Dynamiek in de ruimte

H. van der Kooij
Strabrecht College, Geldrop

Samenvatting

Ruimtemeetkunde dient het ruimtelijk inzicht bij leerlingen te vergroten. Dat klinkt mooi, maar daarmee is nog niet vastgesteld hoe dat doel bereikt kan worden. Veel leerlingen blijken bang te zijn om zich een probleem in gedachten ruimtelijk voor te stellen en er eens omheen te wandelen. Het gebruik van de computer en het dynamisch beschrijven van ruimtelijke lichamen lijken aardige hulpmiddelen te zijn om die angsten te overwinnen en het ruimtelijk verkennen van problemen te stimuleren. Een HAWEX-bericht.

Vectormeetkunde versus Ruimtemeetkunde

Toezicht houden bij het examen of schoolonderzoek is voor docenten een verplicht, maar vervelend onderdeel van hun werk. Het is ook niet echt leuk om je tijd te vullen met het opletten of leerlingen misschien een of ander regeltje overtreden. De gezichten van de surveillanten staan bij het verlaten van de examenzaal meestal niet zo vrolijk.
Een gunstige uitzondering daarop maakte ik mee bij ons eerste schoolonderzoek Ruimtemeetkunde. Een docent die twee uur achtereen had gesurveilleerd, kwam zeer enthousiast vertellen hoe hij had genoten van het kijken naar de leerlingen. Normaal zitten de leerlingen bij wiskunde ingespannen, voorovergebogen, bijna voortdurend te schrijven. Bij Ruimtemeetkunde waren ze echter een flink deel van de tijd in een soort trance. Ontspannen achteroverleunend, met gesloten ogen of de blik op oneindig, maakten ze de meest vreemde hand- en armbewegingen. Af en toe ontwaakten ze en schreven dan wat op.

Een van de opgaven die ze kregen voorgeschoteld:

Van een blok ABCD.EFGH zijn de hoekpunten in een $Oxyz$-stelsel gegeven door:
A(0,−2,2), B(0,0,0), C(0,2,2), D(0,0,4), E(3,−2,2), F(3,0,0), G(3,2,2), H(3,0,4).

a. Construeer in figuur 2 (werkblad 2) de doorsnede van het blok met het vlak $x + z = 3$.

b. In het punt (0,0,6) bevindt zich een lichtbron L.
L veroorzaakt een schaduw van het blok op het vlak $z = 0$.
Teken die schaduw in figuur 3.
Bereken ook de oppervlakte van de schaduw.

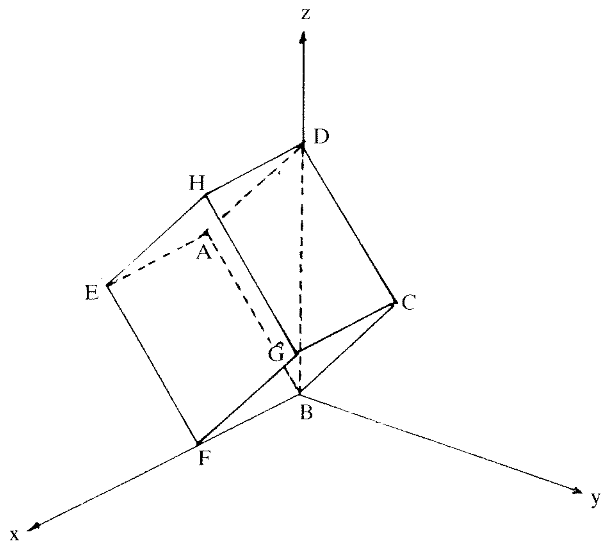


fig. 1

c. Beschouw het vlak $z = 0$ als tafelblad.
Het blok wordt gekanteld om de ribbe FB tot het met vlak FBCG op de tafel rust. De kantelrichting hierbij is rechtsom, gezien vanuit een punt op de positieve x-as.
Vervolgens wordt het blok nog enkele malen rechtsom gekanteld, tot het weer met vlak FBCG op het tafelblad ligt.
Daarbij blijft bij elke kanteling één ribbe op zijn plaats op het tafelblad.
Teken in het Oyz-vlak (figuur 4) nauwkeurig de baan die het punt A vanuit zijn oorspronkelijke positie beschrijft.

Kennelijk is voor beantwoording van dit soort opgaven meer nodig dan alleen het tonen van rekenvaardigheid en het beheersen van formules.
Terzijde: dit vraagstuk zou zeker geschikt zijn als examenopgave in de nieuwe opzet van wiskunde B op de havo.

