Wiskunde A: Opvattingen en toetsen

H. van der Kooij
Strabrecht College, Geldrop

Samenvatting

Aan de hand van enkele voorbeelden wordt duidelijk gemaakt dat met de introductie van Wiskunde A een heel andere manier van met wiskunde omgaan en naar wiskunde kijken z'n intrede in de school heeft gedaan.
In plaats van routinematig en reproducerend leren vindt er een verschuiving plaats, waarbij naast routines juist inventiviteit en creativiteit een rol spelen.
De auteur concludeert dat in het examen deze verschuiving (nog) niet zichtbaar is.

Formeel wiskundeonderwijs

De school waar ik werkte, behoorde tot de beste van de regio (voor wat betreft de examenresultaten). De groep leerlingen die ik voor mij had behoorde tot de beste van de school: een derde klas gymnasium. Het huiswerk had geen problemen opgeleverd, behalve die ene som bij die ene leerling. Het ging over verhoudingen tussen lengtes van lijnstukken. Zij (jawel!, natuurlijk een meisje), wist niet goed hoe ze verder moest het het resultaat van haar inspanningen:

$$\frac{AB+AC}{AD}=\frac{B+C}{D}.$$

Ik wist me te beheersen en legde het 'probleem' via het bord voor aan de rest van de klas. Tot mijn stomme verbazing zag niemand iets vreemds in wat dat meisje had gedaan.

Toen (ruim acht jaar geleden), vond ik die ene leerling stom en de rest van de klas voor dat moment niet erg slim. In de loop der jaren heb ik mijn mening gewijzigd. Welbeschouwd kan die leerling alleen verweten worden dat ze niet goed had opgelet toen werd uitgelegd wat binnen de wiskunde het verschil is tussen een kleine letter en een hoofdletter. Voor de rest deed ze braaf (en zonder nadenken, want dat was haar niet geleerd) dàt, wat haar al meer dan twee jaar was ingeprent:

> *'gemeenschappelijke factoren worden buiten de haakjes gehaald' en 'breuken moeten vereenvoudigd worden.'*

Natuurlijk is dit een (hopelijk) extreem voorbeeld uit de wereld van het onderwijs in de formele wiskunde. Uit ervaring weet ik echter dat dit soort problemen, in minder opvallende vorm (maar daarom niet minder ernstig), bij een groot deel van de leerlingen optreedt. Die problemen zijn in wezen een logische consequentie van het soort onderwijs dat de leerlingen verplicht zijn te 'genieten'.
In dit soort onderwijs worden leerlingen geconfronteerd met abstracties en formules die startpunt zijn voor het onderwijs over een bepaald wiskundig onderwerp. Een hoofdstuk over de stelling van Pythagoras begint met die stelling en het bewijs ervan.

In de wiskunde zelf zijn formules veelal eindpunten, of op zijn minst tussenstations. Daaraan vooraf gaan zeer wiskundige activiteiten als probleemstellingen (praktische problemen die om een oplossingsmethodiek vragen), vermoedens formuleren en toetsen, schematiseren, structureren en generaliseren. Doordat deze essentiële fasen in het formele wiskundeonderwijs meestal worden overgeslagen of te snel doorlopen, vervalt het onderwijs tot mechanistisch onderwijs: de docent doet iets voor en vervolgens wordt het werken met een formule of stelling eindeloos en routinematig ingeoefend. Hiermee wordt de meeste leerlingen de kans ontnomen om inzicht te verwerven in het 'hoe' en 'waarom' van formules en stellingen en de bruikbaarheid ervan, zowel binnen de wiskunde als daarbuiten.
Imitatiegedrag wordt binnen deze vorm van onderwijs gestimuleerd, niet omdat het een doelstelling zou zijn, maar omdat voor veel leerlingen de zelfredzaamheid

miniem is. De docent is binnen dit systeem de alleswe-ter. Hij kan je precies vertellen hoe je moet werken en hij weet precies wat goed voor je is.
Het aanleren van technische vaardigheden en het hanteren van standaardalgoritmen zijn de belangrijkste leerdoelen binnen het wiskundeonderwijs dat gebaseerd is op het in zichzelf besloten systeem van de formele wiskunde.

