

Integraalrekening en metacognitie

E.M. Koerts / W. van Oranje College, Waalwijk
P.R.J. Simons / Katholieke Universiteit Brabant

Samenvatting

Metacognitie is een kernbegrip geworden in de onderwijspsychologie. De strekking van dit artikel is dat de didactiek van de wiskunde, de lerarenopleiding en de wiskundeleraar niet om dit begrip heen kunnen. Theoretisch kan het ons helpen leerproblemen beter te begrijpen; praktisch kan het ons helpen leerlingen met wiskundeproblemen beter te begeleiden.

De opbouw van dit artikel is als volgt. Eerst bespreken we het begrip cognitie. Vervolgens bespreken we het begrip metacognitie en tenslotte illustreren we de toepassing van dat begrip bij de integraalrekening.

Cognitie

Het woord cognitief heeft bij sommigen een onaangename klank. Het wordt dan in verband gebracht met intellectualistisch. De strijd tegen de cognitieve school moet gestreden worden ten gunste van de welzijns-school. Cognitief leren wordt afgezet tegen sociaal leren. Over een dergelijke opvatting van het begrip cognitief gaat het hier *niet*.

In de cognitieve psychologie wordt onder cognitie iets anders verstaan. Het leerproces kan niet bestudeerd worden volgens het input – output model. Voor wiskundigen spreekt dit waarschijnlijk vanzelf. Niemand zal tevreden zijn met het volgende gesprek: (input) de wortel uit 16 is ... (output) 8, ... nee, 4.

Leren heeft ook niet alleen te maken met denken, maar ook met willen en voelen. De cognitieve psychologie onderzoekt vooral de vraag hoe de leerling omgaat met de leerstof.

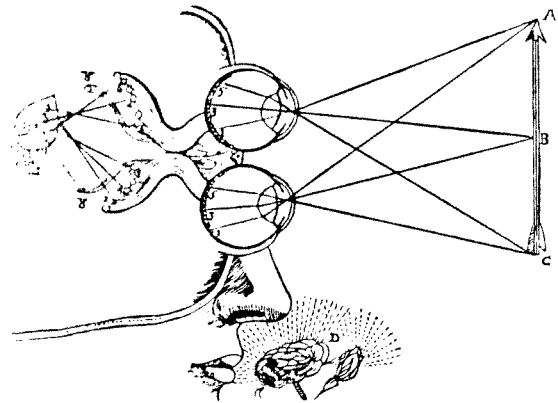
We beperken ons nu tot de cognitieve psychologie en de daar bedoelde opvatting van cognitie. Als 'instap-probleem' bij de vraag naar de denkbeelden van de cognitieve psychologie nemen we het verschijnsel 'onmogelijke figuren'.

De nieuwe ruimtemeetkunde wordt in moderne schoolboeken nogal eens geïntroduceerd via 'onmogelijke figuren' (verder O.F.). We zien dat bijvoorbeeld in de Wageningse methode en in Wiskundelijn.

Sinds Escher is de wereld goed op de hoogte van deze O.F., schrijft Gerrit Krol. Wiskundigen en fysici hebben Escher 'ontdekt' en niet kunstkenner. Mathematen vonden in zijn werk illustraties voor problemen en paradoxen die het voorstellingsvermogen te boven gaan. Onder andere Bruno Ernst heeft zich uitvoerig

beziggehouden met de wiskundige achtergronden van het werk van Escher. Hij schrijft zelfs een heel hoofdstuk over 'zien als informatieverwerking'.

Dat hoofdstuk is een mooi stuk cognitieve psychologie. Hij begint met te stellen dat O.F. geen objecten zijn die men letterlijk kan hanteren; ze ontstaan in ons brein. En vervolgens merkt hij op dat de waarnemer zich er bewust van wordt dat er iets in zijn hersenen gebeurt, omdat de waarneming bij dit soort figuren een niet alledaags verloop vertoont.

