Meer mogelijkheden met matrices (1)

R. Geel
NLO Ubbo Emmius, Groningen

Samenvatting

Generalisatie van het klassieke matrixprodukt leidt tot nieuwe toepassingsmogelijkheden. In een serie van drie artikelen (waarvan dit het eerste is) laten we een aantal toepassingen van het gegeneraliseerde matrixprodukt de revue passeren.

Het klassieke matrixprodukt kent vele interessante toepassingsmogelijkheden. Een aantal toepassingen heeft inmiddels via Wiskunde A zijn weg gevonden naar het voortgezet onderwijs (zie bijvoorbeeld [1]) en is thans dan ook vrij algemeen bekend in onderwijskringen.
Minstens even interessant, maar tot nu toe helaas veel minder bekend, zijn echter de toepassingsmogelijkheden die het zogenaamde *gegeneraliseerde* matrixprodukt biedt. Vandaar dat wij in dit artikel (het eerste in een serie van drie) aandacht willen besteden aan het gegeneraliseerde matrixprodukt en één van haar toepassingen.

In de paragraaf *'Over het 'hoe en waarom' van verbindingsmatrices'* bespreken we een bekende toepassing van het klassieke matrixprodukt. Bij de behandeling van dit onderwerp hebben we gekozen voor een benaderingswijze die enigszins afwijkt van de gebruikelijke.

In de paragraaf *'Heer Bommel en de Oerwoudrally'* introduceren we vervolgens een probleem uit de grafentheorie (het zogenaamde 'kortste route'-probleem), dat in de daarop volgende paragraaf *'De snelste route: een analyse'* geanalyseerd wordt. Deze analyse leidt uiteindelijk (dankzij de benaderingswijze die dezelfde is als in de eerste paragraaf) op een volkomen natuurlijke wijze tot een generalisatie van het klassieke matrixprodukt.

Nadat in de paragraaf *'Het gegeneraliseerde matrixprodukt'* uit de doeken is gedaan wat we in de wiskunde precies verstaan onder het gegeneraliseerde matrixprodukt, besluiten we dit artikel met de paragraaf *'Een computerprogramma voor de Oerwoudrally'*, waarvan de titel voor zichzelf spreekt.

Over het 'hoe en waarom' van verbindingsmatrices

We beschouwen de volgende 'kaart' met vier steden, A, B, C en D die onderling verbonden zijn door een zestal wegen:

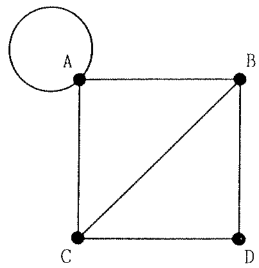


Fig. 1

Eén van de zes wegen is een rondweg, die vanuit A weer naar A leidt zonder B, C of D aan te doen.

Figuur 1 is een voorbeeld van een zogenaamde *graaf*. Ruwweg gesproken is een graaf een verzameling punten die onderling al dan niet verbonden zijn door een aantal lijntjes. Deze verbindingslijntjes noemt men ook wel *takken*.
Het is mogelijk om de situatie van figuur 1 schematisch weer te geven in een zogenaamde *verbindingsmatrix* $M = (m_{ij})$, waarvan de elementen als volgt gedefinieerd zijn:

$$(1) \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als de punten i en j door een tak verbonden zijn} \\ 0 & \text{als de punten i en j niet door door een tak verbonden zijn} \end{cases}$$

(hierbij correspondeert A met punt 1, B met punt 2, etc.).

Voor de graaf van figuur 1 heeft de verbindingsmatrix dus de gedaante:

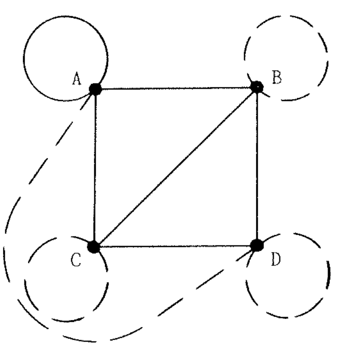
$$(2) \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uit deze symmetrische 4×4-matrix kunnen we onmiddellijk aflezen welke steden wel en welke steden niet met elkaar verbonden zijn, bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} m_{12} = m_{21} = 1, \text{ dus er loopt een weg tussen A en B,} \\ m_{14} = m_{41} = 0, \text{ dus er loopt geen weg tussen A en D,} \end{cases}$$

zodat het niet langer noodzakelijk is om de 'kaart' (graaf) van figuur 1 te hanteren.

