

Wiskunde A in 3-vwo

J. Remmits / van Maerlant College, Eindhoven

T. Goris / Strabrecht College, Geldrop

Samenvatting

In het kader van een afstudeerproject aan de NLO maakten de auteurs een leerlingpakket voor 3 vwo over het onderwerp 'Kijken naar Grafieken'.

Drie weken geanimeerde lessen waren hiervan het resultaat. De eindopdracht paste geheel in één van de basisgedachten achter Wiskunde A: laat de leerlingen zelf produceren en ontdekken; de eindtoets diende door de leerlingen ontworpen te worden. Een verslag.

De hierna te bespreken lessencyclus is ontwikkeld in het kader van een afstudeerproject aan de NLO te Tilburg, alwaar men ooit vermeld had dat er in de bovenbouw van het vwo 'iets moois' aan de hand was. Allereerst werd de filosofie achter wiskunde A uitvoerig bestudeerd; een onderzoek waarvoor deze 'Nieuwe Wiskrant' als belangrijkste informatiebron diende. Gewapend met deze kennis werd vervolgens een A-achtige lessencyclus voor de onderbouw geschreven.

Het leerstofpakket werd ontwikkeld voor twee 3-vwo klassen van het Strabrecht College te Geldrop. Op deze school wordt de Wageningse Methode gehanteerd en in 'onze' twee klassen van docent Henk van Mil gebeurt dat in groepswerk. Mede geïnspireerd door het feit dat boekje 32 'Functies 1' op het programma stond, werd besloten de lessencyclus over het dankbare onderwerp 'Grafieken' te laten gaan. De volgende doelstellingen werden geformuleerd:

- de lessencyclus moet gebaseerd zijn op de filosofie achter wiskunde A;
- leerlingen kunnen kritisch kijken naar grafieken (en wellicht daardoor ook naar andere informatiebronnen);
- leerlingen kunnen omgaan met open vragen waaruit discussies kunnen ontstaan; men leert samenwerken;
- leerlingen maken op intuïtieve manier kennis met 'bovenbouw'-wiskunde: differentiëren, limieten & asymptoten en modelvorming.

De realisatie van het lessenpakket was een tijdrovende en intensieve bezigheid. Allereerst werden in tijdschriften en kranten grafieken gezocht; contexten verzinne men immers niet achteraf! Het Amerikaanse TIME-magazine bleek hierbij een uiterst geschikte bron. Met een grote hoeveelheid grafieken als inspiratiebron werd de keuze van de onderwerpen gemaakt. Vervolgens werd een veel te grote hoeveelheid opgaven bedacht en uitgewerkt met als adagium voor onze samenwerking: 'Streven naar consensus in plaats van compromis'. Een definitieve selectie uit dit materiaal deed de lessencyclus ontstaan.

Het leerstofpakket

Daar het niet mogelijk is het hele pakket hier te reproduceren wordt volstaan met een globale omschrijving, geïllustreerd met een aantal representatieve voorbeelden van opgaven en de resultaten daarvan.

We hebben bewust gekozen om geen hoofdstukken en nummeringen van de opgaven aan te geven. Dit had tot gevolg dat de leerlingen de opgaven namen gingen geven, bijvoorbeeld: de 'defensie-opgave' of de 'fiets-opgave'. Hierdoor wordt het feit dat er met contexten gewerkt wordt benadrukt.

Het eerste onderwerp had als titel 'Assen aanpassen'. Hierin werd beoogd de leerlingen te laten zien dat er met de vorm van een grafiek nogal gemanipuleerd kan

worden door bijvoorbeeld de schaalindelingen te veranderen, of door de roosters in een vreemd perspectief te tekenen. Een voorbeeld hiervan is de 'defensie-opgave'.

