

# Transformatiegroepen en een plaatje van $SL(2, \mathbb{R})$

J.J. Duistermaat

Mathematisch Instituut, R.U. Utrecht

*Dit artikel vormde een bijdrage aan het van der Blij-symposium.*

## 1. Inleiding

De groep  $SL(2, \mathbb{R})$  van oppervlakte-bewarende lineaire transformaties in het Euclidische vlak  $\mathbb{R}^2$  is 3-dimen-

sionaal. Zij ziet eruit als het inwendige (waar de lucht zit) van een fietsband, als volgt:

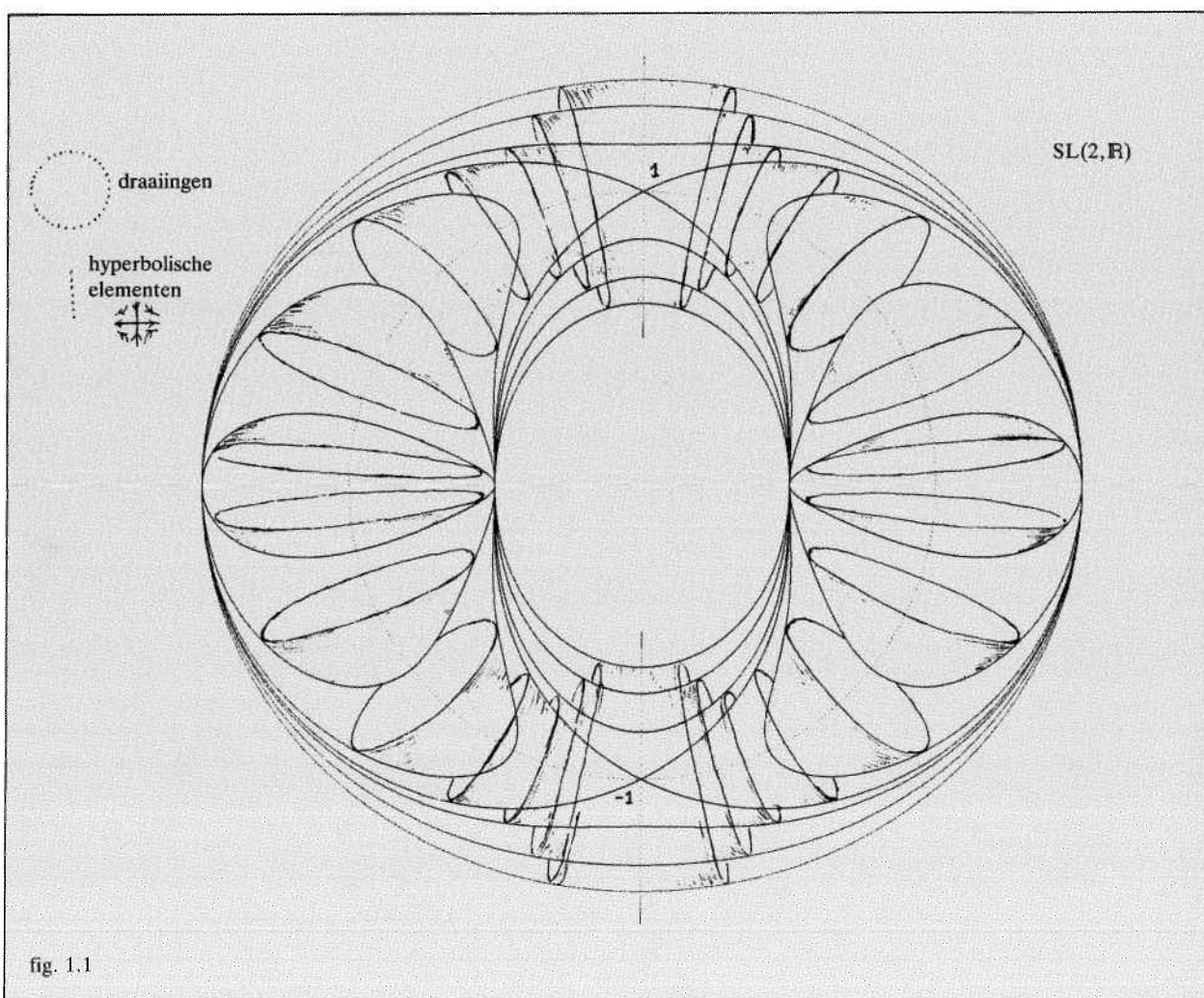


fig. 1.1

In het plaatje zijn allerlei oppervlakken en een aantal speciale lijnen getekend, die bijzondere betekenis hebben voor deze transformatiegroep. Om die te verklaren moet ik een paar algemene begrippen over transformatiegroepen invoeren, namelijk de *conjugatieklassen* en de *1-parameter ondergroepen*.

Behalve aan  $SL(2, \mathbb{R})$ , zal ik deze begrippen ook nog illustreren aan de hand van de  $SO(3)$ , de groep van draaiingen om een gegeven punt in de 3-dimensionale Euclidische ruimte. Ook die groep is 3-dimensionaal, maar het plaatje daarvan blijkt veel eenvoudiger te zijn.

## 2. Transformatiegroepen

Een *transformatie* van een ruimte  $X$  is een afbeelding  $A: X \rightarrow X$ , zodat er bij iedere  $y \in X$  precies één  $x \in X$  is, zodat  $A(x) = y$ .

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 \\ 0,5 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

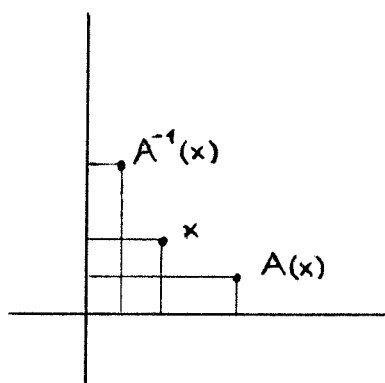


fig. 2.1

Het element  $x \in X$  dat bij  $y \in X$  hoort, wordt met  $x = A^{-1}(y)$  aangeduid, de afbeelding  $A^{-1}: X \rightarrow X$  heet de *inverse* van de transformatie  $A$ .