Zulk 'mystiek' gedrag heb ik nooit opgemerkt als havo-leerlingen tijdens het examen bezig waren met een opgave over vectormeetkunde. Niet zo verwonderlijk, want bij die opgaven moet gerekend worden met en vanuit formules.
Hoewel... Er zijn (heel af en toe) examenopgaven die met een beetje ruimtelijk voorstellingsvermogen en beheersing van wat vlakke meetkunde zijn op te lossen.
Eén van de spaarzame voorbeelden daarvan is het volgende vraagstuk. (Havo-examen 1984, 1e zitting).

1. In R_3 zijn ten opzichte van een rechthoekig stelsel $Oxyz$ gegeven de punten $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Deze punten zijn hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$.
Het punt P ligt op de ribbe DG zo dat $DP = 1$.
Het punt Q is het midden van de ribbe OC.

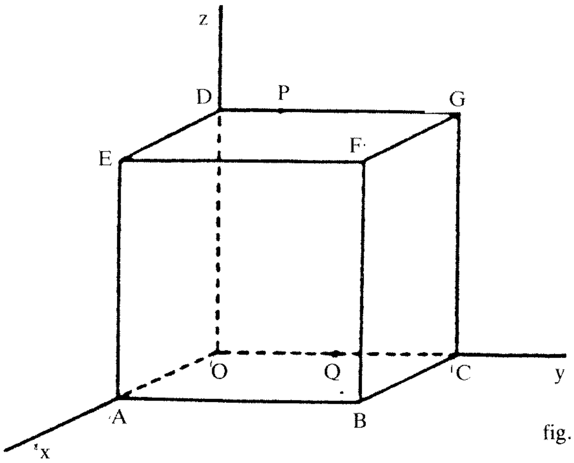
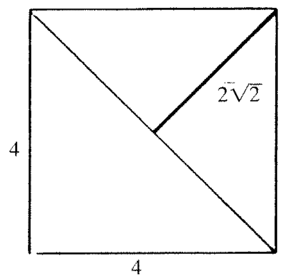


fig. 2

a. Bereken de afstand van P en het vlak OCF.
b. Stel een vectorvoorstelling op van de snijlijn van de vlakken EPQ en AOD.
c. R is een punt op de x-as:
de lijn PR snijdt de lijn EQ in S.
Bereken de lengte van het lijnstuk RS.

Volgens het correctievoorschrift moet dit vraagstuk natuurlijk met algebraïsche methoden worden aangepakt: vectorvoorstellingen van lijnen, vergelijkingen van vlakken en variabele punten op de x-as.
Meetkundig beschouwd is het een vrij eenvoudig vraagstuk.
Onderdeel a is, van opzij bekeken, triviaal.



d(P, OCF) $= 2\sqrt{2}$.

fig. 3

De onderdelen b en c komen samen in dit plaatje. (Zie figuur 4.)

Vlak EPQ gaat door T(4,1,0) en snijdt de x-as dus in R(8,0,0). Dit moet het punt zijn dat bij c wordt bedoeld, want PR en EQ snijden elkaar en moeten dus in één vlak liggen.
Vanuit gelijkvormigheid ($\Delta PES \sim \Delta RQS$) volgt
$RS = \frac{2}{3}RP = 6$.

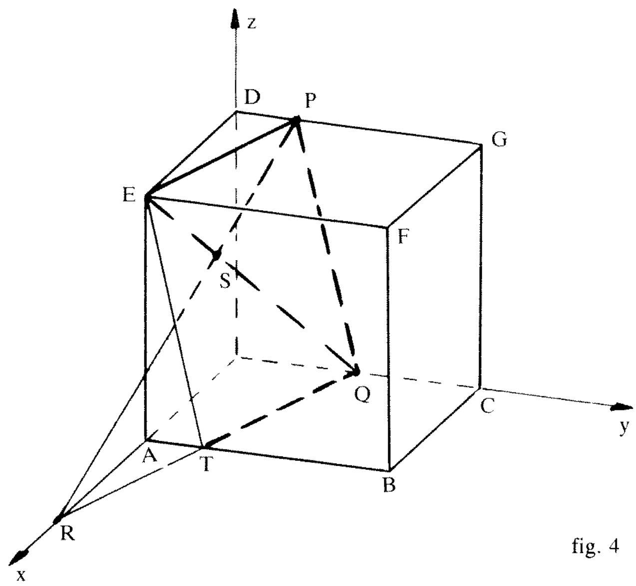


fig. 4

Deze manier van oplossen heeft geen van mijn leerlingen indertijd gebruikt. Dat is niet zo verbazingwekkend, want een dergelijke aanpak werd door mij toen (nog) niet gepropageerd. In de leerboeken wordt meetkundig bezig zijn te summier aan de orde gesteld en veel te snel ingewisseld voor de formulegerichte, algebraïsche aanpak.
Dit wordt nog eens extra gestimuleerd door het karakter van de examenopgaven over vectormeetkunde. Het genoemde voorbeeld uit 1984 was een echte uitzondering. Bij vrijwel alle andere vraagstukken is een meetkundige oplossing niet mogelijk.