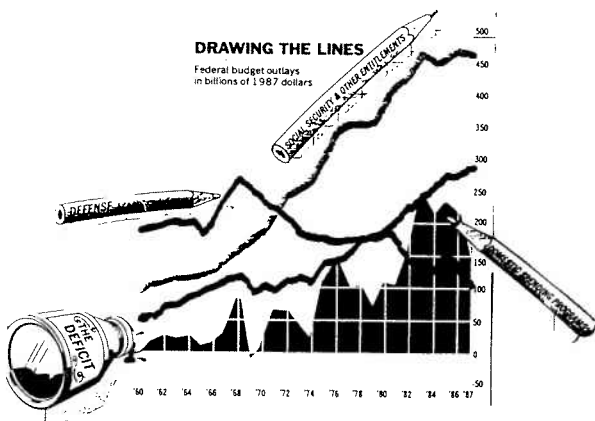
Defensie

Hoewel de presidentsverkiezingen in de Verenigde Staten pas in november 1988 plaatsvinden, beginnen er nu al mensen zich kandidaat te stellen. Zoals het er nu naar uitziet zal de strijd gaan tussen George Bush (Republikein) en Gary Hart (Democraat). Ronald Reagan (Republikein) kan niet meer gekozen worden, omdat hij er al twee termijnen op heeft zitten. In de komende verkiezingsstrijd wordt er door de Republikeinen uiteraard weer niets dan negatiefs over de Democraten verteld en andersom. Grote inzet voor deze strijd zal zijn: het defensiebudget. Hieronder zie je een redelijk objectieve grafiek over dit budget in de afgelopen jaren.

LAATSTE NIEUWS

Presidentskandidaat Democraten

Hart trekt zich terug



Je ziet dat de grafiek van de defensieuitgaven in 1968 een opvallende piek vertoont en vanaf 1980 sterk stijgt. Kun je deze piek en stijging verklaren?

Stel je nu eens voor dat je campagneleider bent van George Bush. Verander de grafiek zó dat blijkt dat Reagan eigenlijk niet zoveel méér aan defensie uitgegeven heeft dan zijn Democratische voorganger Jimmy Carter.

Teken de grafiek in het geval dat je campagneleider bent van Gary Hart, en dus vindt dat Reagan belachelijk veel geld aan defensie heeft besteed.

Je kunt deze grafieken ook anders tekenen door niet alleen de schalen te veranderen, maar door een ander tijdsinterval te kiezen. Je zou bijvoorbeeld het begin-

punt van de grafiek in een ander jaar dan 1960 kunnen leggen.

Doe dit en probeer op deze manier de verschillende stellingen nog duidelijker naar voren te laten komen.

Uit deze opgave blijkt dat er een klein nadeel kleeft aan het gebruik van actuele onderwerpen; soms haalt de actualiteit je in nog voordat het pakket gedrukt is. De reacties van de leerlingen lieten zien dat er een storende fout in de tekst zit. De suggestie wordt namelijk gewekt dat 'vierkante' grafieken 'redelijk objectief' zijn, en dat terwijl het doel van dit onderdeel juist was te laten zien dat geen enkele grafiek 'objectief' kan zijn.

De eerste vraag werd gesteld om de leerlingen beter naar de grafiek te laten kijken en om de algemene ontwikkeling te peilen. In ieder groepje bleek er wel iemand te zijn die uitstekend op de hoogte was van de politieke geschiedenis van de VS. Niet zelden ontstonden er discussies over Reagan, kernwapens, SDI, etc. De bedoeling van de tweede en derde opgave was voor iedereen duidelijk en werd vaak over-enthousiast aangepakt. Uitklapbare grafieken van 40 cm lang en 4 cm hoog waren geen uitzondering. In gesprekken werd duidelijk gemaakt dat dit de geloofwaardigheid niet ten goede kwam en werd er vervolgens gezocht naar criteria waar een gemanipuleerde grafiek aan moest voldoen om toch nog geloofwaardig te zijn.

Het volgende onderdeel heet 'Grafieken vertellen'. Hierin wordt van een aantal grafieken de vorm geïnterpreteerd; het maakt nogal wat uit of een stijgende grafiek 'hol', 'bol' of 'recht' loopt. Dit verschil werd duidelijk gemaakt in een opgave waarin men moest onderzoeken of de grafiek een vertraagde, versnelde, dan wel een constante beweging voorstelde. Tot onze grote verbazing werd dit probleem regelmatig intuïtief met behulp van raaklijnen opgelost! Vervolgens kregen de leerlingen de opdracht een grafiek te tekenen aan de hand van een context. We geven hiervan twee voorbeelden: de Tsjernobyl-opgave en de fiets-opgave.