Zijn  $A, B$  transformaties van  $X$ , dan definieert de formule

$$(2.1) \quad (A \circ B)(x) = A(B(x)) \text{ voor alle } x \in X$$

("eerst B, dan A")

een transformatie  $A \circ B$  van  $X$ , de *samenstelling* van  $B$  met  $A$  genaamd.

Een collectie  $G$  van transformaties heet een *groep* als

(i) Voor ieder tweetal  $A, B \in G$  behoort ook  $A \circ B$  tot  $G$ .

(ii) Als  $A \in G$ , dan ook  $A^{-1} \in G$ .

Bij de term "de ruimte  $X$ " denkt men niet alleen aan een verzameling  $X$ , maar aan een verzameling die bovendien een bepaalde structuur heeft.

Bijvoorbeeld, een *metrische ruimte*  $(X, d)$  is een verzameling  $X$  waarbij bovendien een afstandsfunctie  $d$  gedefinieerd is, die aan ieder paar punten  $x, y \in X$  een reëel getal  $d(x, y) \geq 0$  toevoegt, de afstand tussen  $x$  en  $y$  genaamd. Transformatiegroepen treden meestal op als de collectie van alle transformaties die de structuur van  $X$  behouden.

In het hedendaagse jargon: de *automorfismen* van de

ruimte  $X$ . Zo vormt in het geval van een metrische ruimte  $(X, d)$  de collectie  $G = I(X, d)$  van afstandsbehoudende transformaties  $A$ , dat wil zeggen:

$$(2.2) \quad d(A(x), A(y)) = d(x, y) \text{ voor alle } x, y \in X,$$

een groep, de *isometriegroep* van  $(X, d)$  genaamd.

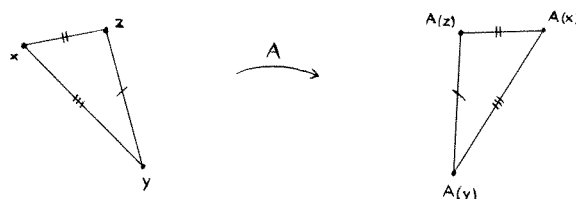


fig. 2.2

In de Euclidische meetkunde zijn dit de transformaties die figuren in daarmee congruente figuren overvoeren.

Een ander voorbeeld, waar ik het hier veel over zal hebben, treedt op als  $X$  een vectorruimte is, bijvoorbeeld door in een Euclidische ruimte een oorsprong  $0$  te kiezen. De "lineaire structuur" van de vectorruimte  $X$  wordt gegeven door de optelling van vectoren  $x, y \rightarrow x + y$  en door de vermenigvuldiging van vectoren door middel van reële factoren  $c: x \rightarrow c \cdot x$ .

Een afbeelding  $A: X \rightarrow X$  heet *lineair* als zij deze structuren behoudt, in de zin dat

$$(i) \quad A(x + y) = A(x) + A(y) \text{ voor alle } x, y \in X$$

$$(ii) \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x) \text{ voor alle } x \in X, c \in \mathbb{R}.$$

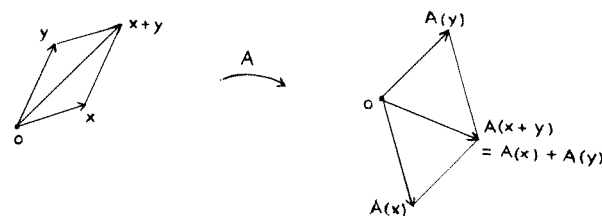


fig. 2.3

De lineaire transformaties van  $X$  vormen een groep, die de *algemene lineaire groep*  $GL(X)$  van de lineaire ruimte  $X$  genoemd wordt.

De plaatjes suggereren de volgende stelling:

In een Euclidische ruimte is een isometrie  $A$  die de oorsprong vastlaat, d.w.z. waarvoor  $A(0) = 0$ , noodzakelijkerwijze een lineaire transformatie. (En dan een vrij speciale onder de lineaire transformaties.) Anders gezegd, de collectie:

$$(2.3) \quad I_0(X, d) = \{A \in I(X, d) \mid A(0) = 0\}$$

is een groep die tegelijkertijd deelverzameling is van  $GL(X)$ , men noemt in zo'n situatie  $I_0(X, d)$  een *ondergroep* van  $GL(X)$ .

## 3. Lie\* groepen

Een ruimte  $X$  heet een *n-dimensionale variëteit* wan-

\*Sophus Lie was een Noorse wiskundige, die de hieronder geschetste theorie ontwikkelde in de jaren 1869-1884.

neer voor ieder punt  $x_0 \in X$ , opgevat als "oorsprong van een lokaal coördinatensysteem", de punten  $x \in X$  in een geschikte omgeving van  $x_0$  vastgelegd kunnen worden door  $n$  reële getallen  $x_1, \dots, x_n$  aan  $x$  toe te voegen. De afspraak is hierbij dat aan  $x_0$  de coördinaten  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  toegevoegd worden, en dat alle combinaties  $x_1, \dots, x_n$  van reële getallen dichtbij 0 optreden als coördinaten van een uniek punt  $x \in X$  dichtbij  $x_0$ . Er zijn nog wat meer technische voorwaarden aan een variëteit opgelegd om een bruikbare definitie te krijgen, maar daar gaan we hier niet verder op in.

**Voorbeeld 1.** De Euclidische 3-dimensionale ruimte  $E$  is, na keuze van een oorsprong  $0$  en 3 punten  $e_1, e_2, e_3$  op lijnen door de oorsprong die niet in één vlak liggen, de "basisvectoren", te coördinatiseren door aan  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  toe te voegen het punt  $x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$ . De coördinatisering is afhankelijk van de keuze van  $0, e_1, e_2, e_3$ , in ieder geval is  $E$  een 3-dimensionale variëteit.

**Voorbeeld 2.** De cirkel

$$(3.1) \quad C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1\}$$

in het vlak is een 1-dimensionale variëteit. Zij kan lokaal gecoördinatiseerd worden, naar keuze, door  $x_1$ , door  $x_2$ , of door de hoek = lengte van de cirkelboog van  $(1, 0)$  naar  $(x_1, x_2)$ . Analoog is de sfeer

$$(3.2) \quad S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\}$$

in  $\mathbb{R}^3$  een 2-dimensionale variëteit.

