omgaan met wiskunde uit het dagelijks leven. Dat is echt boeiend.'

Lezend in Israelische, Amerikaanse en Engelse publicaties over wiskundeonderwijs zou ik daaraan toe willen voegen: 'Benut in het onderwijs ook puzzels en spelen, en gebruik de zakrekenmachine als hulpmiddel.'

De achtergrondgedachte daarbij is de volgende:

1. Het zou goed zijn als de leerlingen in de beschikbare tijd zo veel wiskunde (begrippen, vaardigheden, enzovoort) leren als mogelijk is.
2. Het zou beter zijn als dat leren bestaat uit een zich eigen maken (oplossen, herontdekken) van de wiskundige principes. Dus niet uit een instampen van bijvoorbeeld regels en formules.
3. Het zou waardevol zijn als de wiskunde die de leerlingen leren voortkomt uit diverse – ook niet direct wiskundige – probleemstellingen en toepasbaar is in allerlei contexten.
4. En misschien is het belangrijkste wel dat de leerlingen plezier kunnen hebben in het bezig zijn met wiskunde.

Nu is met name die laatste gedachte er een die makkelijk verkeerd geïnterpreteerd wordt. Het is *niet* de bedoeling dat de leerlingen maar wat aanrommen. Het is echter *wel* de bedoeling dat ze – zoveel mogelijk – ook plezier kunnen beleven aan wat ze doen.

Dat dit met de huidige reken/wiskundeprogramma's maar al te vaak niet het geval is blijkt uit allerlei onderzoeken over angst voor wiskunde (Math Anxiety, Mathophobia, enzovoort).

Voorkomen we die angst door meer puzzels te gebruiken in het onderwijs?

Helaas is dat niet zonder meer het geval. Met name is het tegendeel het geval als we puzzels gebruiken die sterk op trucjes berusten. Vooral ingebouwde – door de meerderheid niet te achterhalen – 'tovertrucs' versterken het zo gevreesde *autoritaire* van de wiskunde. Het is goed of fout, je kunt het of je kunt het niet.

Stelt u zich eens voor dat u tot een gezelschap behoort dat gevraagd wordt twee getallen te noemen (er wordt bijvoorbeeld voor 7 respectievelijk 12 gekozen). Deze getallen worden opgeteld tot 19; daarna komt als vierde getal de som van het tweede en derde (dus  $12 + 19$ ) etc. Zodra u tien getallen heeft staan wordt gevraagd deze op te tellen, maar voor u begonnen bent lever ik u al het antwoord.

Naast het feit dat hier een tweede veel genoemde oorzaak voor de angst voor wiskunde naar voren komt – het schijnt altijd snel te moeten gaan (*tempodwang*) – is het duidelijk dat er een grote tovenaars (een autoriteit) is die de oplossing van het probleem kent. Ingewijden weten dat we met een Fibonacci-rij te doen hebben. Met behulp van enig algebraïsch rekenwerk kunnen zij ontdekken dat de gevraagde som gelijk is aan elf maal het zevende getal. Maar hoeveel leerlingen kunnen zo'n truc doorgronden?

De conclusie luidt dan ook:

Puzzels en spelen die het autoritaire van de wiskunde (en de wiskundeleraar) versterken en tevens het idee versterken dat tempo zeer belangrijk is moeten we uit het onderwijs weren.

Een punt dat naar voren komt uit onderzoek naar angst voor wiskunde is *het individuele karakter* van wiskunde bedrijven. Voor veel mensen is het feit dat bezig zijn met wiskunde kennelijk niet samen met anderen hoort te gebeuren, dat je over wiskunde niet praat, een reden tot weerstand tegen wiskunde.

Nu zijn er puzzels en spelen die met name gericht zijn op het inoefenen van vaardigheden, maar ook een aantal die gericht zijn op het ontwikkelen van bepaalde begrippen, die een open karakter hebben, niet eenduidig autoritair zijn. Als de leerlingen daar samen aan kunnen werken en er zonder tijdsdruk over kunnen praten, kunnen zij een verrijking betekenen voor ons wiskundeonderwijs.