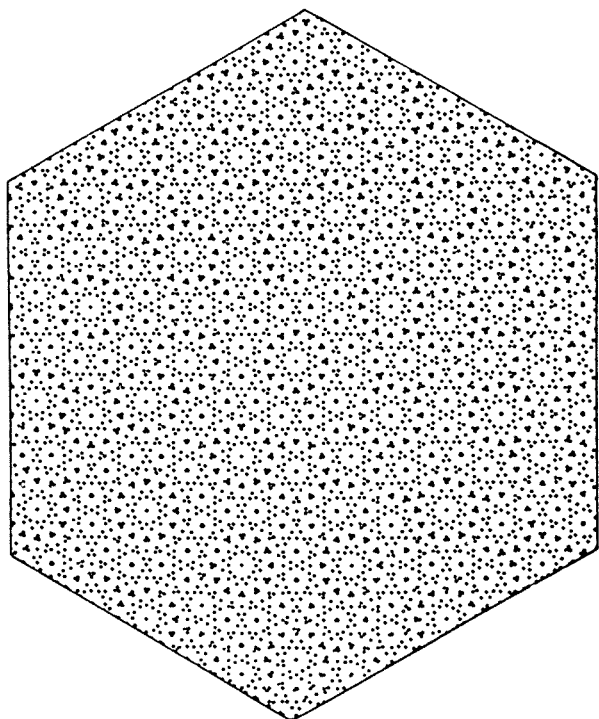


Illustratie uit Descartes' 'Le traité de l'homme, 1664.

Gerrit Krol karakteriseert het onmogelijke van deze figuren als volgt: "Een tekening staat ons toe – dwingt ons soms – hetzelfde ding op twee elkaar uitsluitende manieren te zien. Een tekening kan dat, de werkelijkheid kan dat niet. En wij, interpreterend, kunnen dat ook niet." Hiermee zijn de basiselementen van de cognitieve psychologie geschetst.

Waarnemingen zijn mentale representaties (ontstaan in ons brein); waarnemingen worden bemiddeld door mentale, cognitieve processen (er gebeurt iets in onze hersenen); mentale representaties worden geconstrueerd (wij interpreteren).

Gerrit Krol noemt zijn boek *'Helmholtz' paradys*. Helmholtz was de eerste die aannemelijk trachtte te maken dat het menselijk brein in de waarneming *'actief'* is en dat het brein uit de reeksen van onvolmaakte signalen die via het oog binnenkomen, een coherente en *'rijke'* representatie van de wereld reconstrueert (van Hezewijk, 1987). Het gaat in de cognitieve psychologie om de studie van interne verwerkingsprocessen. Volgens de cognitivisten krijgt de informatie uit de omgeving pas *betekenis* als gevolg van cognitieve verwerking (de Gelder, 1987).



Penseeltekening uit de *'Mustard Seed Garden Manual of Painting'*, 1679-1701.

Ook deze noties vinden we in het eerder vermelde hoofdstuk van Bruno Ernst. Hij geeft het volgende commentaar op een tekening met steeds wisselende cirkelpatronen: "Het is alsof hier een *innerlijke* visuele *activiteit* direct voelbaar is." En de mens-als-betekenisverlener wordt geïllustreerd met het onderzoek door Reichardt van het visuele vluchtsysteem van de huisvlieg: "We zien hier dat de visuele *input vertaald* wordt in een vorm die de vlieg in staat stelt op adequate wijze op zijn omgeving te reageren." In het slot van zijn artikel geeft Bruno Ernst aan dat bij informatieverwerking een beroep gedaan wordt op *aanwezige voorkennis*; dat er *onbewuste* processen plaatsvinden (verg. het voorbeeld van de huisvlieg) en wijst hij op de computermetafoer. Uit het feit dat computers complexe informatie blijken te kunnen verwerken, werd afgeleid dat onbewust redeneren mogelijk is (van Hezewijk, 1987). Maar het beschouwen van ons brein als een computer houdt niet in dat

we het van zijn menselijke waarden beroven en het houdt geen ontkenning in van menselijke waarden (Marr., 1982).