Tsjernobyl

Nu alweer een jaar geleden was heel Europa in rep en roer over de ramp in de kerncentrale bij Tsjernobyl. Bij die ramp is toen een enorme hoeveelheid radio-actief materiaal vrijgekomen. Radio-actieve straling is heel gevaarlijk en het vervelende is dat dit materiaal heel lang kan blijven stralen. Afhankelijk van de soort stof varieert die tijd tussen een paar seconden en enkele eeuwen. Bovendien houdt het stralen niet zomaar in één keer op; de hoeveelheid straling wordt geleidelijk minder. Daarom spreekt men bij radio-actief materiaal over de halfwaardetijd. Dit is de tijd waarna de helft van de oorspronkelijk aanwezige hoeveelheid niet meer straalt.

De stad Tsjernobyl is het ergst getroffen door deze ramp; de hele stad moest worden geëvacueerd. Er is daar onder andere 120 kilo cesium neergeslagen. Dit cesium heeft een halfwaardetijd van 2 jaar.

Teken op grafiekenpapier het verband tussen het aantal nog radio-actieve kilo's cesium en de tijd.

Stel dat een hoeveelheid van 7,5 kilo radio-actief cesium verspreid over de stad geen gevaar meer oplevert. Wanneer kan men dan weer naar Tsjernobyl terugkeren?

Als de ramp nog erger was geweest en er maar liefst 240 kilo cesium was vrijgekomen, wanneer kan men dan terugkeren? Teken voor deze hoeveelheid ook een grafiek in hetzelfde rooster.

Er is ook een hoeveelheid strontium vrijgekomen, maar niet zo veel als cesium. Dat is maar goed ook, want strontium heeft een halfwaardetijd van 4 jaar.

Als er nu eens 120 kilo van dit strontium neergeslagen was, hoelang zou Tsjernobyl dan onbewoonbaar zijn? Teken ook hier weer de grafiek van in hetzelfde rooster.

Wanneer is er helemaal geen radio-actief cesium meer aanwezig?

Deze opgave spreekt voor zich; de leerlingen maken kennis met een exponentieel verband en met een horizontale asymptoot. De laatste vraag leverde mooie resultaten op. Wiskundig gezien is er natuurlijk altijd radio-activiteit aanwezig, maar natuurkundig gezien houdt het stralen wel ooit op. De discussies over dit verschil werden gestuurd door het volgende 'model': Stel dat in deze klas om de vijf minuten de helft van het aantal aanwezige leerlingen naar huis mag. Wanneer is het lokaal dan leeg? Aanvankelijk vonden nogal wat leerlingen een wiskundige beschrijving van een proces die 'ergens ver weg' niet meer klopt moeilijk te accepteren.

De Fiets

En nu iets heel anders. We gaan fietsen in Zuid-Limburg. Daar heb je voor fietsers hele vervelende heuveltjes en daar gaan we dus overheen. Op de volgende bladzijde staat de eerste heuvel die we tegenkomen schematisch afgebeeld.

Je staat bij '0' en ziet dat het 200 meter verder aardig steil omhoog gaat. Nu kun je twee dingen doen: heel rustig naar het begin van de helling peddelen, of zorgen dat je met een enorme vaart aan de klim begint. Ook het afdalen doet iedereen anders: niet trappen omdat je toch vanzelf naar beneden gaat, of juist extra hard trappen als je een snelheidsmaniak bent.



Ga voor jezelf eens na hoe jij over deze heuvel heen zou fietsen. Bekijk de tekening goed, misschien stap je zelfs wel af halverwege de helling! Schrijf jouw manier van fietsen zo nauwkeurig mogelijk op.

Maak een snelheid-afstand grafiek van je verhaal. Op de snelheid-as hoef je geen getallen te zetten, het gaat alleen om de vorm van de grafiek.