Veel puzzels en spelen bieden de mogelijkheid dat de leerlingen hun zelfvertrouwen kunnen ontwikkelen, een onderzoekende houding (terug?) krijgen en met plezier aan het werk zijn.

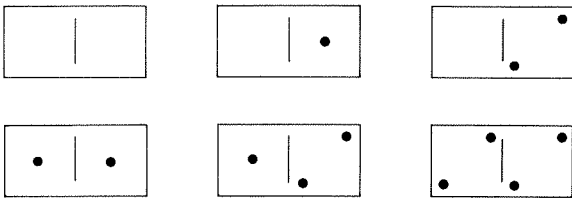
Een noodzakelijke voorwaarde is wel dat ze er allemaal iets van hun gading in vinden of tot een oplossing kunnen komen. Een voorbeeld hiervan zou kunnen zijn de elders afgedrukte domino-piramide. Voor veel leerlingen (van 8 tot 80 jaar!) is deze echter te

gecompliceerd, ook als er een doos dominostenen (of strookjes papier) bijgeleverd wordt. Dit is gedeeltelijk een gevolg van het niet bekend zijn met dominostenen, maar ook van het onvermogen zelf structuur aan te brengen in de aanpak. Vaak samen terugblikken (en een plan maken) kan daarbij helpen, evenals het vereenvoudigen van de vraagstelling (bijvoorbeeld een kleinere pyramide).

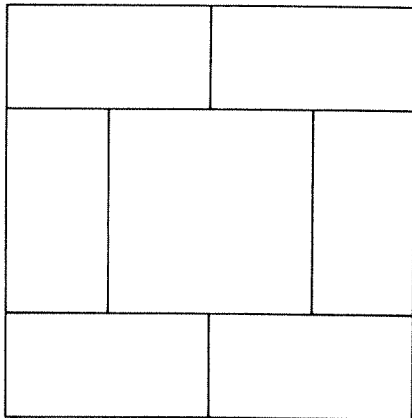
Het volgende domino-probleem uit Arithmetic Teacher is een eenvoudiger probleem, dat tevens een gesprek tussen leerlingen mogelijk maakt over hun oplossingen (en eventueel oplossingsmethoden). Dwing ze als wiskundedocent echter niet om onze terminologie te hanteren als het die van hen – nog – niet is (draaisymmetrie; spiegel-symmetrie).

## Aansluiten maar

Gebruik deze domino's.



1. Leg de domino's op de figuur. Gelijke aantallen stippen tegen elkaar; dus 'passend'.
2. Leg dezelfde domino's op de figuur zó dat iedere zijde van het vierkant hetzelfde aantal stippen heeft. Aansluitenden kunnen nu niet 'passen'.



Ook de volgende opgave over pakpapier kan op vele manieren (niveaus?) aangepakt worden. Opvallend hierbij is dat leerlingen van velerlei niveau en leeftijd hierbij bijna automatisch hardop gaan praten over een soort plan van aanpak, en na uitvoering praten over hoe ze het hebben gedaan. De vraag naar het waarom mag daarbij door de docent wel ingebracht worden, maar laat de leerlingen wel hun eigen taal hanteren.

Zijn goochel-trucs trouwens helemaal uit den boze? Bevatten die dan geen zinvol denkwerk op redelijk eenvoudig niveau? Als u bijvoorbeeld uw leerlingen

de som van drie opvolgende gehele getallen laat uitrekenen en deze som laat meedelen, kunt u – door snel door drie te delen – vertellen met welke getallen ze zijn begonnen. Deze truc is eenvoudiger te doorgronden dan de hiervoor genoemde Fibonacci-truc; dus zijn er zeker leerlingen die er plezier aan kunnen beleven. Moeilijker is de volgende:

Neem drie opvolgende natuurlijke getallen. Vermenigvuldig de eerste twee en deel de uitkomst door het grootste getal. Noem mij de uitkomst en ik vertel u welke getallen u als startpunt koos.