Het mag duidelijk zijn dat mechanistisch onderwijs toetsen gebruikt die het imitatiegedrag van leerlingen evalueert. Er dient nagegaan te worden of een leerling zijn technieken en standaardalgoritmen voldoende beheerst. Dientengevolge komen bij de meeste toetsen (waaronder het examen) opgaven aan de orde die lichte (meestal slechts getalsmatige) varianten zijn op het soort opgaven die in de lessen eindeloos aan de orde is geweest. Bij dit soort toetsen wordt dan ook in het algemeen niet positief beoordeeld wat een leerling *wel kan*, maar negatief aangerekend wat hij *niet kent.*

Het bovenstaande verhaal geeft een tamelijk negatief beeld van het mechanistische wiskundeonderwijs. Dit betekent niet dat daarmee de formele wiskunde wordt veroordeeld. Het betekent evenmin dat alle leerlingen slachtoffer zouden worden van dit soort onderwijs. Wel staat voor mij als een paal boven water dat de minder goede, onzekere leerling de dupe is van dit type onderwijs. Ten onrechte wordt vaak gesteld dat deze leerlingen gebaat zouden zijn bij routinematige oefeningen. Op korte termijn (van test tot test) lijkt dit te kloppen, maar op lange termijn is dit absoluut onwaar. Dat is mij echt duidelijk geworden bij de invoering van het vak wiskunde A op het vwo. Toen ontstond opeens de mogelijkheid om structureel te breken met het mechanistisch onderwijs en over te schakelen op het niet-formele, realistische onderwijs.

Wiskunde A: verschuiving van waardevrij naar waardevol onderwijs

Een mogelijke omschrijving van leerdoelen bij het vak wiskunde A zou het volgende kunnen opleveren:

> *Het leren hanteren van wiskundige modellen en technieken om problemen uit de werkelijkheid te kunnen beschrijven/beoordelen/oplossen.*

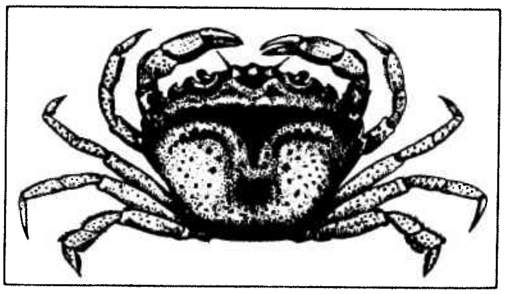
Deze omschrijving is niet bedoeld om het vak wiskunde A te omvatten, maar geeft wel aan dat er een voortdurende wisselwerking dient te zijn tussen wiskunde en realiteit.
Binnen het formele wiskundeonderwijs komen ook weleens toepassingen aan bod, bijvoorbeeld in een afsluitende paragraaf bij het hoofdstuk over lineaire functies. In de praktijk blijkt dat niet te werken. Daar waar theorie en toepassingen gescheiden worden gehouden, functioneert de theoretische kennis niet als bruikbaar middel bij de toepassingen.
Belangrijk kenmerk van het Hewetmateriaal is dat de leerlingen de gelegenheid krijgen tot terreinverkenningen en het ontwikkelen van eigen oplossingsstrategieën. Dit is mogelijk doordat gestart wordt met vereenvoudigde (quasi) reële situaties. Door de complexiteit van de situaties te verhogen, ontstaat de noodzaak om strategieën aan te scherpen, te veranderen. Belangrijk daarbij is het leren inzien waarom een eerdere strategie niet langer zonder meer bruikbaar is. Het kritisch kennisnemen van strategieën van een ander (medeleerling of docent) en die vergelijken met eigen strategieën, het aanwijzen van tekortkomingen bij een ander of bij zichzelf, het zien van goede/betere elementen in de methode van een ander, ... Het zijn allemaal zeer waardevolle bezigheden, daar waar mensen bezig zijn met het zich eigen maken van oplossingsmethodieken.

De rol van de docent is binnen realistisch wiskundeonderwijs een wezenlijk andere dan bij het mechanistisch onderwijs. In de plaats van het doceren komt het op weg helpen, stimuleren, terugverwijzen naar eerdere, analoge problemen, bijsturen van individuele (groepjes van) leerlingen. De docent wordt dus een begeleider van het individuele leerproces.
In klassegesprekken komen dingen aan de orde, zoals het terugblikken op verschillende oplossingsmethodieken, het uitdiepen van strategieën. (Zijn generalisaties mogelijk? Wanneer werkt het niet en waarom?)

