Even krijten 16

F. J. van den Brink
OW & OC, RU Utrecht

Een tijdje geleden vroeg ik mijn dochter Kik (klas 2 van het vwo) haar te helpen bij het huiswerk voor algebra: ontbinden in factoren.
Ik herinner me van die situatie niet veel. Maar wel, dat het me verbaasde hoe ze met die veeltermen te keer ging: het was een rommeltje. Hoe je van zo'n manier van werken nu inzicht kon verwachten leek me een raadsel. Ik nam het mezelf kwalijk dat ik achteraf niet wat preciezer kon vertellen wat er eigenlijk gebeurde.
Daarom stelde ik me voor bij de eerste de beste gelegenheid die ze me bood haar manier van werken wat preciezer te onthouden.
Een week later kreeg ik die kans.

De eerste opgave: $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} =$
'Wat moet je doen?', vraag ik om erin te komen.
'Ontbinden of buiten haakjes brengen', zegt ze. 'De meester heeft verteld dat je drie dingen moet aflopen:
1. Is er iets buiten haken te halen?
2. Kijk of het een merkwaardig produkt is.
3. Kijk of het een tabelletjessom is.'

Ik vind het een bewonderenswaardige stap die de leraar van Kik had gezet om het chaotische werken van de vorige keer in banen te leiden met dat drietal aanwijzingen.
Maar hoe werkt Kik ermee?

'Die half (in $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}$ =) moet ik buiten haakjes brengen, want voor k^2 moet altijd niks staan', vertelt ze me. 'Die half is het zogenaamde *grootste getal*, zegt de meester.'
'Grootste getal?'
'Ja, of gemene getal of zo iets...'
'Misschien heeft hij wel gezegd *het getal, dat ze gemeenschappelijk hebben*?'
'Ja, dat was het', zegt ze lauw.

Het woord 'grootste gemeenschappelijke factor' is maar gedeeltelijk blijven hangen. Ze begrijpt niet wat ermee bedoeld is. Het woord heeft in ieder geval geen binding met haar werkwijze, want ze ontbindt:
$\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2})$.

Voor ik kan ingrijpen, doet ze iets wat ze bij elke opgave zal blijken te doen: ze controleert door uit de gevonden vorm $\frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2})$ de haakjes weg te werken om zo de oorspronkelijke vorm weer te vinden. De 'weg-terug'-strategie.

'Dat kan niet, want dan zou het $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}$ zijn in plaats van $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}$. Het moet 1 zijn, omdat $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.'
En zo vindt ze de tussenoplossing: $\frac{1}{2}(k^2 - 1)$.

'Kun je nu verder?'
Op haar kladblad schrijft Kik een mogelijke ontbinding: $\frac{1}{2}(k-1)(k+1)$ en werkt de haken weg: $(k-1)(k+1) = k^2 - k + k - 1$.
'Nee, dat klopt niet, er had $2k$ moeten komen' (in plaats van $-k + k$, in het midden).
Ze had blijkbaar een bepaald merkwaardig produkt met een dubbel produkt $(a^2 + 2ab + b^2)$ voor ogen.
Ik vraag haar nog eens goed te kijken en dan ziet ze dat $k^2 - k + k - 1 = k^2 - 1$.

Ik praat even met haar over merkwaardige produkten.
'Hoe heb je ze eigenlijk geleerd?'
'Uit mijn hoofd geleerd.'
'Hoe?'
'Gewoon leren.'
'Ja, maar hoe?'
'Nou eerst $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ en daarna $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.'

