Meer mogelijkheden met matrices (2)

R. Geel
NLO Ubbo Emmius, Groningen

Samenvatting

Generalisatie van het klassieke matrixprodukt leidt tot nieuwe toepassingsmogelijkheden. In een serie van drie artikelen (waarvan dit het tweede is) laten we een aantal toepassingen van het gegeneraliseerde matrixprodukt de revue passeren.

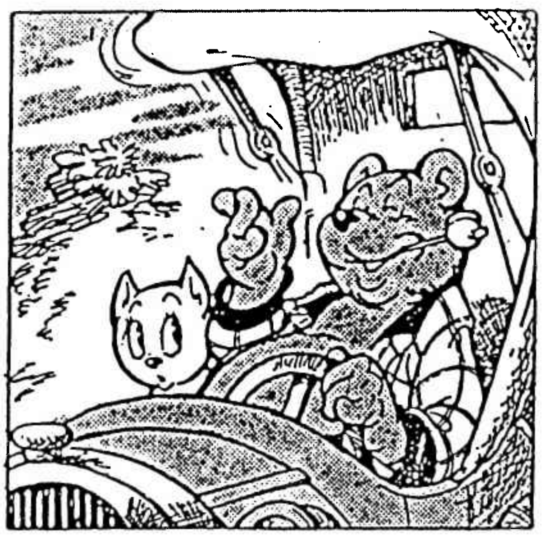
Dit artikel is het tweede in een serie van drie artikelen over de toepassingsmogelijkheden van het gegeneraliseerde matrixprodukt.
In het eerste artikel (zie [1]) introduceerden we het gegeneraliseerde matrixprodukt en lieten we zien hoe het 'kortste route'-probleem uit de grafentheorie met behulp van gegeneraliseerde matrixrekening kan worden opgelost.
Ook dit tweede artikel is gewijd aan een grafentheoretische toepassing van het gegeneraliseerde matrixprodukt.

In de paragraaf *Heer Bommel en de Oerwoudrally* volgen we Heer Bommel en Tom Poes op hun reis naar Donker Afrika en introduceren we het zogenaamde 'betrouwbaarste route'-probleem uit de grafentheorie.
In de beide daarop volgende paragrafen *De veiligste route: een analyse* en *De veiligste route: computerberekeningen* wordt het 'betrouwbaarste route'-probleem vervolgens geanalyseerd en opgelost.

Heer Bommel en de Oerwoudrally (2)

(vrij naar Maarten Toonder)

Zachtjes tuffend spoedde de Oude Schicht, met daarin heer Bommel en Tom Poes, zich voort in de richting van Donker Afrika.

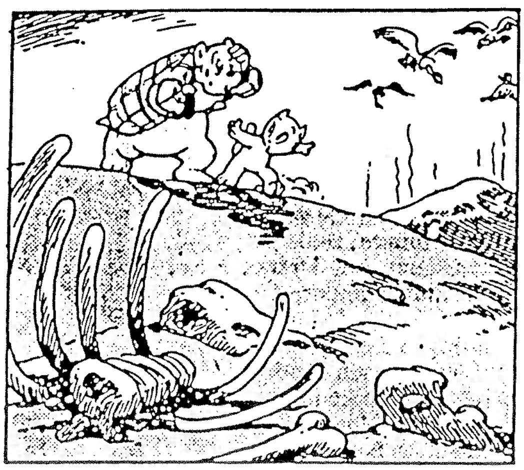


"Toch maar goed, jonge vriend, dat je je draagbare microcomputer hebt meegenomen", sprak heer Bommel, "anders had je nooit zo gauw ontdekt, dat ABFCDHIJ de snelste route van start naar finish is". En hij vervolgde: "Ik verheug me al op het afwisselende landschap tijdens de rally. Wat zei die ambtenaar ook al weer? O ja, woestijnen en regenwouden, dat was het! Prachtig lijkt me dat!"
Tevreden keek hij opzij naar Tom Poes, maar die gaf geen antwoord, verdiept als hij was in de bestudering van een tweede tabel (zie volgende pagina) die de ambtenaar had meegegeven. "Tabel van overlevingskansen" stond er boven en uit de toelichting bij de tabel begreep Tom Poes, dat bv. het getal 0,3 op het kruispunt van rij A en kolom D aangaf, dat van de deelnemers die in de afgelopen jaren vanuit A op weg waren gegaan naar D slechts 30% ook werkelijk in D was aangekomen ("van de overige 70% werd nooit meer iets vernomen en hun lot laat zich raden", vermeldde het schrijven van de ambtenaar onheilspellend).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	–	0,9	0,6	0,3	0,2	–	–	–	–	–
B	0,9	–	0,1	–	–	0,4	–	–	–	–
C	0,6	0,1	–	0,5	–	0,9	0,6	–	–	–
D	0,3	–	0,5	–	0,8	–	0,9	0,5	–	–
E	0,2	–	–	0,8	–	–	–	0,7	0,1	–
F	–	0,4	0,9	–	–	–	0,7	–	–	0,2
G	–	–	0,6	0,9	–	0,7	–	0,5	–	0,3
H	–	–	–	0,5	0,7	–	0,5	–	0,8	0,6
I	–	–	–	–	0,1	–	–	0,8	–	0,4
J	–	–	–	–	–	0,2	0,3	0,6	0,4	–