Het ligt in de bedoeling om het onderwerp Ruimtemeetkunde ook op de havo een vulling te geven met sterk meetkundige accenten.
Een citaat uit het Havo-rapport:

"RUIMTEMEETKUNDE

De meetkunde van het huidige HAVO-bovenbouwprogramma heeft een sterk algebraïsch-analytisch karakter. De HAVO-leerling mist daarbij in het algemeen de meetkunde-ondergrond om de methoden van de zogenaamde vectormeetkunde te integreren in een meetkundige aanpak die mede gebaseerd is op ruimtelijk voorstellingsvermogen. De werkgroep vindt daarom dat bij de ruimtemeetkunde bij wiskunde HB meer nadruk zal moeten liggen op het ontwikkelen van ruimte-inzicht, waarbij de vectormeetkunde een van de middelen zal kunnen zijn en niet langer een doel op zichzelf. De leerling zal worden geconfronteerd met opgaven waarin hij gedwongen wordt zich een ruimtelijke voorstelling te maken.
De werkgroep acht het voor de begripsvorming van belang dat meetkundige onderwerpen worden toegelicht met voorbeelden uit de praktijk."

Uitspreken dat een hoge prioriteit toegekend moet worden aan het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht, is niet zo moeilijk. Precies omschrijven wat daaronder verstaan moet worden, is al veel lastiger. Wellicht is de vaagheid van het begrip er de oorzaak van dat het zo moeilijk is om leerlingen ruimtelijk inzicht bij te brengen. Een niet gering deel van de leerlingen verschuilt zich (uit angst?) lange tijd achter de verzuchting 'ik zie het nou eenmaal niet.'

Een standaardrecept voor de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht bestaat niet. Een noodzakelijk ingrediënt is in ieder geval dat de leerlingen veel situaties krijgen voorgeschoteld, waarin ze worden gedwongen om het probleem ook eens vanuit een ander gezichtspunt te bezien. Zeker in de beginfase zijn daarbij concrete ruimtelijke objecten, zoals draadmodellen, onmisbaar.
In een later stadium zijn vragen van het volgende type nuttig.

De lijnen l en m kruisen. Zijn AB en CD evenwijdig?

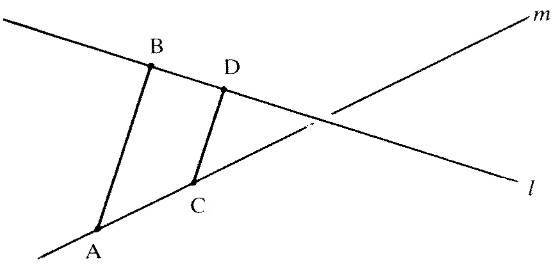


fig. 5

Natuurlijk zijn er fraaie beschouwingen te geven, gebaseerd op meetkundige wetmatigheden, waarmee de evenwijdigheid van tafel kan worden geveegd. Toch vind ik deze oplossing veel mooier.
Bekijk de situatie in de richting van lijn l. Dan zie je zo iets:

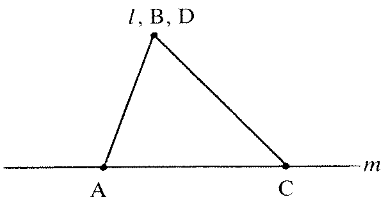


fig. 6

Bij een tafeltje is pootje A te kort. Om het wiebelen van het tafeltje op te heffen, worden onder één van de pootjes bierviltjes gelegd.
Bij welk pootje heb je de minste viltjes nodig: onder A of onder C?

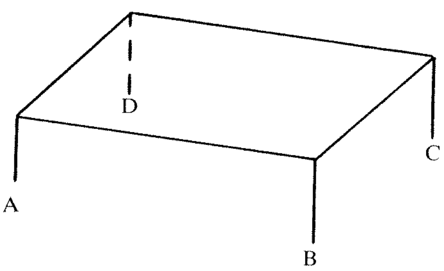


fig. 7

Bekeken in de richting BD is het probleem 'plat' te maken:

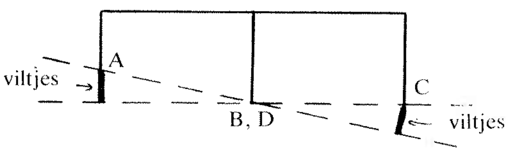


fig. 8

Deze vraag, gesteld bij een proefwerk in 5 vwo, werd door een bevredigend aantal leerlingen op deze manier aangepakt. Het is jammer dat de meesten daarna blijven steken, omdat de vlakke meetkunde onvoldoende beheerst wordt.