De boven geschetste theoretische uitgangspunten van de cognitieve psychologie worden niet alleen toegepast op waarnemen, maar ook op:

- hoofdrekenen (Vos, 1984);
- leesproblemen (Stevens & Van der Ley, 1986);
- leren rekenen (Koster, 1984);
- leren probleemoplossen (Resnick & Ford, 1984; Van Streun, 1986; Mayer, 1985).

Vakdidactici uit de exacte hoek lijken vooral aandacht te besteden aan misconcepties – leerlingdenkbeelden over begrippen zoals 'kracht' en 'licht' – en conceptuele ontwikkeling (van bijvoorbeeld het begrip 'enzym'), als we het *'Tijdschrift voor de didactiek der β -wetenschappen'* als maatstaf nemen.

In het project 'Interne Differentiatie wiskunde-onderwijs 12-16' wordt aansluiting gezocht bij cognitivistische theorieën over leren en onderwijzen. Die aansluiting ligt voor de hand vanuit het vertrekpunt bij Van Hiele en Freudenthal, die in cognitieve tradities staan, aldus Dekker, e.a. (1985).

Koerts en Van Rossum (1986) vragen aandacht voor leerconcepties – ideeën van leerlingen over leren – bij het ontwerpen van onderwijsleersituaties. Maar daarmee verlaten we het cognitieve gebied en stappen over naar het metacognitieve.

Metacognitie

Noties over het begrip metacognitie vinden we al bij Dewey (1910), maar pas sinds 1970 is het een veel gebruikt begrip geworden. Er is echter een spraakverwarring ontstaan. Lawson (1984) heeft de verschillende aspecten op een rijtje gezet. Zijn voorbeelden ontleent hij aan de wiskunde. In dit artikel schrijven we over de opvattingen van Lawson gecombineerd met onze eigen onderzoeksresultaten en onze observaties in de klas (vnl. 5 vwo; wiskunde B).

Er bestaat geen algoritme voor het vinden van de primitieve van een functie. Daarom is de integraalrekening waarschijnlijk een van de lastigste onderdelen van de schoolwiskunde. De moeilijkheid kan (mede) verklaard worden met het begrip metacognitie. Maar dit begrip opent ook perspectieven om de instructie te verbeteren.

Eerst moeten we nu ingaan op het begrip metacognitie. We doen dat door overeenkomsten en verschillen te bekijken tussen een huishoudelijke hulp en een leerling die wiskundesommen moet maken, bijvoorbeeld de primitieve van een functie moet vinden. Op het eerste gezicht bestaan er geen overeenkomsten tussen een huishoudelijke hulp en een wiskundeleerling. De *verschillen* daarentegen vallen onmiddellijk op. Inhoudelijk zijn ze met totaal verschillende taken bezig (ramen lappen/sommen maken). Ook de benodigde (cognitieve) vaardigheden zijn nogal verschillend (b.v. motorische vaardigheden versus analyseren en structureren). De vereiste vaardigheden zijn domeingebonden, evenals de benodigde (voor)kennis

om de taak uit te voeren. De hulp hoeft de stelling van Pythagoras niet te kennen en de wiskundeleerling hoeft niet te weten dat je geen ramen moet zemen in de volle zon.

De huishoudelijke hulp en de wiskundeleerling zijn inhoudelijk met verschillende taken bezig waarvoor ongelijksoortige cognitieve vaardigheden vereist zijn. Maar hoe zit dat met de metacognitieve verschillen? Wij beweren dat *dezelfde metacognitieve vaardigheden* nodig zijn om de inhoudelijk verschillende taken waarbij niet dezelfde cognitieve vaardigheden vereist zijn, goed uit te voeren. (Straks preciseren we deze uitspraak).

'Meta' verwijst letterlijk naar 'uitstijgen boven'; naar 'transcendentie'. De term metacognitie verwijst dan naar het denken over het denken, leren, onthouden, enzovoort. We verplaatsen ons van het uitvoeringsniveau waarop cognitieve activiteiten plaatsvinden, naar het metacognitieve niveau. We letten dan niet op *wat* de leerling doet (wiskundig en cognitief-psychologisch), maar op *hoe* hij het doet.