Een  $k$ -dimensionale *Lie groep* is nu een groep  $G$  van differentieerbare transformaties in een  $n$ -dimensionale variëteit  $X$ , waarbij de transformaties  $A \in G$  in de buurt van een gegeven  $A_0 \in G$  op hun beurt op differentieerbare manier van  $k$  reële parameters afhangen. Preciezer gezegd:  $G$  is zelf een  $k$ -dimensionale variëteit en de afbeelding

$$(3.3) \quad (A, x) \rightarrow A(x)$$

is een differentieerbare afbeelding van  $G \times X$  naar  $X$ . Deze afbeelding heet ook wel de *actie* van  $G$  op  $X$ , de differentieerbaarheid is een uitspraak die telkens in locale coördinaten geldt. Ook hier gaan we niet op de volledige lijst van voorwaarden in.

Het beschouwen van de groep  $G$  zelf als een ruimte op een zelfde manier als de ruimte  $X$  waar  $G$  op werkt, was een nieuwe gedachte in de tijd van Lie. Maar ook nu nog is het bijvoorbeeld bij het onderwijs in de lineaire algebra zeer ongebruikelijk om een plaatje van een matrixgroep te maken. (Wél maakt men dikwijls een plaatje van de werking op  $X$  van een element van  $G$ .)

Een voor ons belangrijk voorbeeld is de groep  $GL(X)$  van lineaire transformaties van een  $n$ -dimensionale lineaire ruimte  $X$ . Na een keuze van een basis  $e_1, \dots, e_n$  in  $X$  mogen we  $X$  met  $\mathbb{R}^n$  identificeren, en dan is iedere lineaire afbeelding  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeven door

$$(3.4) \quad y_i = A(x)_i = A_{i1} \cdot x_1 + \dots + A_{in} \cdot x_n, \quad i = 1, \dots, n$$

voor geschikte coëfficiënten  $A_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ . Deze  $n^2$  coëfficiënten heten de *matrix* van de lineaire afbeelding  $A$  met betrekking tot de basis  $e_1, \dots, e_n$ . Bekend is dat  $A$  inverteerbaar is dan en slechts dan als  $\det(A) \neq 0$ , hierin is  $\det(A)$  de *determinant* van  $A$ . Deze  $A$  vormen een open deelverzameling van de

lineaire ruimte  $L(X)$  van alle  $n \times n$ -matrices, en daarmee is duidelijk dat  $GL(X)$  een Lie groep is van dimensie gelijk aan  $n^2$ .

Van de determinant vermelden we nog dat zij de interpretatie heeft van een volume factor: voor ieder  $n$ -tal vectoren  $f_1, \dots, f_n \in X$  is het georiënteerde  $n$ -dimensionale volume van het parallellepipedum opgespannen door  $A(f_1), \dots, A(f_n)$  gelijk aan  $\det(A)$  maal het georiënteerde volume van het parallellepipedum opgespannen door  $f_1, \dots, f_n$ .

Daarmee wordt

$$(3.5) \quad SL(X) = \{A \in L(X) \mid \det(A) = 1\}$$

een ondergroep van  $GL(X)$ , bestaande uit de volume-bewarende transformaties in  $X$ , dit heet de *speciale lineaire groep*.

Met de identificatie  $X = \mathbb{R}^n$  zijn verder nog de notaties

$$(3.6) \quad GL(n, \mathbb{R}) = GL(X), \quad SL(n, \mathbb{R}) = SL(X)$$

gebruikelijk. Voor  $n = 2$  is dus

$$(3.7) \quad SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$$

de groep van oppervlakte bewarende lineaire transformaties in het vlak uit § 1, en het is nu duidelijk dat dit een 3-dimensionale Lie groep is.

Een tweede belangrijke ondergroep van  $GL(n, \mathbb{R})$  is die van de isometrieën  $A$  die de oorsprong vastlaten. Het is bekend dat  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  een isometrie is dan en slechts dan als zij de standaardbasis in  $\mathbb{R}^n$  in een orthonormale basis overvoert, dat wil zeggen als

$$(3.8)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (A_{ij})^2 = 1 & \text{voor alle } j = 1, \dots, n \text{ en} \\ \sum_{i=1}^n A_{ij} \cdot A_{ik} = 0 & \text{voor } j \neq k. \end{cases}$$

De groep van deze "orthogonale matrices" wordt met  $O(n, \mathbb{R})$  aangeduid. Het aantal vrijheidsgraden, dat wil zeggen de dimensie van  $O(n, \mathbb{R})$ , kan als volgt geteld worden. Voor  $A(e_1)$  kunnen we een willekeurig punt op de eenheidssfeer  $S$  in  $\mathbb{R}^n$  nemen, dat geeft  $n - 1$  vrijheidsgraden.  $A(e_2)$  mogen we vrij in de eenheidssfeer in het orthogonale complement van  $A(e_1)$  kiezen, dat zijn  $n - 2$  vrijheidsgraden. Zo doorgaand krijgen we in totaal  $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n \cdot (n - 1)$  vrijheidsgraden, ofwel

$$(3.9) \quad \dim O(n, \mathbb{R}) = \frac{1}{2}n \cdot (n - 1).$$

Voor  $n = 2$  krijgen we de 1-dimensionale groep van draaiingen (+ de draaispiegelingen) in het vlak, voor  $n = 3$  een 3-dimensionale groep van draaiingen (plus draaispiegelingen). De kwestie van de draaispiegelingen is hierbij nog even een hinderlijk detail. Er geldt  $\det(A) = \pm 1$  voor alle  $A \in O(n, \mathbb{R})$ , waarbij  $\det(A) = +1$ , resp.  $-1$  betekent dat  $A$  de oriëntatie

behoudt, resp. omkeert. In het eerste geval spreekt men van draaiingen, in het tweede geval van draaispiegelingen. De draaiingen vormen een ondergroep van  $O(n, \mathbb{R})$ , de *speciale orthogonale groep*  $SO(n, \mathbb{R})$  genaamd, in feite heeft  $O(n, \mathbb{R})$  twee samenhangscomponenten, beiden van dezelfde dimensie, en  $SO(n, \mathbb{R})$  is de samenhangscomponent waar de identiteit 1 in zit.