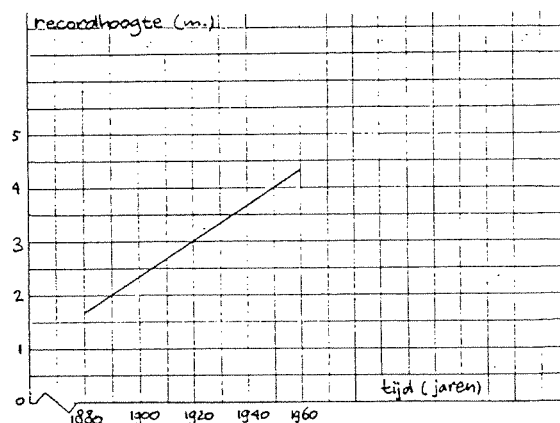
Maak ook een inspanning-afstand grafiek. Bedenk eerst hoe je die inspanning objectief kunt meten en zet deze grootte bij de verticale as.

Deze opgave leverde schitterende resultaten op. Groot discussiepunt was of je nu wel of niet tegen de helling op kan fietsen. In veel verhalen werd een grote dosis creativiteit verwerkt ("Ik wacht tot er een brommer voorbij komt die me naar boven sleept.") Het vertalen van deze verhalen naar een grafiek leverde nogal wat moeilijkheden op. In plaats van de resultaten hier te laten zien, nodigen wij de lezer uit deze opgave zelf te proberen!

'Grafieken voorspellen' is de naam van het volgende onderwerp. Omdat er nogal wat voorspellingen gedaan worden aan de hand van grafieken, was dit een noodzakelijk onderdeel. We wilden de leerling duidelijk maken dat die voorspelling niet alleen afhangt van de vorm van de grafiek, maar ook van de inhoud van de context.

Records

In een boek over de geschiedenis van de sport vonden we de volgende grafiek over de verbetering van het wereldrecord polsstokhoogspringen:

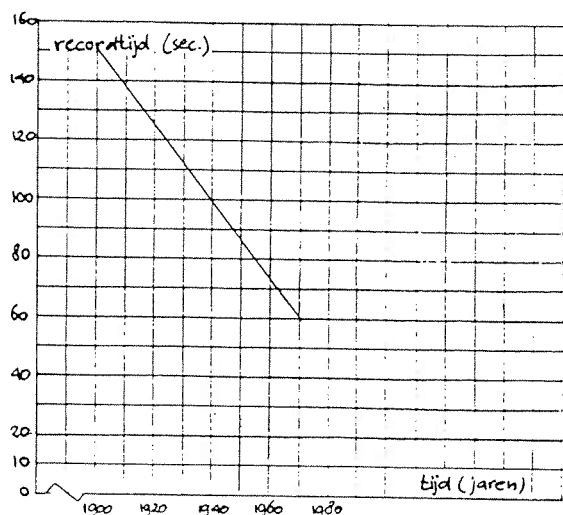


Geef een voorspelling van het wereldrecord in het jaar 2050 met behulp van deze grafiek.

Op de volgende bladzijde is te zien wat er met het wereldrecord honderd meter borstcrawl voor dames gebeurd is.

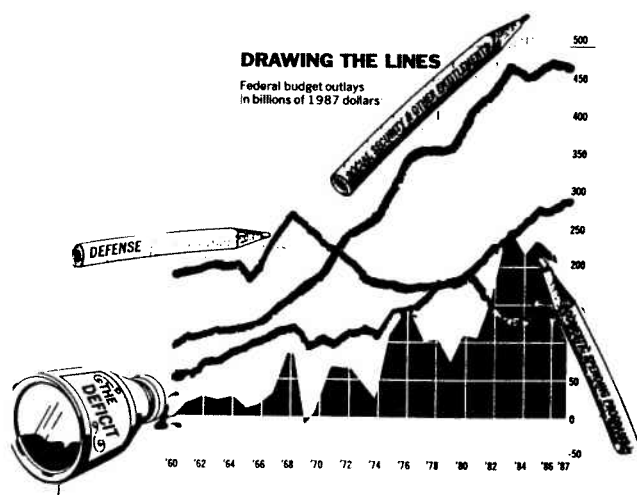
Geef ook hier eens een voorspelling van het record in het jaar 2050.