Ruimtemeetkunde bij HAWEX

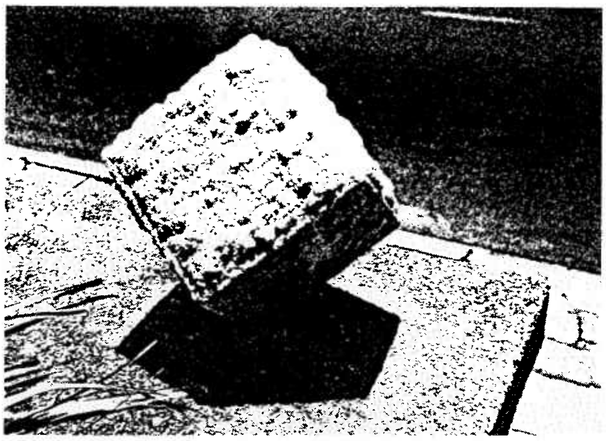
Bij de invulling van het onderdeel Ruimtemeetkunde op de havo krijgt het begrip 'dynamiek' een sleutelpositie.
Met een aantal voorbeelden uit de teksten die tot nu toe in de klas zijn geweest, willen we hiervan een indruk geven.

Kijken naar ruimtelijke vormen

Onder deze titel worden in het eerste, oriënterende, hoofdstuk een aantal foto's en tekeningen aan de leerlingen voorgelegd, waarbij hen wordt gevraagd om zich in de ruimtelijke situatie te verdiepen.

4 a De muren van deze kerk staan keurig loodrecht op de grond.
De foto geeft een vertekend beeld. Waaraan kun je dat zien?
b Van boven gezien is de kerk een regelmatige veelhoek.
Welke veelhoeken zouden dat kunnen zijn?
c Als je over het pad de hoofdingang nadert, zie je steeds minder van de zijmuren.
Leg dat uit.
d De foto is genomen vanaf een plaats recht tegenover de hoofdingang op een behoorlijke afstand. Daardoor krijg je een goed zicht op de twee zijmuren.
Is het mogelijk vanuit dat standpunt, dus met deze foto, te beslissen wat voor regelmatige veelhoek het grondpatroon van de kerk vormt?

Een handig hulpmiddel bij de beantwoording van de onderdelen b en c is het bovenaanzicht.



5 a De schaduw van deze kubus is maar gedeeltelijk te zien. Hoe verloopt de schaduw 'achter' de kubus?
Opmerking: Heel veel ruimtelijke problemen zijn gemakkelijker op te lossen, als je gebruik maakt van modellen.
Desnoods maak je ze zelf.
b Maak een schets van de kubus, gezien uit de richting van de zonnestralen, zodat je hiermee de vorm van de schaduw kunt verklaren.

Door de stand van de zon en de stand van de kubus te veranderen, kun je de schaduw een andere vorm geven.

c Is het mogelijk een vijfhoekige schaduw te krijgen?
b Bij welke stand van de zon en van de kubus is de schaduw een vierkant, waarvan de zijde gelijk is aan 1, aangenomen dat die ribbe van de kubus 1 is?
e Ontwerp een situatie waarbij de schaduw een vierkant is met zijde $\sqrt{2}$.

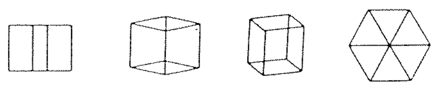
Zonder concrete draadmodellen is deze opgave, zeker in dit beginstadium, niet te maken. Aan de hand van draadmodellen is met dit vraagstuk gemakkelijk een heel lesuur te vullen, waarbij de leerlingen zeer actief en enthousiast bezig zijn om een kubus in alle mogelijke standen te onderzoeken.

Ruimtemeetkunde op de computer

Voor het vwo is door Heleen Verhage samen met Martin Kindt een practicum Ruimtemeetkunde op de micro ontwikkeld. Een uitvoerige beschrijving daarvan is gepubliceerd in de Nieuwe Wiskrant (jrg. 6, nrs. 2 en 3).
Een aangepaste en uitgebreide versie daarvan in LOGO is gebruikt om ook de havo-leerlingen iets van de dynamiek te laten proeven.