#### 4. De Lie algebra

De aanname van differentieerbaarheid in de definitie van Lie groepen kan als volgt gebruikt worden. Zij  $t \rightarrow A_t$  een differentieerbare familie van elementen van  $G$  die van 1 reële parameter  $t$  afhangt, een differentieerbare kromme in  $G$  dus.

Voor iedere  $x \in X$  is dan  $t \rightarrow A_t(x)$  een differentieerbare kromme in  $X$ . Daarbij hoort de snelheidsvector

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} A_t(x) = V_t(A_t(x))$$

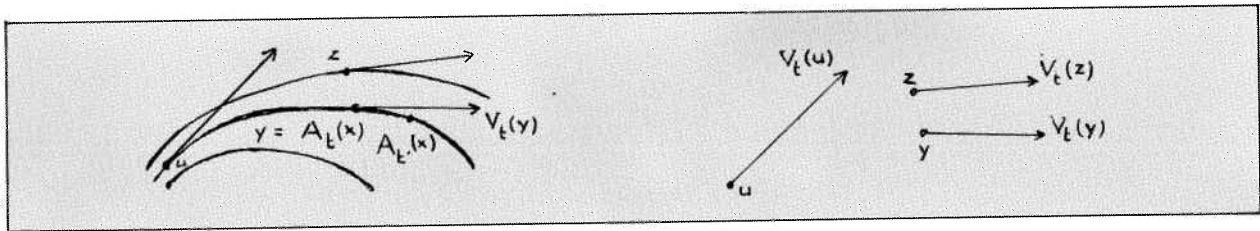


fig. 4.1

een "vector met voetpunt in het punt  $A_t(x)$ ". Omdat, bij gegeven  $t$ , de  $y = A_t(x)$  met  $x \in X$  de hële ruimte  $X$  doorloopt, is hiermee een "vectorveld"  $y \rightarrow V_t(y)$  op  $X$  gedefinieerd.

Het vectorveld  $V_t$  heet ook wel de *infinitesimale transformatie* ten tijde  $t$  van de beweging  $t \rightarrow A_t$  uit  $G$ . Merk op dat

$$V_t(A_t(x)) = \frac{d}{dh} A_{t+h}(x) \Big|_{h=0}, \text{ dus } y = A_t(x) \text{ ofwel}$$

$x = A_t^{-1}(y)$  substituerend, krijgen we

$$V_t(y) = \frac{d}{dh} A_{t+h} \circ A_t^{-1}(y) \Big|_{h=0} \text{ voor alle } y \in X, \text{ ofwel}$$

$$(4.2) \quad V_t = \frac{d}{dh} (A_{t+h} \circ A_t^{-1}) \Big|_{h=0}$$

Hierin is  $h \rightarrow A_{t+h} \circ A_t^{-1}$  een kromme in  $G$  die voor  $h=0$  door het eenheidselement 1 loopt, dus  $V_t$  is een snelheidsvector, aangehecht in 1. De collectie van deze snelheidsvectoren heet ook wel de *raakruimte aan  $G$  in 1* en wordt met  $\mathfrak{g} = T_1G$  aangeduid. Dit is een  $k$ -dimensionale lineaire ruimte, de *Lie algebra*  $\mathfrak{g}$  van  $G$  genaamd.

*Voorbeelden.*

1. De Lie algebra van  $GL(n, \mathbb{R})$  bestaat uit de lineaire ruimte van alle  $n \times n$ -matrices.
2. De Lie algebra  $sl(n, \mathbb{R})$  van  $SL(n, \mathbb{R})$  bestaat uit de  $n \times n$ -matrices  $V$  waarvoor de spoor

$$(4.3) \quad \text{spoor}(V) = \sum_{j=1}^n V_{jj}$$

gelijk is aan 0.

Laten we dit voor  $n=2$ , het enige geval waar we verder op in zullen gaan, narekenen:

Als  $A_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $A_0 = 1$ , dan is

$a_t \cdot d_t - b_t \cdot c_t$  constant gelijk aan 1 voor alle  $t$ ,

$$\text{dus } 0 = \frac{d}{dt} (a_t \cdot d_t - b_t \cdot c_t)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} a_t\right) \cdot d_t + a_t \cdot \left(\frac{d}{dt} d_t\right) - \left(\frac{d}{dt} b_t\right) \cdot c_t - b_t \cdot \left(\frac{d}{dt} c_t\right).$$

Invullen van  $t=0$  en  $a_0 = d_0 = 1$ ,  $b_0 = c_0 = 0$  gebruikend, levert dat

$$0 = \frac{d}{dt} a_t \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} d_t \Big|_{t=0} = \text{spoor} \frac{dA_t}{dt} \Big|_{t=0}$$

Dit geeft dat  $sl(2, \mathbb{R})$  bevat is in de lineaire ruimte van matrices met spoor 0.

Maar beide ruimten zijn 3-dimensionale lineaire ruimten en dus gelijk.

3. De Lie algebra  $so(n, \mathbb{R})$  van  $SO(n, \mathbb{R})$  bestaat uit de  $n \times n$  matrices  $V$  die *antisymmetrisch* zijn, dat wil zeggen waarvoor geldt

$$(4.4) \quad V_{ij} = -V_{ji} \text{ voor alle } i, j = 1, \dots, n$$

#### 5. 1-Parameterondergroepen

Zij  $G$  een Lie groep van transformaties in  $X$ , en  $V$  een vectorveld op  $X$  dat tot de Lie algebra  $\mathfrak{g}$  van  $G$  behoort. Beschouw de beweging  $t \rightarrow A_t$  met constant snelheidsveld gelijk aan  $V$ . Dat wil zeggen de beweging in  $X$  die gedefinieerd wordt door de differentiaalvergelijkingen

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} A_t(x) = V(A_t(x)), \quad A_0(x) = x.$$

*Stelling.*  $A_t \in G$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$ . Verder geldt:

$$(5.2) \quad A_{t+s} = A_t \circ A_s \text{ voor alle } t, s \in \mathbb{R}.$$

*Bewijs van (5.2).* Fixeer  $s \in \mathbb{R}$  en beschouw de beweging  $t \rightarrow B_t = A_{t+s} \circ A_s^{-1}$ .