"Hmm", sprak Tom Poes," ik weet niet of wij de route ABFCDHIJ wel moeten volgen, heer Ollie" en hij legde heer Bommel de nieuw ontstane situatie uit. Heer Bommel trok wit weg.

"Hun lot laat zich raden", stamelde hij, "ja natuurlijk, jammerlijk van dorst omgekomen in die vermaledijde woestijnen en vervolgens een prooi van de gieren geworden. Ik zie het duidelijk voor me.



En die ellendige regenwouden zitten natuurlijk vol met krokodillen en halfnaakte menseneters die maar wat graag hun tanden zouden willen zetten in een malse heer van stand". Met piepende remmen bracht hij de Oude Schicht langs de kant van de weg tot stilstand en stapte uit.

"Voor we verder gaan, wil ik eerst weten wat mijn overlevingskansen tijdens die rally zijn, Tom Poes", sprak hij paniekerig, "laat hij die micro maar eens de veiligste route van A naar J berekenen. Tenslotte gaat het hier om het leven van een Bommel, dus rijd ik liever een veilige route dan een snelle route, als je begrijpt wat ik bedoel".

Tom Poes was weliswaar behoorlijk door elkaar geschud ten gevolge van het plotselinge remmen, maar hij begreep toch nog uitstekend waar heer Bommel's prioriteiten lagen. IJverig begon hij dan ook een programma in te toetsen op zijn microcomputer.

Wanneer we de graaf tekenen die hoort bij de tabel uit het bovenstaande verhaal (zie figuur 1)

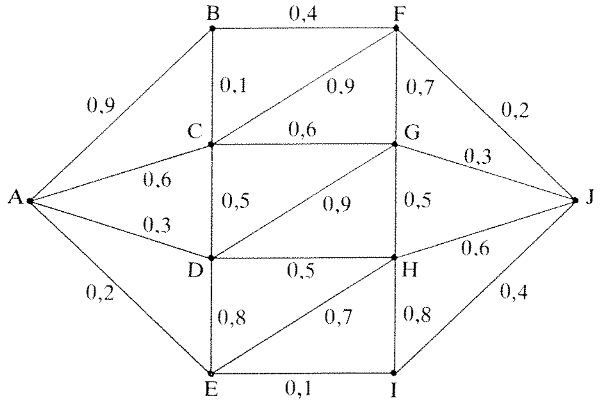


fig. 1

dan wordt duidelijk, dat Tom Poes in deze graaf een route van A naar J dient aan te geven die een zo groot mogelijke overlevingskans biedt. Dit komt neer op het oplossen van het zogenaamde 'betrouwbaarste route'-probleem uit de grafentheorie:

> Laat gegeven zijn een graaf, waarbij aan elk van de takken een getal uit het interval <0,1] (een kans) is toegekend. Gevraagd wordt om bij twee gegeven punten van de graaf een betrouwbaarste verbindingsweg aan te geven, d.w.z. een verbindingsweg waarbij het produkt van de kansen langs de takken van die weg zo groot mogelijk is.

Dit probleem speelt onder andere een rol in de telecommunicatie, wanneer het er om gaat een bericht zodanig van het ene station naar het andere te versturen (via een aantal tussenstations), dat de kans op verminking van het bericht zo klein mogelijk is.