Een mooi voorbeeld uit het practicum:
Op het scherm staat, in vooraanzicht, een kubus getekend, met middelpunt in O en ribben parallel met de coördinaat-assen.

13. Hoe moet je de kubus draaien om de volgende plaatjes te krijgen?
Je kunt met de opdracht TEKEN DRAAI: KUBUS2 [......] werken.



Om x-as:
Om y-as:
Om z-as:

fig. 9

Voor een paar leerlingen bleek het nog nodig om de draadmodellen ter hand te nemen, want bij die rare plaatjes konden ze zich geen kubus voorstellen.
De meeste leerlingen konden het wel zonder de modellen. Starend naar het vierkant op het scherm, de handen uitgestrekt voor het lichaam, alsof ze een kubus bij de zijvlakken vasthielden, begonnen ze in allerlei richtingen draaibewegingen te maken. De resultaten van die fysieke inspanningen werden vertaald naar commando's voor de computer, waarna als beloning, meestal na een paar probeersels, het goede plaatje op het scherm verscheen.

Kennelijk is het bezig zijn op de computer erg nuttig voor beeldvorming. In een nabespreking van het practicum vroeg ik of ze in staat waren om precies te bepalen over welke hoek gedraaid moet worden om dit plaatje te krijgen:

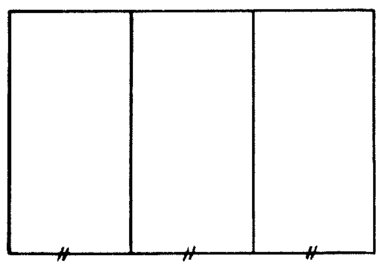


fig. 10

Dat probleem werd door een vrij groot aantal leerlingen meteen vertaald in een bovenaanzicht, waarbij lijn l het beeldscherm van de computer voorstelt.

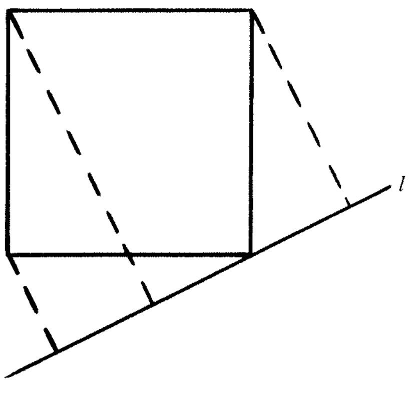


fig. 11

Opvallend was ook nu weer dat de laatste stap van de oplossing (het bepalen van de draaihoek) de meeste problemen gaf, terwijl dat 'slechts' een probleempje uit de vlakke meetkunde is.
In het oorspronkelijke practicum was het al mogelijk om ruimtelijke lichamen op te bouwen door een geschikt lijnstuk om een van de assen te draaien.

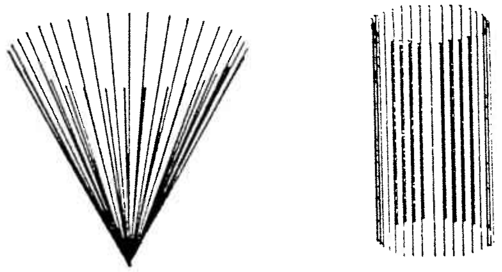


fig. 12

In de LOGO-versie is daaraan toegevoegd de mogelijkheid om een gegeven figuur in een gekozen richting te verschuiven, indien gewenst gekoppeld aan een vergroting of verkleining van de figuur.
Met deze opties is een aantal bekende ruimtelijke lichamen dynamisch op te bouwen:

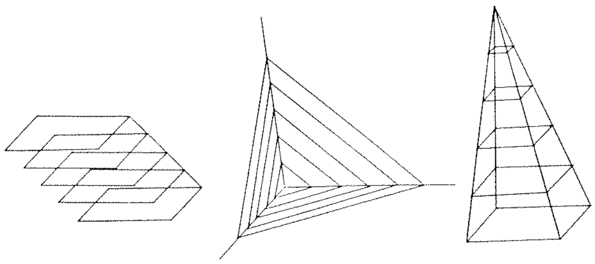


fig. 13

Dynamische definities van lichamen

Uit een oud meetkundeboek komt de volgende definitie:

"Een prisma is een lichaam begrensd door enige vlakken, die elkaar volgens evenwijdige lijnen snijden, en twee evenwijdige vlakken."

Het is een saaie, statische en (daarom?) nietszeggende beschrijving, waarbij moeilijk een ruimtelijk beeld is te vormen.
Heel anders is dat bij het volgende recept:

"Een prisma ontstaat door een veelhoek evenwijdig aan de beginstand langs een lijn te verschuiven."