Er geldt:

$$\frac{d}{dt} B_t(x) = \frac{d}{dt} A_{t+s}(A_s^{-1}(x)) = V(A_{t+s}(A_s^{-1}(x))) = V(B_t(x)),$$

en  $B_0 = 1$ . De conclusie is dat  $B_t = A_t$ .

Er zijn 3 mogelijkheden:

- (i)  $V=0$ ,  $A_t = 1$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Niet (i), maar er is een  $t \neq 0$  zodat  $A_t = 1$ . Omdat dan ook  $A_{-t} = (A_t)^{-1} = 1$ , is er een  $t > 0$  zodat  $A_t = 1$ , zij  $T$  de kleinste positieve  $t$  zodat  $A_t = 1$ . Dan is  $t \rightarrow A_t$  een isomorfisme van de *cirkelgroep*

$\mathbb{R}/T \cdot \mathbb{Z}$  (met de optelling als groepsstructuur) naar de ondergroep  $\{A_t | t \in \mathbb{R}\}$  van  $G$ .

(iii) Niet (i) of (ii). In dit geval is  $t \rightarrow A_t$  een isomorfisme van de optelgroep van de reële getallen met de ondergroep  $\{A_t | t \in \mathbb{R}\}$  van  $G$ .

Ondanks de mogelijkheden (i), (ii) wordt  $t \rightarrow A_t$  de *1-parameterondergroep* van  $G$ , met *infinitesimale voortbrenger*  $V$ , genoemd.

De eigenschappen (5.1), en trouwens ook (5.2), suggereren om te schrijven

$$(5.3) \quad A_t = e^{tV}.$$

In het geval dat  $G = GL(n, \mathbb{R})$  dan kunnen we dit letterlijk opvatten. Voor iedere  $n \times n$ -matrix  $V$  is de machtreeks

$$(5.4) \quad e^V = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} V^p$$

convergent, en voldoet  $A_t = e^{(tV)}$  aan (5.1), (5.2).

*Voorbeelden*

a.  $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $(tV)^p = \begin{pmatrix} t^p & 0 \\ 0 & (-t)^p \end{pmatrix}$ , dus

$$e^{tV} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

b.  $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V^2 = 0$ ,  $V^p = 0$  voor  $p \geq 2$ , dus

$$e^{tV} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Verrassend!}$$

c.  $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V^2 = -1$ ,  $V^{2q} = (-1)^q$ ,

$$V^{2q+1} = (-1)^q \cdot V \text{ dus}$$

$$(5.5) \quad e^{tV} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \text{ als we schrijven}$$

$$\begin{cases} \cos t \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!} t^{2q} \\ \sin t \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} t^{2q+1}. \end{cases}$$

De geometrische verklaring is, dat  $V$  de matrix is van "een kwartslag naar links draaien in het vlak". Dus  $x \rightarrow V(x)$  is het snelheidsveld van de draaiing linksom met hoeksnelheid gelijk aan 1.

Hiervan is de matrix, zoals bekend, gelijk aan

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

De machtreeksen (5.5) leveren efficiënte formules om de cosinus en de sinus uit te rekenen.

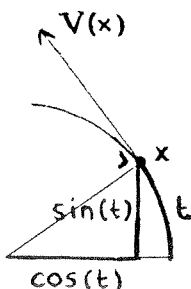


fig. 6.2

Merk op dat in a., b., c. telkens  $V \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ,  $e^{tV} \in SL(2, \mathbb{R})$ .

$$d. V = V_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3).$$

$$\text{Er geldt } V \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \text{ dus } e^{tV} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

voor alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dus  $e^{tV}$  is een draaiing om de as

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

over een hoek  $t \cdot r$ , met  $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Het is niet moeilijk om een expliciete formule voor  $e^{tV}$  te geven. Er geldt

$$V^3 = -r^2 \cdot V, \text{ en daarmee}$$

$$e^{tV} = I + \frac{\sin t \cdot r}{r} \cdot V + \frac{1 - \cos t \cdot r}{r^2} \cdot V^2$$

## 6. Conjugatieklassen

Zij  $C$  een bijectieve afbeelding van een ruimte  $X$  naar een ruimte  $Y$ , en zij  $A$  een transformatie in  $X$ . Het onderstaande diagram laat zien hoe met behulp van  $C$  de transformatie  $A$  op natuurlijke manier "getransporteerd" wordt naar een transformatie  $B$  in  $Y$ .

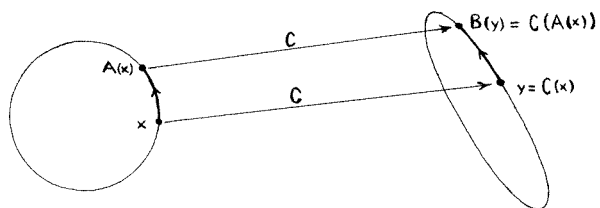


fig. 6.1

In formule:  $B(C(x)) = C(A(x))$ , of  $B \circ C = C \circ A$ , of

$$(6.1) \quad B = C \circ A \circ C^{-1}.$$

$B$  heet *geconjugerd* aan  $A$  door middel van  $C$ .

De formule  $C \circ (A_1 \circ A_2) \circ C^{-1} = (C \circ A_1 \circ C^{-1}) \circ (C \circ A_2 \circ C^{-1})$  laat zien dat als  $G$  een groep van transformaties in  $X$  is, dan is  $H = \{C \circ A \circ C^{-1} | A \in G\}$  een groep van transformaties in  $Y$ , en  $A \rightarrow C \circ A \circ C^{-1}$  is een isomorfisme van  $G$  naar  $H$ .