Teken jouw toekomstverwachting van de beide records in de twee roosters.



We gaan nog eens terug naar de VS-defensie grafiek. Het verdere verloop van die grafiek hangt natuurlijk af van wie die verkiezingen, die inmiddels al weer dichterbij gekomen zijn, gaat winnen.

Teken het verloop van die grafiek ná 1988, zowel voor het geval dat de Republikeinen winnen als dat de Democraten winnen.



Bij de eerste voorspelling keken de leerlingen niet of nauwelijks naar de context en tekenden de grafiek rechthoekig door. We hebben hier niet op gereageerd. Bij de tweede voorspelling gebeurde, zoals verwacht, hetzelfde en men kwam uit op een tijd van nul seconden. Het was duidelijk dat dit onmogelijk was; er ontstonden discussies over het menselijk vermogen en men liet vervolgens de grafiek asymptotisch naar ± 40 seconden lopen. Ook de polsstok-grafiek werd hierna verbeterd. Een mooi voorval: één groepje liet de grafiek na 2050 ineens weer dalen en rond de 25 seconden uitkomen. De verklaring: rond die tijd wordt er vast wel een soort aardbeienjam ontwikkeld die de prestaties aanzienlijk doet verhogen!

Bij de 'defensie-opgave' was de verwachting dat de leerlingen voor de nodige informatie terug zouden bladeren naar de vorige defensie-opdracht. De leerlin-

gen hadden die informatie van ruim 2½ week echter nog geheel paraat. Een bewijs te meer dat contexten echt opgenomen worden en niet alleen gebruikt worden om een opdracht te kunnen maken.

Het pakket eindigt met een tweetal opgaven waarin men uit reële gegevens een grafiek moet tekenen. Er ontstaat een puntenwolk. Aannemelijk wordt gemaakt dat daar best een rechte lijn doorheen getrokken mag worden. Een verschraving van de werkelijkheid om er vervolgens een wiskundig model van te maken; van deze lijn wordt de vergelijking opgesteld en aan de hand van deze vergelijking worden een aantal voorspellingen berekend.

De eindopdracht

Dat het toetsen van wiskunde A complicaties oplevert is inmiddels iedereen wel bekend. Een verwijzing naar eerder gepubliceerde artikelen of naar 'Mathematics, insight and meaning' van Jan de Lange Jzn. volstaat. Wij kozen derhalve voor de volgende eindopdracht: 'De groepen maken zelf een toets'. De voordelen hiervan zijn:

- Uit de resultaten blijkt goed wat de leerlingen zelf belangrijk vonden uit dit pakket en hoeveel ze er van opgestoken hebben. Het zelf bedenken van relevante vragen is vaak moeilijker dan het beantwoorden van die zelfde vragen; het is alleen mogelijk indien men boven de stof staat. Er werden dus hoge eisen aan de leerlingen gesteld!
- De 'geest' van het pakket zet zich voort in de eindopdracht: het discussiëren wordt gewaarborgd, al is het maar in het bespreken van een eventuele taakverdeling. De openheid blijft gehandhaafd; een opdracht die meer open is, is nauwelijks denkbaar.
- De kans dat de toets door een deel van de groep gemaakt wordt is klein: één lesuur is veel te kort, waardoor waarschijnlijk tot een taakverdeling besloten zal worden waarin iedereen deelneemt.
- De beoordeling wordt meer een waardering van geheel dan het aanstrepen van fouten.

De leerlingen kregen een aantal criteria waar hun toets aan moest voldoen.

- Niveau: De toets moet te maken zijn door klasgenoten, maar mag natuurlijk ook niet te eenvoudig zijn.
- Originaliteit: Probeer zelf grafieken te zoeken of verhalen te bedenken waar grafieken van getekend kunnen worden.
- Realiteit: Zorg ervoor dat je gegevens kloppen, laat bijvoorbeeld een hardloper geen 100 km/u lopen.
- De toets moet een weergave zijn van hetgeen je uit het pakket geleerd denkt te hebben.
- Er moet een keuze gemaakt worden tussen een toets voor de hele groep, of een individuele toets.
- De toets moet zó ingeleverd worden dat hij zo gekopieerd kan worden om door iedereen gemaakt te worden.
- Bij de toets moet een aparte uitwerking van de opgaven geleverd worden.