Mieke – uit het eerste geciteerde artikel van Van Streun – memoriseert algoritmische technieken. Leren is voor haar memoriseren hoe iets moet. Mensen blijken verschillende ideeën te hebben over wat leren is en wat onderwijzen is (zie bijvoorbeeld Van Rossum, Deykers, Hamer, 1985).

Dergelijke ideeën vatten we samen met de verzamelterm 'leerconcepties'.

Leerconcepties vormen een deelverzameling van de metacognitieve kennis.

Wat dit betreft behoeven de huishoudelijke hulp en de wiskundeleerling niet verschillend te zijn. Ze kunnen echter ook dezelfde opvatting over leren en werken hebben. Bijvoorbeeld: ik moet alleen doen wat me opgedragen is; of: ik moet zelf verantwoordelijk zijn voor het opgedragen werk. Ze kunnen allebei weten dat ze 'een geheugen als een vergiet' hebben – en dus een boodschappenbriefje nodig hebben – of de een weet het wel en de ander weet het niet (met als mogelijk gevolg dat de een succesvoller zijn taak uitvoert dan de ander).

Metacognitieve kennis is dus de kennis over het eigen functioneren. Metacognitie omvat echter nog een ander aspect, door Simons en Vermunt (1986) regulatievaardigheden genoemd.

Bij de taakuitvoering moet men (zou men moeten) zijn eigen cognitieve processen regelen. Men moet zich oriënteren, men moet plannen, men moet zichzelf controleren (toetsen) en zo nodig bijstellen.

Neem de huishoudelijke hulp. Die komt binnen. Wat zal er vandaag gedaan moeten worden? Moet wel of niet de was gedaan worden? Globale oriëntatie en globale planning is nodig om de taak op tijd af te krijgen. Globale controle is ook nodig alvorens de deur dichtgetrokken wordt: zijn alle taken uitgevoerd?; zijn de ramen dicht? Per taak (de was of de ramen zemen, bijvoorbeeld) begint het zich oriënteren, het plannen en het zichzelf controleren opnieuw. Hoelang gaat het ramen zemen duren? Zijn alle

benodigde hulpmiddelen aanwezig? Wat doe ik eerst? En na het uitvoeren van de taak controleert de goede hulp of er geen strepen op de ramen zitten.

Deze regulatievaardigheden (oriënteren/plannen/controleren) zijn ook vereist bij het oplossen van wiskundesommen. Van Streun (1986) propageert een probleemaanpak in vijf fasen; in leerlingstermen zijn dit: oriënteren – terreinverkennen – een plan maken – aan de slag – terugblik.

Metacognitie is dus een begrip dat twee aspecten omvat:

- a. kennis over het eigen cognitief functioneren;
- b. regulatievaardigheden.

Samen met het uitvoeringsniveau zijn er bij de sturing van leerprocessen en dus bij het oplossen van wiskundeopgaven drie niveau's te onderscheiden:

- uitvoeringsniveau (met cognitieve activiteiten);
- conceptueel niveau (metacognitieve kennis);
- controle-niveau (regulatievaardigheden).

Ondanks grote inhoudelijke taakverschillen tussen een huishoudelijke hulp en een wiskundeleerling; ondanks verschillen op het uitvoeringsniveau; ondanks verschillen of geen verschillen op conceptueel niveau, zijn de taken van huishoudelijke hulp en wiskundeleerling op het controle-niveau dezelfde. Ondanks cognitieve verschillen, hebben metacognitief gezien, de taak van huishoudelijke hulp en wiskundeleerling dezelfde structuur.