Als  $Y = X$ ,  $C \in G$ , dan is  $H = G$  en  $A \rightarrow C \circ A \circ C^{-1}$  is een isomorfisme van  $G$  naar zichzelf, de *conjugatie met  $C$*  genaamd. Voor een gegeven  $A \in G$  heet  $\{C \circ A \circ C^{-1} | C \in G\}$  de *conjugatieklasse* van  $A$  in  $G$ . Uit allerlei oogpunten zijn de elementen uit één en dezelfde conjugatieklasse gelijksoortig. De kunst van het vinden van een "normaalgedaante" voor een element  $A$  van  $G$  bestaat dikwijls uit het vinden van een element in de conjugatieklasse van  $A$  dat er zo eenvoudig of aantrekkelijk mogelijk uitziet. Een andere interessante opmerking is dat hoe minder commutatief de groep  $G$ , hoe groter de conjugatieklassen, dus hoe meer keuze voor de normaalgedaanten!

## 7. SO(3)

Met de notatie van voorbeeld d. aan het eind van §5, is de afbeelding

$$x \rightarrow e^{Vx} = \text{de rotatie om } x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ over de hoek } r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

een identificatie van het inwendige van de bol  $B_\pi$  in  $\mathbb{R}^3$  met straal  $\pi$  naar de collectie van draaiingen over een hoek  $< \pi$ . De enige meerduidigheid die hier zou kunnen optreden is dat

$$e^{Vx} = e^{V(-x)} = e^{-Vx}, \text{ ofwel } e^{2Vx} = 1$$

maar dit kan alleen als  $r$  een geheel veelvoud is van  $\pi$ . De ontbrekende elementen van  $SO(3)$  vormen de draaiingen over de hoek  $\pi$ , die corresponderen met de punten  $x$  op de rand van de bol  $B_\pi$ . Echter hier corresponderen de antipodale punten  $x$  en  $-x$  wél met hetzelfde punt van  $SO(3)$ .

Dit leidt tot het volgende plaatje van  $SO(3)$ , beschouw de bol

$$B_\pi = \{x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq \pi\},$$

waarbij echter op de rand

$$S_\pi = \{x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \pi\}$$

de punten  $x$  en  $-x$  met elkaar worden geïdentificeerd. Voor een goed begrip: in  $SO(3)$  speelt  $S_\pi$  *niet* de rol van een rand. Een kromme  $x(t)$  in  $\mathbb{R}^3$  die door  $S_\pi$  "naar buiten" loopt gaat in  $SO(3)$  gladjes door. In het plaatje doordat, op het moment dat  $|x(t)| = \pi$ , wordt overgegaan op het antipodale punt  $-x(t)$

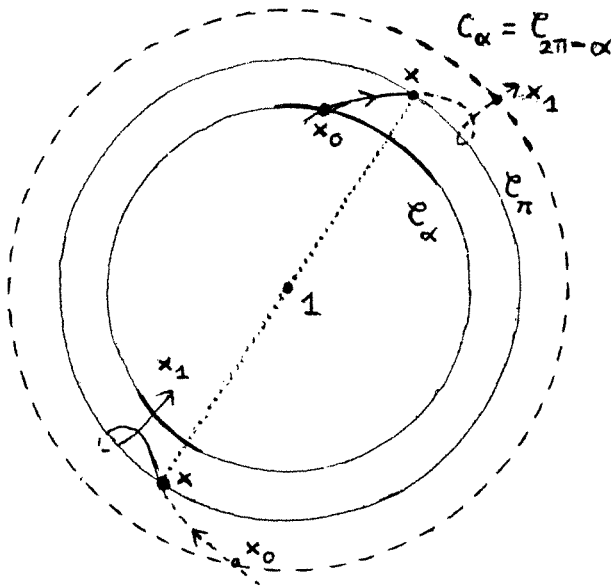


fig. 7.1

en daarna doorgedaan met  $\frac{|x(t)| - 2\pi}{|x(t)|} \cdot x(t)$ .

Als  $C \in SO(3)$  dan is, zoals ook duidelijk wordt uit het feit dat  $C(x)$  de draaias is van  $C \circ e^{Vx} \circ C^{-1}$ :

$$C \circ e^{Vx} \circ C^{-1} = e^{C \circ Vx \circ C^{-1}} = e^{Vc(x)}.$$

Omdat verder de elementen  $C$  van  $SO(3)$  ieder punt van de sfeer

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \alpha\}$$

met straal  $\alpha$  in ieder ander punt van  $S_\alpha$  kunnen overvoeren, zien we dat in het bovengeschetste plaatje van  $SO(3)$ , de *conjugatieklassen*  $C_\alpha$  in  $SO(3)$  gegeven worden door de sferen  $S_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Hierbij is natuurlijk  $S_0 = \{1\}$ , de conjugatieklasse van het eenheidselement, een flauwe uitzondering. Echter, de conjugatieklasse  $C_\pi$  van de draaiingen over een hoek  $\pi$  is ook bijzonder, want gelijk aan de sfeer  $S_\pi$  met identificatie van de antipodale punten. Uit de projectieve meetkunde staat deze ruimte bekend als het *projectieve vlak*. Opvallend is dat  $C_\alpha$ , voor  $\alpha < \pi$ ,  $\alpha$  dichtbij  $\pi$ , bij  $C_\pi$  "2x langskomt", aan iedere kant eenmaal.

De 1-parameter ondergroepen zijn in het plaatje rechte lijnen door de oorsprong, tot cirkels gemaakt door de identificatie van de eindpunten op  $S_\pi$ . Dit zijn de draaiingen, met constante hoeksnelheid en om een vaste draaias.

Zo'n 1-parameter ondergroep snijdt iedere conjugatieklasse (behalve  $C_0$  en  $C_\pi$ ) in precies 2 punten, de elementen daarvan vormen een natuurlijke keuze van normaalvormen voor de elementen van  $SO(3)$ . Een standaard keuze is die voor  $x = (1, 0, 0)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Over de ligging van deze cirkels in  $SO(3)$  is nog iets bijzonders te melden. Ze snijden namelijk de conjugatieklasse  $C_\pi$  precies éénmaal (en dwars). Nu is bij deformatie van een kromme het wel mogelijk dat het aantal snijpunten met een oppervlak verandert, door het "lostrekken" of "doorduwen" van een lus.