$6a - 6ab$
Dit is de volgende opgave.
Kik overweegt: 'Het is wel een merkwaardig produkt, maar er staat geen kwadraat in. Buiten haken zetten, dat kan wel' en ze haalt 3 buiten haken: $6a - 6ab = 3(2a - 2ab)$.
Op een kladblaadje gaat ze weer na of het klopt (via de 'weg-terug'-methode).
'Misschien kan er nog wel meer uit?' stel ik voor.
'Ja, natuurlijk: de a', vindt ze: $3a(2 - 2b)$
'En die twee dan?'
'Mag dat dan? Met twee getallen buiten haken – oké, maar met drie??? Ik weet niet of dat wel mag, hoor.'
Maar via haar weg-terug-methode vinden we, dat $2 \cdot 3 \cdot a(1 - b) = 6a - 6ab$. Kik is overtuigd. Drie factoren buiten haken te halen? 'Moet kunnen'.

Tijdens het oefenen verzeilt ze voortdurend in overwegingen of een bewerking wel of niet 'mag'. Met haar weg-terug-methode kan ze echter elk voorstel gemakkelijk verifiëren.
De opgaven werken daardoor als verrassingen. Het lijkt wel of Kik steeds verder het mechanisme, dat in de verschillende opgaven ligt opgesloten, induikt. Ze ontrafelt het door opgaven uit te proberen, waarbij ze

zich vasthoudt aan haar eigen strategie.
Ik had haar misschien moeten vragen zelf wat van dergelijke opgaven te bedenken en te verifiëren.

$x^2 + 6x - 55$ te ontbinden
Kik: 'Met een tabelletje, want we kunnen er niks uithalen – voor de x kwadraat staat niks'. De drie aanwijzingen van de meester gaan we nu doorwerken.
Ze maakt een tabel:

	-55		
-1		$+55$	
$+1$		-55	
-5		$+11$	$+6$
$+5$		-11	-6

Als ze in de tabel de regel '$-5 + 11 + 6$' opschrijft, zeg ik dat de uitkomst er al staat.
Maar toch schrijft ze mechanisch de laatste regel op, om alle mogelijke delers die ze in gedachte heeft, te noteren.

$x^2 + 6x + 9$
Kik: 'Er staat een kwadraat in. Maar die staat alleen (ze bedoelt dat er geen coëfficiënt voor staat), dus dan hoeft er niets buiten haken.' Ze noteert $x^2 + 6x + 9 = (x +\ \ )(x +\ \ )$ en maakt er een 'tabelletjessom' van. Maar deze keer blijft de tabel achterwege.
'Even puzzelen', zegt ze en vult op beide lege plaatsen een 3 in. Op haar kladje vindt ze via de weg-terug dat de vorm klopt.
Ik zeg, dat ze $(x + 3)(x + 3)$ ook zo: $(x + 3)^2$ kan opschrijven. Het is immers een merkwaardig produkt dat ze volgens 'meester's lijstje' direct zou moeten herkennen.

Maar Kik vindt dat maar niks. 'Hierin (en ze wijst naar $(x + 3)(x + 3)$ kan je veel beter werken' (door de deelprodukten al bewegend onder de opgave te vinden). Ze schaart hiermee de merkwaardige produkten onder de 'tabelletjessommen'.

$4a^2 - 12ab + 9b^2$
Kik ziet direct iets bijzonders: 'Dat zijn twee kwadraten, van 2 en van 3'. Ze heeft het 'van zichzelf' om steeds naar kwadraten te zoeken. Ik realiseer me nu pas dat ze dit ook in de vorige opgaven al deed. Ze noteert: $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a\ \ 3b)(2a\ \ 3b)$ en vult in gedachte verzonken de mintekens in voor de $3b$.
Kik: 'Ja, het is goed, want $-3x - 3 = +9$. En het dubbele produkt is ook goed: $2ax - 3b = -6ab$'. Ze schrijft: $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)(2a - 3b)$, maar rekent op het kladje toch nog de weg-terug uit.
'Ik moet het altijd even uitrekenen', verontschuldigt ze zich, 'voor de zekerheid'.

Tenslotte vertelt ze, dat ze drie merkwaardige produkten kent:
1. $(a + b)(a + b)$
2. $(a - b)(a - b)$
3. $(a + b)(a - b)$

En dat ze de drie regels van de meester gebruikt om de volgorde te onthouden hoe je kan werken (buiten haken halen, merkwaardige produkten gebruiken, tabelletjessom maken).