We vatten het voorgaande schematisch samen. (De ingevulde voorbeelden zijn tamelijk willekeurig).

| | | wiskundeleerling | huishoudelijke hulp |
|----------------|--------------------|--|---|
| | taak | sommen maken | ramen lappen |
| cognitief | uitvoeringsniveau | cognitieve vaardigheden | motorische vaardigheden |
| meta-cognitief | conceptueel niveau | "ik moet precies leren wat de leraar voordeet" | "ik moet zelfstandig mijn taak uitvoeren" |
| meta-cognitief | controle-niveau | oriënteren plannen controleren | oriënteren plannen controleren |

We passen een en ander nu toe op de integraalrekening. Het vinden van de primitieve van een functie hebben we moeilijk genoemd omdat er geen algoritme voor bestaat, evenmin als voor het opruimen van de garage.

Veronderstel dat de gebruikelijke leerstof behandeld is en dat op de repetitie gevraagd wordt naar:

$$\int \frac{1}{x-1} dx; \int \frac{1}{x^2-1} dx; \int \frac{1}{x^2+1} dx; \int \frac{x}{x^2+1} dx.$$

Te veel leerlingen komen nu in moeilijkheden. Dat is minder het geval wanneer we van te voren deze typen integralen uitdrukkelijk naast elkaar aan de orde stellen en de leerlingen uitleggen waarom ze hier moeilijkheden ondervinden. In dit laatste geval neemt de leraar een taak over van de leerling die hij – als zelfstandig studeren een doel is van de leraar – zelf zou moeten uitvoeren: oriënteren, plannen, controleren.

Oriënteren: Waar ben ik en waar moet ik naar toe? Globaal lijken de vier integralen nogal op elkaar. Toch zijn totaal verschillende oplossingsstrategieën vereist. Welke strategieën ken ik? Waarom kies ik bij deze opgave deze strategie?

Plannen: Hoe pak ik het aan? Stel dat ik besloten heb de integraal $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ uit te rekenen met breuksplitsen. Hoe moet breuksplitsen ook al weer? Welke stappen moet ik uitvoeren? Eerst maar even apart de breuk splitsen en dan verband leggen met de opgave. Eerst:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - B}{x^2-1}$$

dan een conclusie trekken:

$$Ax + A + Bx - B = 1 \text{ voor elke } x$$

$$\text{dus moet } A + B = 0 \text{ en } A - B = 1,$$

tenslotte de integraal uitrekenen.

Controleren: Dit is na oriënteren en plannen de derde regulatievaardigheid. Heb ik de vraag beantwoord? Kan mijn antwoord goed zijn? Naast deze globale controle kan er ook lokale controle plaatsvinden. Bijvoorbeeld bij het bovenvermelde stukje breuksplitsen: begrijp ik dat $A + B = 0$? Peter deed dat daadwerkelijk.

Peter : *Waarom is $A + B = 0$?*

Leraar : *Die 1 is nul keer x plus 1, dus moet $A + B = 0$.*

Peter : *(denkt even na) ...*

Dus als er rechts x stond, was $A + B = 1$.

Leraar : *Inderdaad, x is een keer x plus 0, dus zou $A + B = 1$ en $A - B = 0$.*

Peter controleert (toetst) zijn eigen redenering via een implicatie. Het zou naar onze mening wenselijk zijn dat iedere leerling zo te werk zou gaan.

Ook tijdens een proefwerk wordt wel of niet getoetst. René toetst niet spontaan, maar is er wel toe te brengen. Hij moet de primitieve vinden van $x \cos x$ en komt met twee oplossingen, maar zonder voldoende zelfsturing voert hij zijn taak uit. In een nabespreking komt hij na enig aandringen tot zelfcontrole. Hij schreef het volgende op (zie rechts boven):

De nabespreking verliep als volgt:

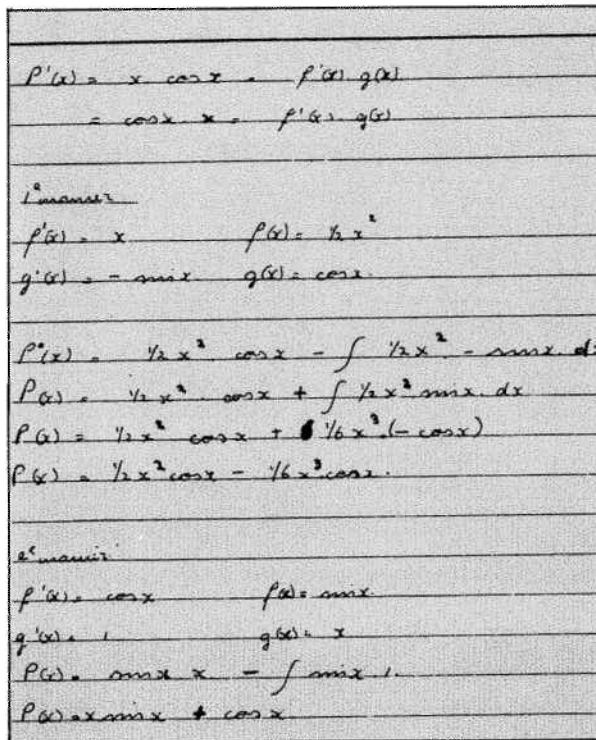
Heb je je niks afgevraagd achteraf?

...

Nou ja, ... De tweede manier gaat vlugger.

Maar vind je het niet vreemd dat er verschillende antwoorden uit komen?

O, ja... best wel stom ja.



We besluiten met het proefwerkresultaat van Katinka. Zij geeft spontaan een stukje 'hardopdenk-protocol' waaruit het regulerend bezig zijn tijdens het oplosproces blijkt. (Om misverstanden te voorkomen - we zeggen natuurlijk niet dat leerlingen die dergelijke verhalen niet opschrijven niet zelfregulerend bezig zijn). Katinka moet de primitieve vinden van de functies gedefinieerd door $f(x) = x \cos x$ en $f(x) = \sin^2 x$. In tegenstelling tot René lijkt zij beter te plannen en te controleren (zie in het proefwerk op volgende pagina).

Bij de tweede opgave geeft zij blijk van een goede oriëntatie (zie het eerste pijltje); van een goede controle (zie het tweede pijltje). Bij de daaropvolgende pijltjes zien we achtereenvolgens een heroriëntatie en opnieuw - tweemaal - een controle. Al met al demonstreert zij dat zelfsturing een rol speelt in het proces van probleemoplossen. Zij beschikt waarschijnlijk over een reflectieve houding (Nelissen, 1987).

Besluit

We hebben laten zien dat het begrip metacognitie ons inzicht in het onderwijsleerproces kan verdiepen. Metacognitie verwijst naar twee logisch te onderscheiden zaken: metacognitieve kennis en regulatievaardigheden. Regulatievaardigheden spelen onder andere een belangrijke rol bij de integraalrekening. Aandacht voor processen zoals oriënteren, plannen en controleren of zelftoetsen kan de kwaliteit van het onderwijs vergroten.

Literatuur

Dekker, R., P. Herfs en J. Terwel (1985): *Contexten en begripsontwikkeling bij wiskunde 12-16*, Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen, 3, 169-182.
 Ernst, Bruno (1986): *Het begoochelde oog*, Meulen-

① De primitieven van $x \cdot \cos x$

② " " " $\sin^2 x$

$$\text{① } P'(x) = x \cdot \cos x = f'(x) \cdot g(x) \quad \text{I}$$

$$\cos x \cdot x = f'(x) \cdot g(x) \quad \text{II}$$

$$\text{I } f'(x) = x \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$g'(x) = -\sin x \quad g(x) = \cos x$$

$$P(x) = f \cdot g - \int f g'$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cos x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot (-\sin x) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cos x + \int \frac{1}{2}x^2 \sin x dx$$

*

maakt niets uit, eerst kijken naar mogelijkheid II

$$\text{II } f'(x) = \cos x \quad f(x) = \sin x$$

$$g'(x) = 1 \quad g(x) = x$$

$$P(x) = f \cdot g - \int f g'$$

$$= \sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1 dx$$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x$$

→ ② $P'(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = f'(x) \cdot g(x)$ (elke functie schrijven in productvorm