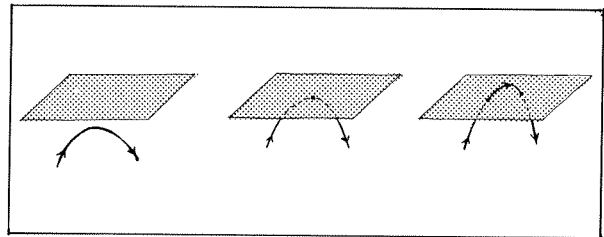


fig. 7.2

maar daarbij verandert het aantal snijpunten alleen met een even getal. (Voor meer details raadplege men een boek over differentiaaltopologie.) Gevolg: iedere deformatie van de cirkel "eenmaal ronddraaien" blijft  $C_\pi$  *treffen*. Zij blijft dus een draaiing over een hoek  $\pi$  bevatten. *In het bijzonder kan deze cirkel niet samengetrokken worden tot één punt in  $SO(3)$ .*

Nemen we echter de kromme in  $SO(3)$  die bestaat uit het  *tweemaal* doorlopen van de cirkel, dan kan zij *wel* gedeformeerd worden naar de constante loop, zie de plaatjes.

Men zegt:  $SO(3)$  is "tweevoudig samenhangend". (Dit kan ook verklaard worden door Hamilton's tweevoudige overdekking van  $SO(3)$  met de quaternionische 3-sfeer erbij te halen, maar dat zou hier te technisch worden.)

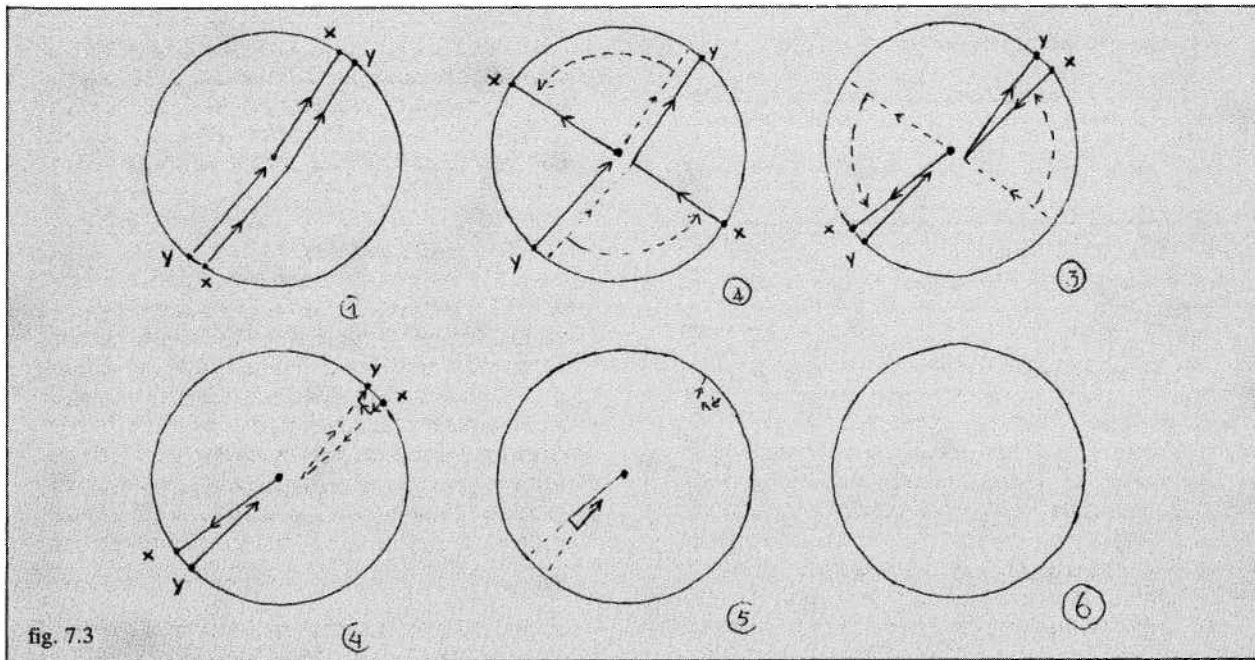


fig. 7.3

## 8. $SL(2, \mathbb{R})$

Nu de beloofde uitleg van het plaatje van

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

De eerste stap is de substitutie

$$a = p + q, \quad d = p - q, \quad b = r - s, \quad c = r + s,$$

waarmee de vergelijking  $ad - bc = 1$  eruit gaat zien als

$$p^2 + s^2 = q^2 + r^2 + 1.$$

Voor iedere  $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ , loopt dan  $(p, s)$  over de cirkel in het vlak met straal  $R = \sqrt{q^2 + r^2 + 1} \geq 1$ .

Daarmee ziet  $SL(2, \mathbb{R})$  eruit als het Cartesisch product van  $\mathbb{R}^2$  met een cirkel.

Om dit te zien als het inwendige van een fietsband, krimpen we  $\mathbb{R}^2$  in tot het binnenste van de cirkelschijf  $D$  met straal 1, door de substitutie

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} p, \quad v = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} s.$$

Daarmee leidt

$$(\vartheta, (u, v)) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta + u & -\sin \vartheta + v \\ \sin \vartheta + v & \cos \vartheta - u \end{pmatrix}$$

tot een identificatie van  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times D$  met  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times D$  kunnen we op zijn beurt in  $\mathbb{R}^3$  leggen door de afbeelding.

$$(\vartheta, (u, v)) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Omdat  $\text{spoor}(X \circ Y) = \sum_{ij} X_{ij} \cdot Y_{ji} = \text{spoor}(Y \circ X)$ , is ook  $\text{spoor}(C \circ A \circ C^{-1}) = \text{spoor}((A \circ C^{-1}) \circ C) = \text{spoor}(A)$ . Anders gezegd de spoorfunctie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow a + d$$

is constant op iedere conjugatieklasse.

Voor iedere  $C \in \mathbb{R}$  is de verzameling der  $A$  met

$$\text{spoor}(A) = \frac{2 \cos \vartheta}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = C$$

een 2-dimensionale variëteit in  $SL(2, \mathbb{R})$ , opgebouwd uit conjugatieklassen.

Anderzijds zijn de conjugatieklassen 2-dimensionaal: er geldt

$$\frac{d}{dt} e^{tV} \circ A \circ e^{-tV} \Big|_{t=0} = V \circ A - A \circ V,$$

en de collectie van deze raakvectoren aan de conjugatieklassen is 2-dimensionaal.

Bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & \beta \cdot (e^{-t} - e^t) \\ \gamma \cdot (e^t - e^{-t}) & 0 \end{pmatrix}.$$

De conclusie is dat de conjugatieklassen de samenhangscomponenten zijn van de oppervlakken  $\text{spoor}(A) = C$ .

Voor degenen die vertrouwd zijn met *eigenwaarden* als  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  de eigenwaarden zijn van  $A$ , dan is  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A) = 1$  en  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{spoor}(A) = C$ .

Dus:  $A$  en  $A'$  liggen op hetzelfde oppervlak  $\text{spoor}(A) = C$ , dan en slechts dan als  $A$  en  $A'$  dezelfde eigenwaarden hebben. Het is een vrij algemeen verschijnsel dat in matrixgroepen de conjugatieklassen vrijwel helemaal vastgelegd worden door het geven van de eigenwaarden.

Verder zijn de 1-parameter ondergroepen uit  $a, b, c$ , in §5 getekend – ook hier weer fungeren ze als natuurlijke normaalgedaanten.

De elementen van  $SL(2, \mathbb{R})$  die geconjugerd zijn met een draaiing heten *elliptisch*, die geconjugerd zijn met

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \neq 0, \quad \text{heten } \textit{hyperbolisch}.$$

Het elliptische en het hyperbolische gebied worden van elkaar gescheiden door de kegelvormige conjugatieklassen van de zogenaamde unipotente elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de conjugatiegetallen in het oppervlak spoor  $(A) = 2 =$  spoor  $(1)$ . Opvallend is dat hier de bijbehorende 1-parametergroep *in* de conjugatieklassen verloopt, heel anders dan in het elliptische of hyperbolische gebied.

Een algemene kromme van een gegeven hyperbolisch element naar een gegeven elliptisch element zal dan ook gaan via een element dat geconjugerd is met

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ of met } \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en alleen in bijzondere gevallen via

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Als men van  $2 \times 2$ -matrices alleen vertrouwd is met de normaalgedaanten, dan vraagt men zich af hoe dit kan, maar fig. 8.1 beneden laat zien dat de overgang heel geleidelijk en natuurlijk kan plaatsvinden.

In het algemeen zal alleen met een 3-parameter familie met zekerheid door  $\pm 1$  "gestuurd" kunnen worden.

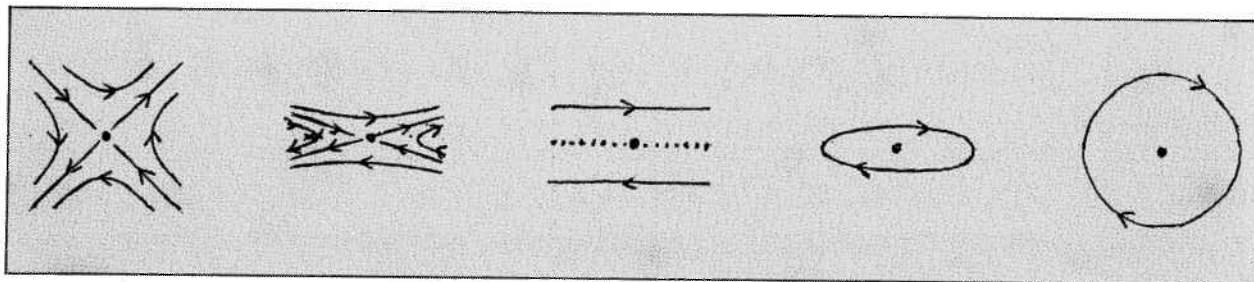


fig. 8.1

Het valt onmiddellijk op dat het plaatje van  $SL(2, \mathbb{R})$  "dubbel" is, er is de symmetrie  $A \rightarrow -A$ .

Een curieus feit hierbij is dat de elementen die geconjugerd zijn met

$$\begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ of } \begin{pmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix},$$

niet van de vorm  $e^V$ , met spoor  $(V) = 0$  zijn.

Dus hier is de afbeelding  $V \rightarrow e^V$  niet surjectief van de Lie algebra naar de Lie groep, anders dan in het geval van  $SO(3)$ .

Tenslotte moet nog opgemerkt worden dat "kwantitatief" het plaatje van  $SL(2, \mathbb{R})$  van geen kanten deugt:  $SL(2, \mathbb{R})$  is langs de binnencirkels niet kleiner dan langs de buitencirkels. Ook is het volume van  $SL(2, \mathbb{R})$  in feite oneindig groot,  $SL(2, \mathbb{R})$  is extreem "ruimtelijk" aan zijn rand.

## 9. Computerplaatjes

Ik kan niet nalaten om te vertellen dat ik er een kinderlijk plezier aan heb beleefd, dat ik van de winter een beetje heb leren programmeren. Figuur 1.1 (maar dan zonder de ellipsen en arceringen die de ruimtelijke suggestie moeten geven) is gemaakt door een matrixprinter van het goedkoopste type, gestuurd door middel van een microcomputer.

Ik moet eerlijk zeggen dat ik vroeger niet zo onder de indruk was van computerplaatjes.

Als het om gladde (differentieerbare) krommen ging, waren ze meestal zo hakkelig dat ik het een belediging voor het oog vond. Óf ze waren wel zuiver glad, maar dan waren ze met behulp van dure, specialistische apparaten gemaakt.

In fig. 1.1 is de rasterstructuur nog wel waar te nemen, dus "echt glad" zijn de krommen nog niet, maar het resultaat is toch al heel aardig. Hoewel een microcomputer nog wel duurder is dan een fiets, is de beschikbaarheid van dit soort hulpmiddelen in de loop van de afgelopen decennia zeer spectaculair toegenomen.

## Dankbetuigingen

Het idee om een plaatje van  $SL(2, \mathbb{R})$  te maken als in fig. 1.1 heb ik van Prof. Atiyah (Oxford) geleerd.

De presentatie van  $SO(3)$  is in samenwerking met Joop Kolk ontstaan, met wie ik samen een boek over Lie groepen aan het schrijven ben.

Huib-Jan Imbens, Mark van Leeuwen en Alex Fekken dank ik voor behulpzame opmerkingen over het programmeren van printers.