In de volgende paragraaf zullen we zien hoe het 'betrouwbaarste route'-probleem kan worden opgelost met behulp van *gegeneraliseerde matrixrekening.*

De veiligste route: een analyse

We beschouwen de volgende graaf (een wegennet tussen vier steden), waarbij aan elke tak/weg een overlevingskans is toegekend:

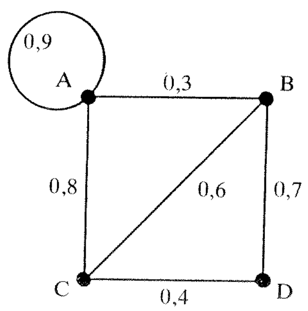


fig. 2

Uit deze graaf blijkt direct, dat de veiligste route van A naar D gegeven wordt door de driestapsroute ACBD met een overlevingskans die gelijk is aan $0{,}8 \times 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}336$. We stellen ons nu ten doel om *door middel van matrixrekening* de veiligste route tussen elk tweetal steden te bepalen. Hiertoe richten we onze aandacht eerst eens op de tweestapsroutes van A naar D en we vragen ons af: hoe wordt de overlevingskans, behorende bij de veiligste tweestapsroute van A naar D, berekend?

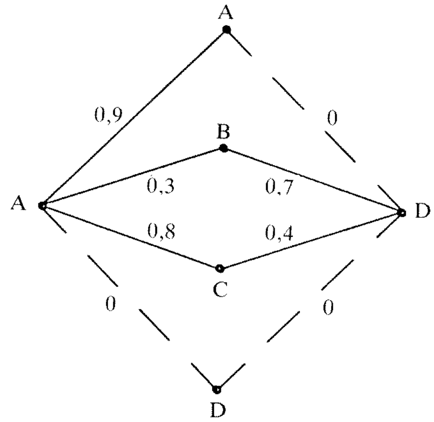


fig. 3

In figuur 3 staan schematisch alle tweestapsroutes van A naar D aangegeven die *in principe* mogelijk zijn. Bestaande takken zijn hierbij weergegeven door een ononderbroken lijn en voorzien van de bijbehorende overlevingskans uit de graaf van figuur 2; niet-bestaande takken zijn weergegeven door een onderbroken lijn en zijn, om redenen die weldra duidelijk zullen worden, voorzien van de overlevingskans 0 (nul).
De overlevingskans langs de veiligste tweestapsroute van A naar D wordt nu op de volgende wijze berekend:

(1)
- a. vermenigvuldig in figuur 3 de beide kansen langs elk van de vier tweestapsroutes met elkaar;
- b. neem vervolgens het maximum van de vier produkten.

We vinden op deze manier voor de overlevingskans langs de veiligste tweestapsroute van A naar D

$$\max\{0{,}9 \times 0 \;,\; 0{,}3 \times 0{,}7 \;,\; 0{,}8 \times 0{,}4 \;,\; 0 \times 0\} = 0{,}32$$

corresponderend met de route ACD in figuur 2.
Merk op, dat deze berekening tot een correct resultaat leidt *dankzij het feit, dat wij aan niet-bestaande takken de overlevingskans 0 toekenden:* een onmogelijke tweestapsroute in figuur 3 (zoals AAD of ADD) gaat nu altijd gepaard met een overlevingskans 0 en kan dus nooit als veiligste uit de bus komen.

Gelet op het voorgaande en gezien onze eerdere ervaringen met het gegeneraliseerde matrixprodukt (zie [1]) ligt het thans voor de hand om het volgende te doen:

1. We introduceren bij de graaf van figuur 2 een zogenaamde *kansmatrix*:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

waarbij het element m_{ij} van de symmetrische 4×4-matrix M gelijk is aan de overlevingskans behorende bij de tak tussen punt i en punt j (hierbij correspondeert A met punt 1, B met punt 2, etc.).

2. We definiëren voor 4×4-matrices $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ met elementen uit de verzameling:

(2) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

een gegeneraliseerde matrixsom $A \oplus B$ en een gegeneraliseerd matrixprodukt AB door:

$$(3) \quad \begin{cases} [A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \\ [AB]_{ij} = (a_{i1} \otimes b_{1j}) \oplus (a_{i2} \otimes b_{2j}) \oplus (a_{i3} \otimes b_{3j}) \\ \quad \oplus (a_{i4} \otimes b_{4j}) \end{cases}$$

waarbij de binaire operaties $\oplus$ en $\otimes$ op V gegeven zijn door:

$$(4) \quad \begin{cases} a \oplus b = \max\{a, b\} \\ a \otimes b = a \cdot b \text{ (de gewone vermenigvuldiging)} \end{cases}$$

voor alle $a, b \in V$.

Men gaat eenvoudig na, dat de operaties $\oplus$ en $\otimes$ (waarvan de keuze ons uiteraard werd ingegeven door de berekeningswijze (1)) alle voor de gegeneraliseerde matrixrekening vereiste eigenschappen bezitten (zie [1]). Zo spelen bijvoorbeeld de getallen 0 en 1 de rol van het nulelement resp. het eenheidselement.

