Een overzicht van buiten over de Hawex (1)

Chr. Hauchart
Universiteit van Leuven, België

"[...] la surprise, le dépaysement, l'éloignement – ces grands moyens de connaissance – ne sont pas moins nécessaires pour comprendre ce qui vous entoure, et de si près que vous ne le voyez même plus. Vivez à Londres une année, et vous connaitrez fort mal l'Angleterre.
Mais, par comparaison, à la lumière de vos étonnements, vous aurez brusquement compris quelques-uns des traits les plus profonds et les plus originaux de la France, ceux que vous ne connaissiez pas à force de les connaître."
F. Braudel. [1]

Sinds enkele jaren werk ik bij de Universiteit van Leuven (België) in een team dat zich bezighoudt met wiskunde-onderwijs (de G.E.M., Groupe d'Enseignement Mathématique). Aan de ene kant vond ik het onontbeerlijk om mijn horizon te verbreden en te kijken hoe anderen in hetzelfde domein werkten, en aan de andere kant was ik nieuwsgierig geworden door wat ik van OW&OC kende. (Teksten van Prof. Freudenthal, de leerstofpakketjes van het Hewet-project en enkele ontmoetingen.) Vandaar dat ik een jaar geleden op de deur van het OW&OC heb geklopt om te vragen of medewerking mogelijk was.

Zo ben ik dus in september 1987 in het HAWEX-project ingescheept. In dit artikel leg ik eerst uit waar ik vandaan kom. In een volgend artikel geef ik enkele beschouwingen, die hun inspiratie gevonden hebben in de dingen die ik hier gelezen en gezien heb: de teksten van het Hawex-project voor wiskunde A en wiskunde B en enkele lessen die ik in een klas voor zowel wiskunde A als B in Utrecht heb geobserveerd. Mijn inzicht is zeker nog onvolledig: zoals Braudel in Londen, ken ik de toestand van het onderwijs in Nederland nog niet goed.

Eerst dus, heel schematisch, een beschouwing van de GEM [2]. Ik geloof dat deze beschrijving meer dan één overeenkomst toont in de werkwijze van de GEM en die van OW&OC.
De GEM is een groep van ongeveer dertig mensen, die een halve dag per week bijeenkomen om beperkte delen van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school voor te bereiden en te analyseren. Deze mensen vertegenwoordigen drie disciplines: de meesten zijn wiskundeleraren op de middelbare school, enkelen zijn studenten in het laatste jaar van hun wiskundestudie aan de universiteit en maken hun 'mémoire' (werk aan het einde van de studie) over wiskunde-onderwijs, en een aantal zijn leden van de GEM die full-time aan de universiteit werken (en hun onderzoek verrichten op het gebied van de 'Méthodologie Mathématique').

Achtergronden

Welke ideeën, welke gedachten over het wiskunde-onderwijs hebben we in het hoofd wanneer we problemen voor leerlingen zoeken en in het algemeen wanneer we onderwijs voorbereiden?

Instrumentaliteit

Ten eerste zoeken we problemen die op het terrein van de leerlingen gesteld zijn (dus in hun taal en vanaf het begin zinvol voor hen), en die een theoretiserende activiteit veroorzaken. Ons ideaal (de richting waarin we zoeken) is de wiskundetheorie alleen als instrument om problemen op te lossen (eventueel wiskundige problemen) te introduceren.
Ik geef een voorbeeld. Hierna beschrijf ik drie manieren om de g.g.d. in de klas te introduceren.

Een eerste manier is de volgende: de leraar legt uit wat de g.g.d. is en geeft dan voorbeelden en toepassingen.
Een andere manier bestaat uit het geven van een aantal voorbeelden, in de hoop dat de leerlingen de definitie van de g.g.d. zelf ontdekken. (Er is helaas, volgens mij, veel kans dat ze maar proberen te raden wat de leraar verwacht dat ze zeggen.)
Een derde manier bestaat eruit een rechthoek van 42 cm maal 98 cm aan de leerlingen te geven en te vragen om het met de grootst mogelijke vierkante vloertegels te plaveien. We laten ze gedurende een of twee uur werken, met hulp van de leraar als het nodig is, maar zonder het antwoord te geven. Daarna geeft men de leerlingen een andere rechthoek waarvan de maten van de zijde steeds hele getallen zijn, maar groter.
Na deze eerste fase van onderzoek (met gemengde

moeilijkheden, vondsten, zekerheden en twijfels) is er een tijd in de klas genomen om een synthese over het werk en over de g.g.d. samen (de leraar en de verschillende groepen van leerlingen) te schrijven.