Als wiskundedocent heb je vaak de neiging tot formaliseren en tot het aanpakken van problemen vanuit je formulewereld. Wanneer leerlingen de ruimte krijgen om eigen wegen te bewandelen, dan merk je hoe inventief en creatief ze vaak zijn. Het gebeurt geregeld dat een oplossing van een probleem, door mij gegeven vanuit mijn formele denkwereld, door leerlingen van tafel wordt geveegd en vervangen door een veel eenvoudigere, dus mooiere en voor de andere leerlingen beter begrijpbare oplossing. Daaruit wordt duidelijk dat zij het *probleem* hebben opgelost, terwijl ik probeerde een stuk theoretische kennis te gebruiken.

Een mooi voorbeeld waaruit te zien valt hoever formele kennis en inventiviteit uiteen kunnen liggen, levert het volgende probleem uit *'Periodieke Functies'*:

Een andere krab, de *groene krab*, is juist actief bij hoogwater en niet zo actief tijdens laagwater.



De volgende grafiek 'bewijst' dat:

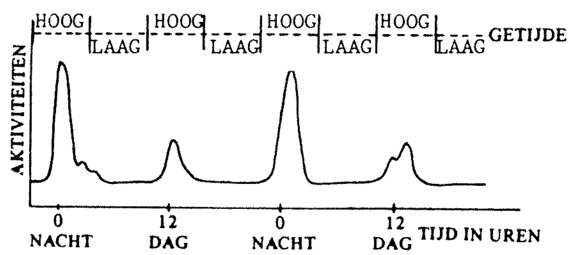


fig. 18

≫ 25. Welk verschijnsel – naast eb en vloed – lijkt invloed te hebben op de activiteiten van de groene krab?

Deze grafiek is ook te modelleren; met het volgende resultaat:

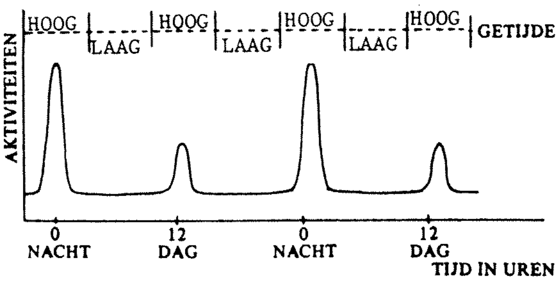


fig. 19

≫ 26. Hoe groot is de periode van de grafiek afgaande op dit gedeelte?
(Zo nauwkeurig mogelijk).

De groene krab houdt dus rekening met eb en vloed (periode 12,4 uur) en dag en nacht (periode 24 uur).
Dat het model van fig. 19 niet onbeperkt naar rechts kan worden voortgezet moge blijken uit het antwoord op de volgende vraag.

≫ 27. Teken de activiteiten-grafiek van de groene krab als het 'eerste' hoogwater om ongeveer 06.00 uur valt:

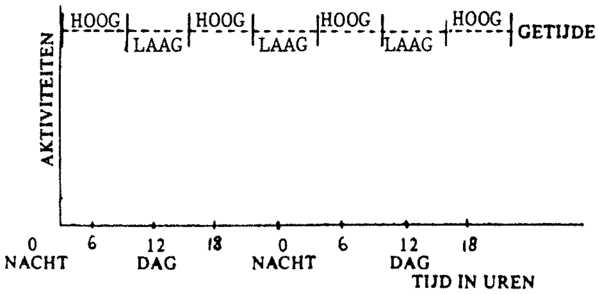


fig. 20

≫ 28. Hoe kun je de periode van de activiteiten van de groene krab berekenen (rekening houdend met de periode van eb en vloed en die van dag en nacht)?

Opgave 28 is niet eenvoudig.
Eén docent had in zijn groep de volgende oplossingsmethode aan de orde gesteld:

Het KGV van twee getallen a en b is te vinden door twee, onderling ondeelbare, getallen k en l (beide geheel) te zoeken zó dat geldt: k • a = l • b.