De resultaten

De toetsen zijn beoordeeld aan de hand van een lijst met aandachtspunten. Op die lijst stonden uiteraard bovengenoemde criteria, aangevuld met een aantal punten die niet in de beoordeling meegenomen zijn maar wel interessant zijn, zoals:

- openheid van de vragen;
- vakoverstijgende vragen, algemene ontwikkeling;
- inspiratiebron van de opgave;
- groeps- of individueel te maken opgave.

Slechts twee van de zestien toetsen waren voor individueel gebruik bestemd. De contexten hadden voornamelijk betrekking op de eigen beleavingswereld; slechts vijf van de ± 90 voorkomende opgaven hadden geen context.

De beoordeling, een zeer tijdrovende bezigheid, resulteerde in een geschreven waardering waarin alle punten van positieve en negatieve kritiek toegelicht werden. Deze waardering is vervolgens met de leerlingen besproken. Tot slot is hier een toets in zijn geheel opgenomen. (zie volgende pagina) Toegegeven zij dat dit zeker niet de minst kwaliteitsvolle is. De toets is gemaakt door vier meisjes die tot de 'matige' wiskundeleerlingen gerekend moeten worden!

Tot slot

De drie weken die het duurde dit pakket door te werken zijn afgesloten met een enquête onder de leerlingen. Daaruit blijkt dat zij deze lessencyclus best konden waarderen. Contexten uit het dagelijks leven spraken behoorlijk aan en men ervaarde het als positief dat er in de wiskundeles ook andere onderwerpen ter sprake konden komen. De eindopdracht werd als origineel ervaren, hetgeen ook duidelijk bleek uit de grote hoeveelheid tijd die de meeste groepjes eraan besteed hadden. Ter afsluiting volgen hier een drietal antwoorden op enquêtevragen:

- Wat vond je van de duidelijkheid van de opdrachten?

'Wel duidelijk, bij sommige moest je eerst wel even denken, maar daar ben je hier voor.'

- In deze lessen is de nadruk gelegd op het samenwerken, wat vond je daarvan?

'Goed, je hoort meerdere meningen, zodat je antwoord beter wordt en je eigen idee ook wel verandert.'

- Heb je het gevoel dat je door het werken met dit boekje iets geleerd hebt en wat dan wel?

'Ja, dat er meerdere oplossingen voor een opdracht mogelijk zijn en dat jij dus niet altijd gelijk hebt als de ander iets anders heeft.'

1.) Een tijdje geleden zaten we te praten over inbraken.
De meningen over het aantal inbraken per jaar waren nogal verdeeld.

- Hoe hoog schatten jullie het aantal inbraken van vorig jaar per 100.000 in Nederland ?

Benieuwd naar wat de werkelijke cijfers waren, hebben we naar gegevens gezocht. In een tijdschrift vonden we onderstaande grafiek.

- Wat vertelt deze grafiek ons ?

- Is er iets merkwaardigs aan de grafiek te zien ?

- Zou het verschil maken uit welk land de gegevens komen ?
Waarom ?

- Zouden deze gegevens uit een welvarend of armoedig land komen ?
Waarom ?

- Verander deze grafiek zodanig dat het lijkt alsof het aantal inbraken nauwelijks is gestegen ?

Een fabrikant in alarm- en beveiligings-systemen maakt van deze grafiek gebruik in een advertentie. Hij wijzigt hem echter zo dat het de verkoop zal stimuleren.

- Hoe zal zijn grafiek eruit zien ?
(Tekenen)

Een jaar later zet hij het verloop van de verkoop van het afgelopen jaar in een grafiek uit.

- Hoe verloopt zijn grafiek?
(Bepaal zelf of de verkoopcijfers zijn gestegen of gedaald (en waarom), en maak zelf een as-indeling. Je hoeft er geen getallen bij te zetten.)