In deze derde manier waren de opgaven ('plavei de rechthoek met de grootst mogelijke vierkante vloertegels') zó dat ze in feite de leerlingen verplichten de g.g.d. te construeren en te gebruiken (ik zeg in feite, omdat ze op dat moment waarschijnlijk niet weten dat ze een wiskundig object gebruiken en dat het een g.g.d. heet). Als men het kan zien, hebben we in die derde manier de g.g.d. helemaal niet in het begin gedefinieerd: dit begrip is op de werkplaats van de problemen gebouwd.

Ieder begrip, elk stuk theorie, is als instrument om problemen op te lossen gezien. In het begin is de theorie, als we het al zo kunnen noemen, vooral uit waarnemingen, uit uitkomsten van bijzondere grafieken, meetkundige en numerieke ervaringen, samengesteld. Maar allengs groeit de wiskundige theorie, die zichzelf nieuwe vragen en problemen stelt. Het begrip is niet aanwezig vanaf het begin, maar is in de loop van de weg geconstrueerd. Hier haal ik graag Prof. Freudenthal [3] aan wanneer hij over de 'mental objects' schrijft.

"[...] In the present book I stress one feature more explicitly: *mental objects* versus *concept attainment*. Concepts are the backbone of our cognitive structures. But in everyday matters, concepts are not considered as a teaching subject. Though children learn what is a chair, what is food, what is health, they are not taught the *concepts* of chair, food, health. Mathematics is no different. Children learn what is number, what are circles, what is adding, what is plotting a graph. They grasp them as *mental objects* and carry them out as *mental activities*. It is a fact that the concepts of number and circle, of adding and graphing are susceptible to more precision and clarity than those of chair, food, and health. Is this the reason why the protagonists of concept attainment prefer to teach the number concept rather than number, and, in general, concepts rather than mental objects and activities? Whatever the reason may be, it is an example of what I called the anti-didactical inversion.

"[...] What a didactical phenomenology can do is to prepare the converse approach: starting from those phenomence that beg to be organised and from that starting point teaching the learner to manipulate these means of organising.

"[...] In order to teach groups, rather than starting from the group concept and looking around for material that concretises this concept, one shall look first for phenomence that might compel the learner to constitute the mental object that is being mathematised by the group concept [...]"

Een wereld van verschil

Een groot verschil tussen twee dingen die we soms als wiskundemensen niet meer zien.

Alsdus zijn er in het begin dagelijkse situaties die hun overeenkomstige theorieën hebben. Tussen de twee is het verschil heel groot: deze afstand noemen we 'seuil épistémologique' en het is een tweede idee die ons leidt wanneer we een onderwijs voorbereiden of analyseren. Ik geef hier ook een voorbeeld.
Men hoeft niet de afgeleide te kennen om aan de snelheid een betekenis te geven. Voor iedereen heeft de snelheid van een hardloper, of de snelheid van een auto, een zin: de snelheid is de ervaring door de manier waarmee het landschap verdwijnt, door het lawaai van de wind, door het lawaai van de motor,... Deze snelheid heeft een wiskundig conceptueel facet, de afgeleide, maar de afgeleide is heel iets anders dan de snelheid: de limiet van een differentiequotiënt!

Tussen die twee is een enorme afstand: een differentiequotiënt is van aard een heel ander object dan het object 'snelheid' in het dagelijks leven. En als het soms waar is dat het wiskundige begrip nutteloos is in de dagelijkse aangelegenheden (het begrip van de afgeleide helpt de bestuurder van een vrachtauto helemaal niet in de praktijk van zijn werk), kunnen we aan de andere kant zeggen dat iemand, die van de afgeleide niets anders dan de limiet van het differentiequotiënt kent, niet veel van de afgeleide kent.