Die methode bleek niet zo goed aan te sluiten bij de leerlingen.
Mijn eerste gedachte voor een oplossing ging uit naar:

$$\textit{Als } a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\,a_i} \textit{ en } b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\,b_i}\textit{, dan geldt}$$

$$KGV(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(a_i,\, b_i)}.$$

Hierin zijn de p_i*'s priemgetallen en* a_i *en* b_i *niet-negatieve gehele getallen.*

Per slot van rekening heb je niet voor niets de TH gedaan!
Dat deze prachtige uitspraak alleen opgaat voor gehele getallen mag de pret niet drukken, want het getal 12,4 laat zich simpel vertienvoudigen. Toch had ik het gevoel dat de oplossingsmethode tamelijk leerlingonvriendelijk was.
Terwijl de leerlingen met het probleem aan het stoeien waren, kreeg ik het idee om in een klassegesprek gebruik te maken van twee sinusgrafieken die op t=0 beide vanuit de evenwichtsstand omhoog bewegen, de een met periode 24, de ander met periode 12,4. Het probleem is dan: wanneer gaan ze voor het eerst weer beide tegelijk in dezelfde richting door de evenwichtsstand.
Het werd een vruchtbaar gesprek, waarvan ik het gevoel had dat iedereen begreep hoe de oplossing verliep:

Bij 24 × 12,4 hangt de ene grafiek nog in de lucht, dus zorg ervoor dat je van 12,4 een geheel getal maakt. Dat lukt al bij vermenigvuldigen met 2,5.

Eén van de leerlingen kwam echter met een veel simpeler oplossing:

Per etmaal loopt de getijdenperiode 0,8 uur achter. Na 30 dagen is daarmee precies één etmaal overbrugd. Omdat dit systeem pas na de eerste dag gaat tellen, is de periodiciteit dus 31 dagen.

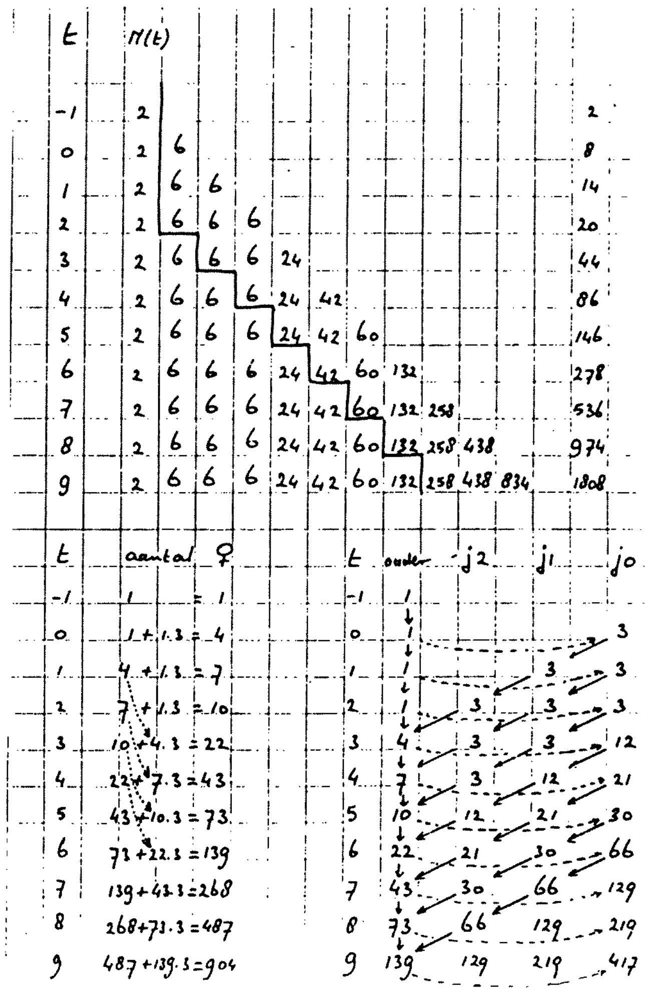
Tot welke prestaties veel leerlingen in staat zijn wanneer ze lange tijd op de geschetste manier hebben kunnen werken, wordt duidelijk als ze het *'Rattenprobleem'* krijgen voorgeschoteld. Daar waar de meeste docenten niet in staat zijn binnen een half uur de oplossing te vinden, blijken de leerlingen die het kùnnen oplossen, die oplossing ook binnen het kwartier te vinden. Ze zijn zichtbaar trots als ze horen dat veel docenten dit probleem niet, of niet snel kunnen oplossen.
Voor degenen die het probleem niet kennen:

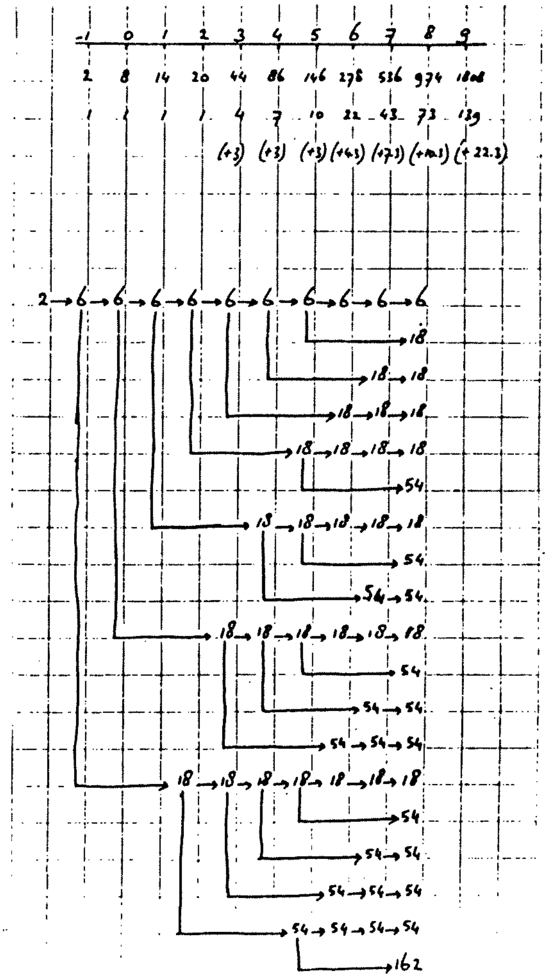
> Maarten 't Hart beschrijft in *'Ratten'* de groei van een rattenpopulatie.
> Als je aanneemt dat één paar ratten iedere veertig dagen zes jongen voortbrengt, waaronder drie vrouwtjes die op hun beurt na 120 dagen in staat zijn om jongen voort te brengen, dan is dat ene paar na één jaar uitgegroeid tot een aantal van 1808 ratten.

De vraag luidt, heel simpel: "Controleer de uitkomst 1808."

Uit de meer dan twintig echt verschillende oplossingen heb ik er vijf gekozen, die allemaal komen van de echte A-leerlingen. (Zie volgende pagina.)

Het leerproces dat leerlingen binnen het wiskunde A-programma doorlopen (als ze daartoe in de gelegenheid worden gesteld), maakt ze tot kritische, zelfstandige mensen, die voldoende zelfvertrouwen opdoen om nieuwe problemen zelf te lijf te gaan. Het meest aardige daarbij vind ik dat dit met name geldt voor leerlingen, die na de formele wiskunde van klas 1 tot en met 3, elk zelfvertrouwen hadden verloren. Deze leerlingen werd in het verleden de toegang tot het heiligdom van de wiskunde ontzegd, omdat ze, wiskundig gezien, kneusjes waren.





Bij het vak wiskunde A blijken ze, misschien wel omdat ze door een minder goede formele kennis gedwongen zijn zich dieper met de problemen bezig te houden, vaak een kritischer houding aan te nemen dan een deel van de leerlingen die ook wiskunde B doen.
Al met al ben ik van mening dat realistisch wiskundeonderwijs, zoals dat bij het vak wiskunde A gehanteerd wordt, veel bredere en ook diepere leereffecten bij de leerlingen oplevert dan het mechanistisch onderwijs.
Hoewel ik voor mezelf ervan overtuigd was dat dit soort van leren, met name op de langere termijn, positieve effecten heeft, was ik toch erg nieuwsgierig naar de ervaringen van oudleerlingen-met-wiskunde A in het vervolgonderwijs. Per slot van rekening waren ze daar eenlingen in een studiegroep van studenten, die allemaal wiskunde I en eventueel wiskunde II hadden gedaan. Daarbij is de aanpak bij een vervolgstudie meestal ook geen duidelijk voorbeeld van realistisch onderwijs. Ik vreesde een beetje de problemen die de leerlingen zouden krijgen bij een formele aanpak.