Gebruikmakend van definitie (3) vinden we nu het volgende resultaat:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}48 & 0{,}72 & 0{,}32 \\ 0{,}48 & 0{,}49 & 0{,}28 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 & 0{,}64 & 0{,}42 \\ 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}42 & 0{,}49 \end{pmatrix}$$

waarbij bv. het element $[M^2]_{23} = 0{,}28$ als volgt werd berekend:

$$\begin{aligned} [M^2]_{23} &= (0{,}3 \otimes 0{,}8) \oplus (0 \otimes 0{,}6) \oplus (0{,}6 \otimes 0) \\ &\quad \oplus (0{,}7 \otimes 0{,}4) \\ &= \max\{0{,}3 \times 0{,}8 \;,\; 0 \times 0{,}6 \;,\; 0{,}6 \times 0 \;, \\ &\quad 0{,}7 \times 0{,}4\} \\ &= 0{,}28 \end{aligned}$$

corresponderend met de overlevingskans langs de veiligste tweestapsroute van B naar C (zie de route BDC in figuur 2).

We laten het verder aan de lezer over om voor zichzelf na te gaan, dat met behulp van definitie (3) volgt:

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}48 & 0{,}72 & 0{,}32 \\ 0{,}48 & 0{,}49 & 0{,}28 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 & 0{,}64 & 0{,}42 \\ 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}42 & 0{,}49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}729 & 0{,}432 & 0{,}648 & 0{,}336 \\ 0{,}432 & 0{,}168 & 0{,}384 & 0{,}343 \\ 0{,}648 & 0{,}384 & 0{,}576 & 0{,}256 \\ 0{,}336 & 0{,}343 & 0{,}256 & 0{,}168 \end{pmatrix}$$

waarbij bv. het element $[M^3]_{12} = 0{,}432$, in overeenstemming met onze verwachtingen, de overlevingskans voorstelt langs de veiligste driestapsroute van A naar B (zie de route AACB in figuur 2).

Algemeen geldt blijkbaar:

> het element $[M^k]_{ij}$ van de matrix M^k stelt de overlevingskans voor langs de veiligste k-stapsroute van punt i naar punt j.

Het is eenvoudig in te zien, dat de veiligste route tussen twee gegeven steden gezocht kan worden onder de routes die uit *hoogstens* drie takken bestaan. Om de overlevingskans te vinden die hoort bij de veiligste route tussen twee gegeven steden, dienen we dus de gegeneraliseerde sommatrix $T^{(3)}$, gedefinieerd door:

$$T^{(3)} = M \oplus M^2 \oplus M^3 ,$$

te bepalen. Gebruikmakend van (3) vinden we:

$$T^{(3)} = M \oplus M^2 \oplus M^3$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}48 & 0{,}72 & 0{,}32 \\ 0{,}48 & 0{,}49 & 0{,}28 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 & 0{,}64 & 0{,}42 \\ 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}42 & 0{,}49 \end{pmatrix} \oplus$$

$$\oplus \begin{pmatrix} 0{,}729 & 0{,}432 & 0{,}648 & 0{,}336 \\ 0{,}432 & 0{,}168 & 0{,}384 & 0{,}343 \\ 0{,}648 & 0{,}384 & 0{,}576 & 0{,}256 \\ 0{,}336 & 0{,}343 & 0{,}256 & 0{,}168 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}48 & 0{,}8 & 0{,}336 \\ 0{,}48 & 0{,}49 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}64 & 0{,}42 \\ 0{,}336 & 0{,}7 & 0{,}42 & 0{,}49 \end{pmatrix}$$

waarbij bv. het element $[T^{(3)}]_{14} = 0{,}336$ op de volgende wijze werd berekend:

$$\begin{aligned} [T^{(3)}]_{14} &= [M]_{14} \oplus [M^2]_{14} \oplus [M^3]_{14} \\ &= 0 \oplus 0{,}32 \oplus 0{,}336 \\ &= \max\{0 \;,\; 0{,}32 \;,\; 0{,}336\} \\ &= 0{,}336 \end{aligned}$$

Dit element stelt dus de overlevingskans voor langs de veiligste route van A naar D (zie de route ABCD in figuur 2).

Opmerking
Dat de veiligste route tussen twee steden uit hoogstens drie takken bestaat, komt ook tot uitdrukking in de formule

$$T^{(k)} = T^{(3)} \qquad \text{voor } k>3 \,,$$

welke zich door een simpele berekening laat verifiëren. Een dergelijk resultaat vonden we ook bij een eerdere toepassing van het gegeneraliseerde matrixprodukt (zie [1]).