Zo'n lichaam zie je ontstaan op het moment dat je een veelhoek hebt gekozen en een schuifrichting hebt bepaald. Ondersteund door het practicum kan de leerling zich, ook in gedachten, een tastbaar beeld vormen van een prisma.
Een zelfde soort omschrijving is bruikbaar voor piramiden. De enige extra eis die gesteld moet worden is dat de oorspronkelijke figuur lineair inkrimpt.

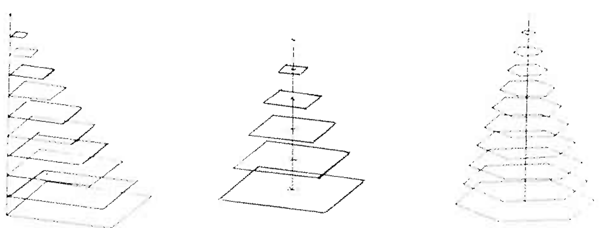


fig. 14

In de opgaven wordt natuurlijk ingehaakt op de dynamische opbouw.

3. $T.ABC$ is een driezijdige piramide.
TS is de lijn door T loodrecht op het grondvlak (I).
$TP = PQ = QS$.
Door P en Q gaan de tussendriehoeken II en III.

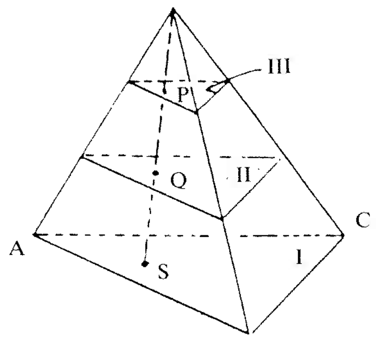


fig. 15

> Hoe verhouden zich de oppervlakten van III, II en I?

Piramiden van met aardnoten gevulde zakken in de haven van Lagos (Nigeria).

9 Gegeven een regelmatige piramide $T.ABCD$ met $AB = 18$ en hoogte $TS = 10$.
Het vlak evenwijdig aan het grondvlak op hoogte h snijdt TA in P en TS in Q.

a Druk de lengte van PQ uit in h.
b Dat zelfde vlak snijdt TB in R. Druk de lengte van PR uit in h.
c Welk verband bestaat er tussen de lengten van PQ en PR?
d Over de top van de piramide laat men horizontaal een dunne ring zakken met een diameter van 10.
Op welke hoogte blijft die ring liggen?

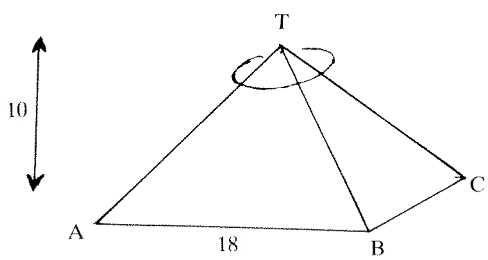


fig. 16

Ook de inhoud van een piramide ligt bij deze opzet voor het grijpen.
Een kubus ABCD.EFGH is te verzagen in drie congruente piramiden H.ABCD, H.ABFE en H.BCGF. Dus geldt: Inhoud (H.ABCD) $= \frac{1}{3}a^3$.

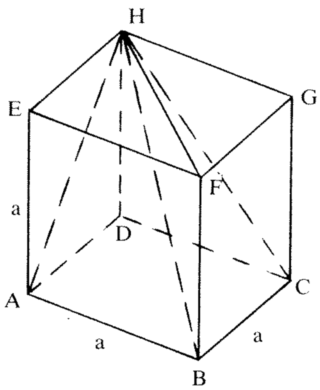


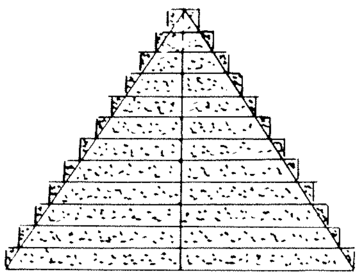
fig. 17

Vanuit dit speciale geval van de formule:

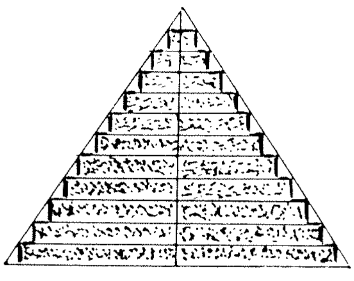
Inhoud $= \frac{1}{3} \times$ hoogte $\times$ grondvlak

kan op de volgende manier de formule voor het algemene geval worden afgeleid. De inhoud van een piramide is te benaderen met behulp van trappen piramiden.