Zodra de leerlingen een *rekenmachine* mogen gebruiken voor de berekeningen zal voor een aantal van hen een grote belemmering wegvallen om zelfs maar te beginnen met nadenken. Een ZRM die deelt met rest (zoals de Galaxy Junior van Texas Instruments) maakt het probleem voor nog meer leerlingen oplosbaar, doordat bij de gevraagde deling telkens 2 als rest optreedt en het vermelde quotiënt een geheel getal is.

Belangrijk voor het leereffect is dat de leerlingen over hun pogingen tot oplossing van het voorgelegde probleem moeten praten en schrijven in hun eigen taal. De *angst voor getallen* en vooral ook de *angst voor 'abstracte taal'* kan daarmee weliswaar niet genezen, maar wel verzacht worden.

Puzzelachtige opgaven die zich zeker lenen om over te praten zijn bijvoorbeeld de volgende vier problemen. Hierbij dient opgemerkt te worden dat de laatste twee duidelijk vereenvoudigd kunnen worden door voorvragen te geven. Bij de derde opgave door eerst te vragen naar allerlei mogelijke invullingen (eventueel bij minder gecompliceerde gevallen) en bij de laatste door eerst een voorbeeld te geven (bijvoorbeeld een 4 bij 5 rechthoek).

### Puzzel 1

Hoeveel lijnen gaan er door 100 punten waarvan er nooit meer dan twee op één lijn liggen?

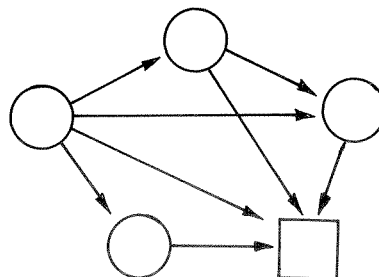
### Puzzel 2 – Welk tweetal eruit?

Als twee van deze getallen weggestreept worden, is de som van de overblijvende getallen in elke rij en in elke kolom een veelvoud van 5 (dus 8 veelvouden van 5). Welke twee getallen kunnen weggestreept worden?

1	2	4	8
5	3	2	3
7	7	1	6
2	6	3	9

### Puzzel 3

Wat is het kleinste getal dat op de plaats kan staan?

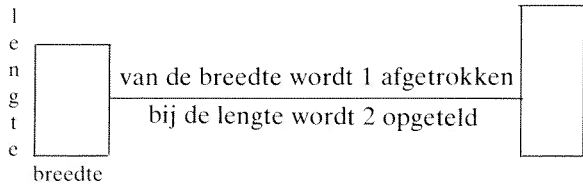


**Toelichting**



- Het natuurlijke getal 5 kan met een natuurlijk getal vermenigvuldigd worden (namelijk 7) om 35 als uitkomst te geven.
- Als er geen pijl getekend is, is er geen vermenigvuldiging.

**Puzzel 4**



Bij welke breedte en lengte (natuurlijke getallen) is de nieuwe oppervlakte 1 meer dan de oorspronkelijke?

Ook spelen lenen zich uitstekend tot inoefenen van begrippen/vaardigheden en vooral ook tot het leren ontdekken van structuur, het leren proberen, plannen en communiceren.

Enkele voorbeelden daarvan zijn het 'optellen tot honderd', het spel 'alle negen' (in de handel gebracht door MB), Cubilino (3 dimensionaal drie op een rij) en 'wie legt de laatste?' (domino square).

**DOMINO SQUARE**

This is a game for 2 players. You will need a supply of 8 dominoes or 8 paper rectangles. Each player, in turn, places a domino on the square grid, so that it covers two horizontally or vertically adjacent squares. After a domino has been placed, it cannot be moved. The last player to be able to place a domino on the grid wins the game. For example, this board shows the first five moves in one game:

(It is player 2's turn. How can he win with his next move?)

Try to find a winning strategy.

©Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, 1984.

**De Zak-Reken-Machine**

Het gebruik van de ZRM zal in de nabije toekomst een verandering teweeg brengen in het rekenonderwijs aan 6 tot 12-jarigen (zie bijvoorbeeld de eindtermen special van Willem Bartjens jrg. 8 nr. 1). Het hoofdrekenen, maar vooral het schattend rekenen, zal

daarbij een belangrijker plaats gaan innemen. Er zijn vele opgaven mogelijk die erop gericht zijn om dit hoofdrekenen/schatten te verbeteren, te oefenen, waarbij opnieuw het proberen, structureren, ordenen, een grote rol speelt.