Uit de antwoorden op een serie vragen die ik alle oudleerlingen een jaar na hun examen had toegestuurd, kwamen heel duidelijk een aantal bevestigingen van mijn vermoedens naar voren:

- Onderwerpen als limieten, continuïteit en integreren ontbreken bij wiskunde A. Daarin hadden ze een achterstand ten opzichte van hun medestudenten. Hoewel ze daar dus een behoorlijke brok inhaalwerk te doen hadden (met een erg formeel karakter), werd dat niet als problematisch ervaren.
- Het onderdeel kansrekening en statistiek behoort zowel tot het vak wiskunde A als tot het vak wiskunde I. Het lijkt voor de hand te liggen dat dit vak, zoals het gedoceerd wordt bij de vervolgopleidingen, beter aansluit op de vrij theoretische opzet binnen wiskunde I, dan op de tamelijk intuïtieve opzet binnen wiskunde A.
Het tegendeel blijkt waar te zijn. Alle oudleerlingen die in hun eerste jaar enig statistiekvak hebben gevolgd, zijn ervan overtuigd dat ze een zeer grote voorsprong hebben op hun medestudenten. Dat is eigenlijk helemaal niet verwonderlijk. Binnen de statistiek is het manipuleren van formules niet zo'n groot probleem. De modelvorming, het kritisch beschouwen van een probleem en de keuze van de juiste aanpak zijn veel belangrijker. Dat is iets wat juist binnen het vak wiskunde A veel aandacht heeft gekregen.
- Het valt de meeste oudleerlingen op dat zij veel meer bezig zijn met het *waarom* van formules dan hun medestudenten. Zij hebben het gevoel dat zij veel meer eerst willen weten waar een formule vandaan komt en wat die nu eigenlijk betekent, voordat ze ermee gaan werken.

De toetsing van realistisch wiskunde-onderwijs

Uit het voorgaande mag duidelijk geworden zijn dat realistisch onderwijs (en wiskunde A is daarvan een voorbeeld) meer omvat dan het kunnen werken met formules en standaardalgoritmen. Natuurlijk dienen leerlingen technieken wel te kunnen toepassen, maar ze zijn geen einddoel op zichzelf.
Toetsing van het vak wiskunde A heeft als essentiële onderdelen:
- wiskundige technieken en het werken met formules;
- het kiezen van een voor het probleem geeigende oplossingsstrategie;
- het kritisch en goed beargumenteerd beoordelen van uitspraken en situaties.

Vooral wat de laatste onderdelen betreft, is het noodzakelijk dat toetsvragen bij wiskunde A nieuw zijn voor de leerlingen. De leerling dient namelijk te kunnen tonen dat hij zijn opgedane kennis kan toepassen in een onbekende, nieuwe context. Verder dient in de probleemstelling zo weinig mogelijk direct af te lezen te zijn hoe het vraagstuk moet worden opgelost. Dit vereist een vraagstelling die zo open mogelijk is.
Bij de 'normale' testen, die (schriftelijk) in één lesuur dienen te worden gemaakt, blijken bovenstaande criteria nog weleens tot problemen te leiden. Wanneer je van de leerlingen vraagt om kritisch en gefundeerd bezig te zijn met een probleem, dan mag je er eigenlijk niet vanuit gaan dat ze daarbij allen een zelfde denksnelheid en diepgang hanteren. In de praktijk blijkt dan vaak dat, juist de leerling die zich erg goed in het probleem verdiept, in tijdnood komt. Daarnaast zijn er ook prachtige problemen die zich niet lenen voor een schriftelijke test van vijftig minuten. Om deze redenen zijn werkstukken eigenlijk een wezenlijk onderdeel van het vak wiskunde A. Op die manier kan een leerling pas echt goed laten zien wat hij *kan*.

Een echt triest voorbeeld van hoe het beslist *niet* moet, als je denkt aan toetsing van wiskunde A, levert het examen van 1986. Dit examen is een aaneenrijging van zeer gesloten opdrachten ("bereken ... met behulp van ..."), waarbij slechts gevraagd wordt om voorgeprogrammeerde wiskundige rekentechnieken toe te passen.
Een uitvoeriger commentaar op dit examen is te lezen in de *Nieuwe Wiskrant* van juli 1986.

Het is te hopen dat het examen van 1986 geen indicatie is van dat wat ons in de toekomst te wachten staat aan eindtoetsen bij het vak wiskunde A. Mocht dit wel zo zijn, dan is naar mijn mening het vak ten dode opgeschreven. Hoewel het officieel niet verplicht is, wijst de praktijk uit dat onderwijs zich laat richten door een examentraditie.
Een redelijke garantie voor zinvol, niet-mechanistisch wiskundeonderwijs is, naar mijn mening, het stellen van de eis dat de examens ieder jaar opnieuw verrassingen, nieuwe soorten vraagstukken dienen te bevatten. Alleen dan zal het 'onderwijzen' van wiskunde A niet de gelegenheid krijgen om te vervallen tot dat wat wiskunde I geworden was: het aanleren van een aantal standaardstrucjes om het standaardexamen voldoende te kunnen maken.