De trappenpiramide is een stapeltje van dunne plakjes die elk de vorm van een recht prisma hebben. De som van de inhouden van alle plakjes is een benadering van de inhoud van de 'echte' piramide.
Als de trappenpiramide een 'buitentrap' is, is de benadering te groot, bij een 'binnentrap' is de benadering te klein.



Dwarsdoorsnede van piramide met buitentrap.



Dwarsdoorsnede van piramide met binnentrap.

fig. 18

Door de plakjes steeds dunner te maken, wordt de inhoud van de echte piramide steeds vaster ingeklemd tussen twee elkaar naderende waarden. Dat de inhouden van twee piramiden met gelijke hoogte zich verhouden als de oppervlakten van hun grondvlak is gemakkelijk te begrijpen met onderstaande plaatjes.

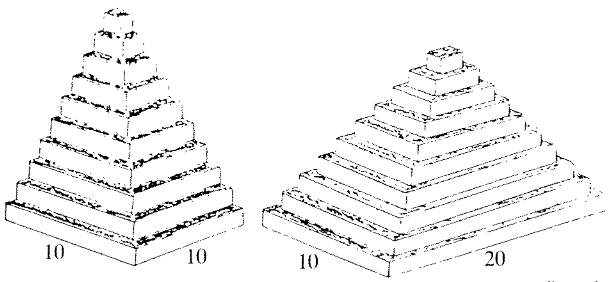


fig. 19

Voordat de algemene geldigheid van de formule:

Inhoud $= \frac{1}{3} \times$ hoogte $\times$ grondvlak

bekrachtigd kan worden, moet nog één probleem de wereld uitgeholpen worden.
Bij de piramiden waarvoor deze formule al bleek te kloppen, lag de top namelijk steeds loodrecht boven één van de hoekpunten van het grondvlak.

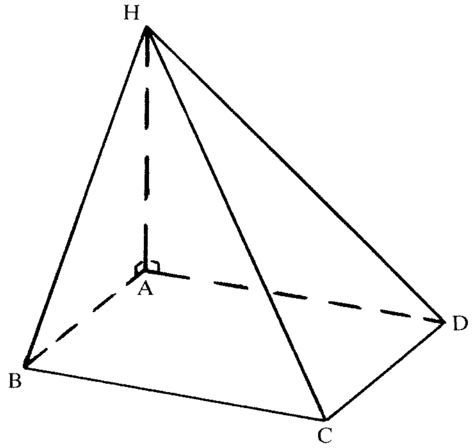


fig. 20

Maar wat gebeurt er met de inhoud als die top zomaar ergens anders gekozen wordt. Zijn bovenstaande piramide en de hieronder volgende, waarbij het grondvlak hetzelfde is en de top H ook op dezelfde hoogte ligt als T, inhoudelijk vergelijkbaar?

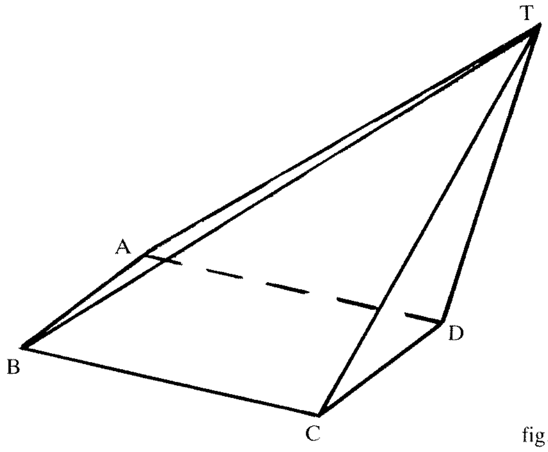


fig. 21

In een klassegesprek wordt al snel duidelijk (steunend op het idee van de trappenpiramiden), dat dit probleem terug te brengen is op de vraag of op elk niveau de tussenvlakken bij beide piramiden gelijk zijn.
Met bovenaanzichten en gebruikmakend van evenwijdigheden is aan te tonen dat dit inderdaad het geval is.