→ partiële integratie kan)

$$f'(x) = \sin x \quad f(x) = -\cos x$$

$$g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x$$

$$P(x) = f \cdot g - \int f g'$$

$$= -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x$$

$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x$$

→

Schiet je dus niets mee op want nu moet je de primitieve van $\cos^2 x$ weten

Er is geen mogelijkheid II want om te draaien heeft geen zin

→ Er moet een andere manier zijn. Ju proberen het nu door er een ander product van te maken

$$P'(x) = 1 \cdot \sin^2 x = f'(x) \cdot g(x)$$

$f'(x) = 1$ $f(x) = x$
 $g'(x) = 2 \sin x \cos x$ $g(x) = \sin^2 x$

$P(x) = f \cdot g - \int f g'$
 $= x \sin^2 x - \int x \cdot 2 \sin x \cos x$

→ Dit vereenvoudigt niets

Terug naar de 1^e manier

$P'(x) = \sin^2 x$
 $P(x) = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x$
 $P(x) = -\cos x \sin x + \sin x \cos x + R$
 $0 = 0$

→ Heeft geen zin

$P'(x) = \sin^2 x$
 $P(x) = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x$
 $P(x) = -\cos x \sin x + \int \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$
 $P(x) = -\cos x \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x$
 $P(x) = -\cos x \sin x + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cos x + \frac{1}{2} x$
 $P(x) = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x$

volgens boek met formule $\cos 2x$
 $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$
 $\int \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 2x$
 $\int \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x$

hoff Nederland B.V., Amsterdam (in samenwerking met Museum voor Hedendaagse kunst, Utrecht).

Gelder, B. de (1987): *Wat is er cognitief aan informatieverwerking?* Psychologie & Maatschappij, 40, 259-271.

Hezewijk, R. van (1987): *Schijn en wezen in de perceptie-psychologie. Over cognitieve en ecologische theorieën van menselijke perceptie*, Psychologie & Maatschappij, 40, 243-258.

Koerts, E.M. en E.J. van Rossum (1986): *Leerconcepties en wiskunde B*, Euclides, 62, 25-28.

Koster, K.B. (1984): *Enkele leer- en ontwikkelingstheoretische benaderingen van het leren rekenen*. In P.G. Vos, K. Koster, J. Kingma (red.): *Rekenen Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek*, Swets & Zeitlinger, Lisse.

Krol, G.: *Helmholtz' paradijs, essays over kunst en wetenschap*, Amsterdam, Querido.

Lawson, M.J. (1984): *Being executive about metacognition*. In J.R. Kirby (Ed.): *Cognitive Strategies and educational Performance*, Academic Press, New York.

Marr, D. (1982): *Vision*, Freeman, New York.

Mayer, R.E. (1985): *Mathematical ability*. In R.J. Sternberg (Ed.): *Human Abilities, an information-processing approach*, Freeman, New York.

Nelissen, J.M.C. (1987): *Kinderen leren wiskunde. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*, (dissertatie), De Ruiter, Gorinchem.

Resnick, L.B. en W.W. Ford (1984): *The psychology of mathematics for instruction*, Erlbaum, London.

Rossum, E.J. van, R. Deijkers en R.N. Hamer (1985): *Students' Learning Conceptions and their interpretations of Significant Educational Concepts*, Higher Education, 14, 617-641.

Simons, P.R.J. en J.S.H.M. Vermunt (1986): *Self-regulation in knowledge acquisition: a selection of Dutch research*. In G. Beukhof & R.J. Simons (Eds.): *German and Dutch research on learning and instruction*, SVO, Den Haag.

Streun, A. van (1986): *De rol van representaties bij het oplossen van problemen*, Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen, 4 nr. 1, 38-52.

Stevens, L.M. en A. van der Leij (red.) (1986): *Dyslexie 86*, Swets & Zeitlinger, Lisse.

Vos, P.G. (1984): *De rol van het geheugen in hoofdrekennen*. In P.G. Vos, K. Koster, J. Kingma (red.): *Rekenen Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek*, Swets & Zeitlinger, Lisse.