Conclusie
Het element $[T^{(3)}]_{ij}$ van de gegeneraliseerde sommatrix $T^{(3)}$ stelt de overlevingskans voor langs de veiligste route van punt i naar punt j.

De veiligste route: computerberekeningen

We keren nu terug naar het oorspronkelijke probleem van heer Bommel en Tom Poes:

> Bepaal de veiligste route tussen de punten A en J in de graaf van figuur 1.

Uit de voorgaande paragraaf is duidelijk geworden, dat de maximale overlevingskansen voor routes in de graaf van figuur 1 gegeven worden door de elementen van de gegeneraliseerde sommatrix.

$$T^{(9)} = M \oplus M^2 \oplus \ldots\ldots \oplus M^9 \,,$$

waarbij de matrix M gegeven wordt door (zie de tabel in het verhaal van de Oerwoudrally):

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}9 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}6 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}3 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0 & 0 \\
0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\
0 & 0{,}4 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}2 \\
0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}8 & 0{,}6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0{,}4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0
\end{pmatrix}$$

en waarbij de gegeneraliseerde matrixbewerkingen gedefinieerd zijn door (2), (3) en (4).

Een computerprogramma voor de berekening van de matrix $T^{(9)}$ kan eenvoudig worden verkregen door een aantal voor de hand liggende wijzigingen aan te brengen in het MBASIC-programma voor het 'kortste route'-probleem (zie [1]). We vinden dan de onderstaande tabellen waaruit blijkt, dat heer Bommel en Tom Poes het beste de route ACFGDEHJ (met een maximale overlevingskans van 0,1143) kunnen volgen.

Literatuur

[1] Geel, R.: *Meer mogelijkheden met matrices (1)*, De Nieuw Wiskrant, 7e jaargang, nr. 2, februari 1988, pp. 5–15.

TABEL VAN GROOTSTE OVERLEVINGSKANSEN:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0.81	0.9	0.6	0.3402	0.2722	0.54	0.378	0.1905	0.1524	0.1143
B	0.9	0.81	0.54	0.3062	0.2449	0.486	0.3402	0.1715	0.1372	0.1029
C	0.6	0.54	0.81	0.567	0.4536	0.9	0.63	0.3175	0.254	0.1905
D	0.3402	0.3062	0.567	0.81	0.8	0.63	0.9	0.56	0.448	0.336
E	0.2722	0.2449	0.4536	0.8	0.64	0.504	0.72	0.7	0.56	0.42
F	0.54	0.486	0.9	0.63	0.504	0.81	0.7	0.3528	0.2822	0.2117
G	0.378	0.3402	0.63	0.9	0.72	0.7	0.81	0.504	0.4032	0.3024
H	0.1905	0.1715	0.3175	0.56	0.7	0.3528	0.504	0.64	0.8	0.6
I	0.1524	0.1372	0.254	0.448	0.56	0.2822	0.4032	0.8	0.64	0.48
J	0.1143	0.1029	0.1905	0.336	0.42	0.2117	0.3024	0.6	0.48	0.36

TABEL VAN VEILIGSTE REISROUTES:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	ABA	AB	AC	ACFGD	ACFGDE	ACF	ACFG	ACFGDEH	ACFGDEHI	ACFGDEHJ
B	BA	BAB	BAC	BACFGD	BACFGDE	BACF	BACFG	BACFGDEH	BACFGDEHI	BACFGDEHJ
C	CA	CAB	CFC	CFGD	CFGDE	CF	CFG	CFGDEH	CFGDEHI	CFGDEHJ
D	DGFCA	DGFCAB	DGFC	DGD	DE	DGF	DG	DEH	DEHI	DEHJ
E	EDGFCA	EDGFCAB	EDGFC	ED	EDE	EDGF	EDG	EH	EHI	EHJ
F	FCA	FCAB	FC	FGD	FGDE	FCF	FG	FGDEH	FGDEHI	FGDEHJ
G	GFCA	GFCAB	GFC	GD	GDE	GF	GDG	GDEH	GDEHI	GDEHJ
H	HEDGFCA	HEDGFCAB	HEDGFC	HED	HE	HEDGF	HEDG	HIH	HI	HJ
I	IHEDGFCA	IHEDGFCAB	IHEDGFC	IHED	IHE	IHEDGF	IHEDG	IH	IHI	IHJ
J	JHEDGFCA	JHEDGFCAB	JHEDGFC	JHED	JHE	JHEDGF	JHEDG	JH	JHI	JHJ