Opvallend is dat ze haar eigen methoden: de 'weg-terug'-strategie en het 'vallen op' kwadraten, niet noemt, terwijl die toch goed in dit soort onderwijs zijn in te passen.

Conferentie OW & OC eind september: Wiskundeleren en Informatietechnologie

Vrijdag 29 september en zaterdag 30 september 1989 organiseert de vakgroep OW & OC een conferentie waarin het leren van Wiskunde geholpen door Informatie Technologie (WIT) centraal staat.
Het is niet bij benadering de eerste bijeenkomst waarin het wiskunde-onderwijs wordt benaderd vanuit de hoek van computers en andere moderne hulpmiddelen. De ontwikkelingen op dit gebied gaan echter snel. Dat rechtvaardigt zeker een momentopname van de stand van de ontwikkelingen, ook dit kalenderjaar.

Niet alleen zal op uitgebreide schaal kennis genomen kunnen worden van beschikbare Nederlandse programmatuur in het cursusjaar 1989/90, ook nieuwtjes uit het buitenland zullen hun weg naar de conferentie vinden. Een discussie over verschillen tussen en overeenkomsten in de visies achter de toepassingen in binnen- en buitenland zal zeker het bedoelde gevolg zijn.

De rol van de computergestuurde beeldplaat zal ook bekeken worden. Op het moment van dit schrijven lijkt dat nog verre toekomst, maar over een half jaar is het misschien al weer goed betaalbaar geworden.
De grafische rekenmachine is een ander onderwerp. Een nieuwe ontwikkeling die gaat in de richting van de leerlingcomputer, eindelijk onafhankelijk van het computerlokaal!

Deze onderwerpen zullen u gebracht worden in plenaire lezingen en demonstraties in groepen. Sommige hiervan in het Engels, vanwege de buitenlandse kopstukken die wij hiervoor willen aantrekken.

We rekenen op zo'n honderdvijftig bezoekers, waarvan tenminste tweederde docenten uit het voortgezet onderwijs. Noteert u vast de data? Nadere aankondigingen volgen nog.

Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen

De vier vakgroepen:
- Didactiek van de Natuurkunde
- Chemiedidactiek
- Didactiek van de Biologie
- Onderzoek Wiskundeonderwijs & Onderwijs Computercentrum (OW & OC)

van de Rijksuniversiteit te Utrecht hebben besloten per 1 januari 1989 een samenwerkingsverband aan te gaan waarvoor als naam gekozen is:

CENTRUM voor DIDACTIEK van WISKUNDE en NATUURWETENSCHAPPEN
(Centre for Science and Mathematics Education)

Binnen het centrum – in de wandeling ook wel CD-β genoemd – zal worden samengewerkt op het gebied van onderzoek, onderwijs en lerarenopleiding.
In het centrum zijn twee voorwaardelijk gefinancierde onderzoeksprogramma's ondergebracht. Eén op het terrein van de wiskundedidactiek en één op gebied van de didactiek der natuurwetenschappen, waarin het terrein van basisonderwijs tot en met universitair onderwijs wordt bestreken.
Ook onderwijsontwikkelingsprojecten onder andere op het terrein van rekenen en wiskundeonderwijs en op dat van natuurkunde en van natuur en milieu educatie zijn hier ondergebracht.
In samenwerking met het Pedagogisch Didactisch Instituut wordt een gezamenlijke eerstegraadslerarenopleiding in de exacte vakken verzorgd.

Het is de bedoeling dat de vakgroepen, die ieder gelieerd blijven aan hun eigen faculteit aanvankelijk als redelijk zelfstandige groepen binnen het Centrum zullen optreden, maar dat op termijn gestreefd wordt naar verdere integratie.

De vakgroep OW & OC blijft voor u bereikbaar op het vertrouwde adres: Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht en het telefoonnummer 030-611611.