Bijna hetzelfde kan gezegd worden over de oppervlakten en de inhouden, die als eenvoudige objecten waargenomen zijn. Op de wiskundige theoretische achtergrond vinden we de integralen. Tussen die twee ligt een wereld van verschil. En dit geldt voor de meeste wiskundige concepten.

Wanneer we problemen voor het onderwijs zoeken, of analyseren, proberen we eerst deze afstand te beschouwen om aan de leerlingen problemen aan te bieden, die van het ene tot het andere begrip zullen leiden. Het is niet altijd gemakkelijk: onze wiskundige opleiding maakt ons soms blind.

Een derde idee is het idee van context

We denken dat de groeiende theorie een context nodig heeft (zoals een plant aarde nodig heeft, om zijn wortels stevig te verankeren). Er kunnen verschillende contexten voor een zelfde begrip of theorie zijn: bijvoorbeeld vinden we voor de afgeleide een kinematische context (de snelheid), een economische context (de marginale kosten, de mate van verandering,...), een meetkundige context (de helling), een numerieke context (de lineaire benaderingen),...
Iedere context brengt zijn bijzondere intuïties mee, die effecten over de perceptie hebben. Zoals bij het OW&OC, vinden we het onmogelijk een theorie zonder context te construeren.

Nadenken

Met deze beschrijving heb ik u enkele hoofdideeën van de GEM gegeven die mijn opmerkingen en observaties over de Hawex hebben beïnvloed. De meeste van deze opmerkingen zal ik in een volgend artikel schrijven, maar ik geef u toch een eerste observatie die zich onmiddellijk voordeed en die in het vervolg is bevestigd.

Ik vind de documenten opvallend door de rijkdom en de verscheidenheid van de contexten (meestal 'echte' situaties, uittreksels van kranten, over het sociale leven, over de consumptiemaatschappij. De documenten zijn zo gekozen dat je ook wat op deze gebieden leert (of soms dat het nieuwe vragen oproept!) en niet alleen op wiskundig gebied.

Een van de (talrijke) voordelen van dit soort teksten is, dat leerlingen die helemaal niet van wiskunde houden, deze interessante informatie tenminste krijgen. Bovendien krijgen ze zo veel meer kans wat van wiskunde te begrijpen en het te leren waarderen. Dat doet me denken aan een opmerking van een leerling die van wiskunde B naar wiskunde A gekomen was en die zei: 'Nu is het gemakkelijker, maar we moeten meer nadenken!' Wat op een contradictie lijkt, is er geen: het tweede deel van zijn opmerking toont dat het vak veeleisend is (en dus niet gemakkelijk). Wat het eerste deel betreft: het is niet verbazingwekkend dat leerlingen een vak *gemakkelijker dan een ander vak* noemen – zelfs al is het veeleisend, maar wel zinvol voor hen – als ze de betekenis van dat andere vak niet begrijpen.

Aan de leerlingen 'echte' (en niet voor de lessen van wiskunde uitgevonden) problemen voorleggen heeft nog andere effecten:
- Leerlingen die met zo'n soort problemen werken, zullen waarschijnlijk beter de verbanden zien en de verschillen tussen het wiskundige model en de werkelijkheid.
- Zulke problemen geven niet altijd 'mooie' antwoorden, gehele getallen,... of hebben verschillende antwoorden. Dat geeft soms een gevoel van onzekerheid, of zelfs onveiligheid.
- Zo'n tekst (een aantal afwisselende problemen) kan moeilijk voor de leerlingen zijn: de moeilijkheid is dat ze de structuur, of de eenheid van hun werk verliezen.

De twee laatste effecten onderstrepen volgens mij het belang van regelmatig een synthesewerk in de klas te maken, om de uitkomsten van de leerlingen te verzamelen en de structuur en de etappes van het onderzoek uit te trekken (en dit kan van klas tot klas veranderen).

En voor de rest tot het volgende artikel.

Literatuur

[1] Braudel, *Ecrits sur l'histoire,* Flammarion, p. 59, Paris, 1969.
[2] G.F.E.N. *Dialogue,Groupe Français d'Education Nouvelle*, nr. 54 bis, pp. 10-27.
[3] H. Freudenthal, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.