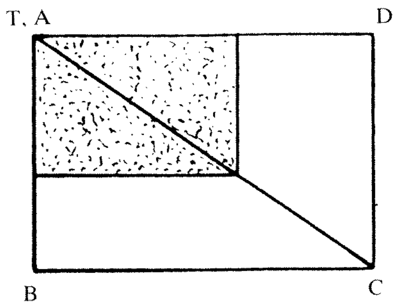
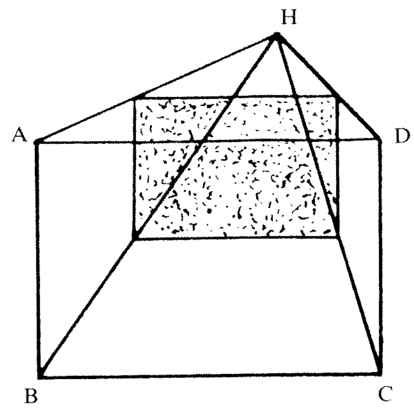


fig. 22



Al met al vroeg dit laatste probleem een flink stuk lestijd. Dat was beslist niet erg, omdat er een aantal zinvolle aspecten van de ruimtemeetkunde aan de orde kwamen.
Echt leuk werd het eigenlijk pas toen een leerling na afloop opmerkte dat ik het zo overbodig moeilijk had gedaan. Immers: zowel piramide T.ABCD als piramide H.ABCD ontstaan door een zelfde rechthoek ABCD over een zelfde hoogte te verschuiven met gelijktijdige lineaire inkrimping. Dus het is nogal vanzelfsprekend dat op ieder niveau de tussenvlakken bij beide piramiden identiek zijn.

Uit deze opmerking blijkt hoe goed het idee van de dynamische opbouw van ruimtelijke figuren in de praktijk kan functioneren.

Hewlett-Packard introduceert de nieuwe generatie wetenschappelijke rekenmachines

De kloof tussen zakrekenmachine en personal computer wordt steeds kleiner. Dat wordt onmiskenbaar aangetoond in de nieuwe HP 28S Advanced Scientific Calculator en de daarvan afgeleide HP 27S Scientific Calculator. Niet alleen door een geheugenbereik dat nog niet zo lang geleden de maximum prestaties van een PC markeerde, maar ook door uiterst gebruikersvriendelijke programmatuur zoals HP Solve en een volledig menugestuurde bedieningsstructuur.

De HP 28S Advanced Scientific Calculator is uitgevoerd als portefeuillemodel met gescheiden toetsenborden voor de numerieke en de alfabetische invoer. De functietoetsen zijn bij het numerieke gedeelte ondergebracht, de programmering geschiedt op het alfabetisch gedeelte. Het display biedt ruimte aan vier regels tekst, waarvan de onderste kan worden gebruikt voor de definitie van de vrije functietoetsen. Hiermee worden de softkey en menufuncties geïntegreerd. Het display kan ook in zijn geheel voor grafische doeleinden worden gebruikt, waarbij als voor de hand liggende toepassing kan worden gedacht aan grafische weergave van hogere ordevergelijkingen of trigoniometrische functies. De resolutie van het scherm bedraagt 32 × 137 beeldpunten. De programmatuur is opgeslagen in 128 kilobyte onwisbaar geheugen, de gebruiker heeft daarnaast nog de beschikking over 32 kilobyte werkgeheugen voor opslag en zelfgeschreven programma's en tussenresultaten.
Een groot aantal wiskundige functies behoort tot de ingebouwde programmatuur, zoals matrix-, vector- en complexe berekeningen, waarbij gebruik kan worden gemaakt van HP Solve. Met deze programmatuur wordt aan variabelen een naam of 'label' toegekend en wordt de berekening in symbolische vorm beschreven. De variabelen kunnen dan steeds onder naam of label worden ingevoerd. In het rekenvoorbeeld 'Kracht ×Weg = Arbeid' wordt na het invoeren van 'Arbeid = 12 en Kracht = 21' automatisch weergegeven dat in zulk een geval de weg 0,571428571 lang was.

De iets eenvoudiger HP 27S Scientific Calculator is afgeleid van de Advanced Scientific Calculator en heeft alleen een numeriek toetsenbord. Het display is tweeregelig en het gebruikersgeheugen heeft een omvang van 6,7 kilobyte. De ingebouwde functies zijn ten opzichte van de 28S Advanced Scientific Calculator iets aangepast in de richting van zakelijk gebruik. Er is voorzien in extrapolatie van lineaire, logarithmische en exponentiële functies, berekening van afschrijving en een time management support met agenda, klok en afspraak alert ('wekker').
Ook de HP 27S Scientific Calculator beschikt over HP Solve en een menugestuurde bediening. Beide calculators zijn voorzien van een infrarood interface waarmee ze draadloos aan een printer kunnen worden gekoppeld. Met een maximale werkafstand van 50 cm biedt deze koppeling enerzijds voldoende bewegingsvrijheid en anderzijds een minimale overspraak naar andere infrarood gekoppelde apparatuur.

De foto van deze rekenmachine staat afgebeeld op pag. 40.