Voorbeelden van dergelijke opgaven (puzzels, spelen) die aan te passen zijn aan het niveau van de leerlingen zijn onder andere de volgende:

**Z.R.M. 1 – Vier op een rij**

voor: 2 kinderen  
nodig: kleurpotloden, 1 zakrekenmachine

Vandaag spelen we met deze getallen.

— Kies 2 getallen  
— Kies uit +, -, × of ÷  
— Schat de uitkomst  
— Controleer met de zakrekenmachine  
— Is 't goed, dan mag je kleuren.  
— Wie haalt het eerst '4 op een rij'?  
— Wie haalt het meest '4 op een rij'?

optellen				aftrekken			
1083	2164	126	2268	1080	324	2052	1071
3240	22	540	1098	2157	648	90	423
450	117	1512	436	972	1728	104	1077
1188	2592	112	2178	414	99	1062	2142
vermenigvuldigen				delen			
432	36	162	12	540	240	20	4
27	3240	972	1728	2	48	720	36
6480	324	4320	72	120	360	5	12
1296	9720	54	6888	10	60	108	27

**Z.R.M. 2 – De defecte machine**

How would you calculate  $57 \times 63$  if

- the  key was broken
- the  key was broken
- the  key was broken?

**Z.R.M. 3 – Prijschieten**

Put any number in your calculator and by using only the numbered keys and    obtain 100.

This can be a game for two players.

Example:

	Player 1	Player 2
Player 1	enters the number 37	$37 \times 3 = 111$
Player 2	tries for the target number of 100 by multiplication	
Player 1	uses this new number to get nearer to 100	
...		
		$111 \times 0.96 = 106.56$ Player 1

**Z.R.M. 4 – Kwadraten**

Voor welke positieve, gehele, waarden van p is  $(p - 10)(p + 14)$  een zuiver kwadraat?

## Tot slot

De hier ingebrachte ideeën over puzzels en spelen zijn niet nieuw. Ook in de reken-wiskunde boeken voor 6 tot 12-jarigen zijn vele goede voorbeelden te vinden, met name als het gaat om het inoefenen van vaardigheden en het gevoel krijgen voor getallen. Het op een goede wijze inbouwen in het totale curriculum zal

### *Mannen met baarden*

Wat lopen er tegenwoordig toch veel mannen rond met haar op hun gezicht.

Wanneer een man zijn hele gezicht dicht laat groeien, kun je niet meer zien hoe hij eruit ziet.

Misschien doet hij het daar nou net om. Hij wil niet dat je het ziet.

En dan is er nog het wasprobleem.

Wanneer die behaarde mannen hun gezicht wassen, moet dat net zoveel werk zijn als voor jou en mij om het haar op ons hoofd te wassen.

Dus zou ik wel eens willen weten: hoe vaak wassen die baardapen hun gezicht? Eén keer per week, op zondag, net als wij ons haar? Gebruiken ze shampoo? En een haardroger? Wrijven ze haargroeimiddeltjes op hun gezicht tegen het kaalworden? Gaan ze naar de kapper om hun gezicht te laten bijknippen of doen ze het zelf met een nagelschaartje voor de badkamerspiegel?

Ik weet het niet. Maar als je nou weer es zo'n baardaap ziet (waarschijnlijk meteen als je één voet buiten de deur zet) dan zul je hem misschien eens wat beter bekijken en je dit soort dingen afvragen.

echter veel vindingrijkheid kosten van ontwikkelaars en leerboekschrijvers.

Het werken ermee in de klas zal verder een grote omschakeling voor veel docenten zijn, die daarbij alle mogelijke hulp nodig zullen hebben en naar mijn mening ook moeten krijgen. Essentieel daarbij is dat we allemaal samen meer gericht leren kijken naar de wereld om ons heen zonder daarbij de angst voor wiskunde aan te wakkeren.



Uit: De Griezels van Roald Dahl