Tenslotte wil ik aan de hand van één onderwerp uit wiskunde A laten zien wat er, ook bij schriftelijke testvragen, mogelijk is. Het onderwerp is *Lineair Programmeren*.
De techniek om een LP-probleem op te lossen is vrij simpel. Bij twee variabelen de grafische methode, bij drie variabelen (eventueel) de randenwandelmethode. Voor nog meer variabelen doet de computer al het werk. (Simplexmethode). Voor wat betreft de wiskundige technieken is het LP-probleem dus eigenlijk tamelijk oninteressant. Binnen het kader van wiskunde A zijn het opstellen van het model en evaluatie van de oplossing eigenlijk veel wezenlijker. In veel testen waarin LP-problemen aan de orde komen, wordt het model al gegeven en beperkt de vraagstelling zich tot de oplossing van dat ene specifieke probleem.

opgave 3.
Een margarinefabrikant (concurrent van die van opgave 1) maakt twee soorten, n.l. gewone- en dieetmargarine.
Voor beide soorten beschikt hij over onbeperkte hoeveelheden grondstoffen.
Voor iedere soort is er een aparte machine, waarin de margarine wordt bereid. De machine voor de gewone margarine heeft een dagcapaciteit van 1000 kilo; de dagcapaciteit van de machine voor de dieetmargarine is 750 kilo.
Na de bereiding worden beide soorten in één machine op maat gesneden (blokjes van 250 gram) en verpakt. Het eerste deel van een dag wordt er alleen 'gewone' verwerkt. Dan wordt de machine gereinigd en ingesteld op de 'dieet' en het tweede deel van de dag wordt er uitsluitend 'dieet' verwerkt. De twee delen van de dag zijn niet noodzakelijk even lang. De totale tijd dat de machine maximaal per dag kan werken is 7 uur en 30 minuten.
Per uur verwerkt de snij- en pakmachine 150 kilo 'gewone' of 225 kilo 'dieet'.
Tenslotte worden de pakjes margarine (van 250 gram) verpakt in dozen van 20 stuks. De man die dat werk verricht kan per dag maximaal 250 dozen verwerken.

De winst op een pakje 'gewone' is 20 cent, voor de 'dieet' is dat 15 cent.

a) Bepaal de beperkende voorwaarden en de winstfunctie. Gebruik als eenheid de pakjes van 250 gram.

b) Teken het toegestane gebied en daarin een aantal isowinstlijnen.

c) Bepaal de produktie van de twee soorten, waarvoor de winst (per dag) maximaal is.

De winsten zijn zo groot dat de fabrikant daar iets mee wil gaan doen. Hij kan twee kanten op:
De eerste mogelijkheid is dat hij zijn winsten gaat verlagen. Hij besluit de prijs van de 'gewone' te verlagen.

d) Tot welke grens kan hij de winst verlagen, zonder dat het optimale produktieschema van opgave c) daardoor verandert?

De tweede mogelijkheid om die leuke winsten te gebruiken is een uitbreiding van de capaciteiten, zodat er nog meer winsten komen.

Er zijn twee mogelijkheden:
de snij- en pakmachine vervangen door een snellere, zodat de maximale bereidingscapaciteit kan worden benut;
òf
hij neemt nog iemand in dienst die de dozen inpakt, zodat daardoor geen beperkingen meer worden opgelegd.

e) Welk advies zou jij hem geven, als je alleen maar let op het zo groot mogelijk maken van de winst?

De hierboven afgedrukte schoolonderzoekopgave levert bij het formuleren van één van de beperkende voorwaarden bij onderdeel *a* grote problemen, terwijl na het oplossen van het gestelde probleem, de onderdelen *d* en *e* varianten op het oorspronkelijke probleem aan de orde stellen. Hoewel dit vraagstuk verder gaat dan alleen maar het testen of de leerlingen in staat zijn een LP-probleem op te lossen, bleek de verzwaring bij de onderdelen *a, b* en *3e* geen grote problemen op te leveren.