De keuze van de getallen 0 en 1 in definitie (1) lijkt nogal willekeurig. Zo worden niet-bestaande wegen/takken tussen twee punten (zie de volgende figuur, waarin deze niet-bestaande wegen als onderbroken lijnen zijn weergegeven)



in de verbindingsmatrix gerepresenteerd door het getal 0. Waarom koos men hiervoor niet het getal −1 (om maar eens iets te noemen)? In dat geval zou de verbindingsmatrix er weliswaar anders uitzien, namelijk:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

maar nog steeds dezelfde informatie bevatten, bijvoorbeeld:

$m_{14} = m_{41} = -1$, dus er loopt geen weg tussen A en D.

De keuze van de getallen 0 en 1 in definitie (1) vindt zijn oorsprong (onder andere) in het feit, dat met deze keuze een praktische betekenis kan worden toegekend aan de machten M^2, M^3, etc. van de verbindingsmatrix M.
We lichten dit thans nader toe.

Stel, dat we willen tellen op hoeveel verschillende manieren we in figuur 1 van A naar D kunnen reizen langs een route die bestaat uit *twee* takken.

Uit de graaf van figuur 1 lezen we direct af, dat er twee van dergelijke tweestapsroutes zijn, namelijk ABD en ACD. Deze informatie kunnen we echter ook uit de verbindingsmatrix (2) halen zonder gebruik te maken van figuur 1.
Hiertoe geven we alle in aanmerking komende tweestapsroutes eens schematisch weer in figuur 2a:

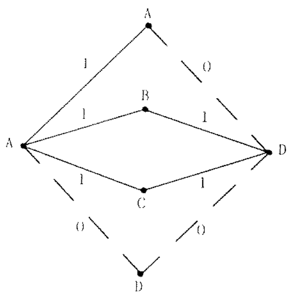


fig. 2a

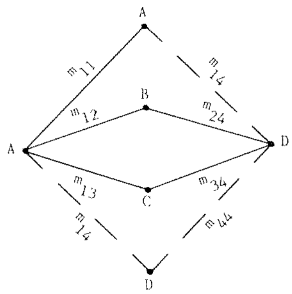


fig. 2b

In figuur 2a staan alle tweestapsroutes van A naar D die *in principe* mogelijk zijn. Bestaande takken zijn hierbij weergegeven door middel van een ononderbroken lijn, niet-bestaande takken zijn weergegeven door een onderbroken lijn. Verder is elke tak voorzien van het bijbehorende getal (0 of 1) uit de verbindingsmatrix. We kunnen nu het aantal tweestapsroutes van A naar D op de volgende manier berekenen:

a. vermenigvuldig in figuur 2a de beide getallen langs elk van de vier tweestapsroutes met elkaar, en
b. tel vervolgens de vier produkten bij elkaar op.

We vinden op deze wijze voor het aantal tweestapsroutes van A naar D:

$$(3) \qquad 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 2.$$

Het zal duidelijk zijn, dat deze berekening tot een correct resultaat leidt *dankzij de keuze van de getallen 0 en 1* in definitie (1): een *onmogelijke* tweestapsroute in figuur 2a bevat altijd minstens één factor 0 in het bijbehorende produkt en levert dus geen bijdrage tot het totale aantal tweestapsroutes van A naar D; een *mogelijke* tweestapsroute bevat daarentegen altijd twee factoren 1 in het produkt en draagt dus inderdaad één route bij tot het totale aantal tweestapsroutes van A naar D.

Formule (3) leert ons, dat het aantal tweestapsroutes van A naar D in feite gelijk is aan (zie figuur 2b):

$$(4) \qquad m_{11} \cdot m_{14} + m_{12} \cdot m_{24} + m_{13} \cdot m_{34} + m_{14} \cdot m_{44}$$

In deze uitdrukking herkennen we tot onze aangename verrassing het element $[M^2]_{14}$ van de produktmatrix M^2, en we concluderen dan ook algemeen:

het element $[M^2]_{ij}$ van de matrix M^2 stelt het aantal tweestapsroutes voor van punt i naar punt j.

Men rekent eenvoudig na, dat:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en we zien bijvoorbeeld dat:

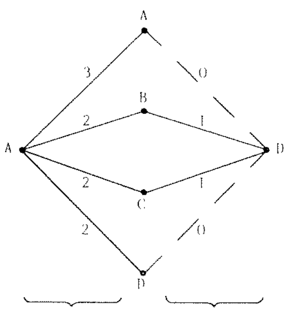
(i) het element $[M^2]_{11} = 3$ inderdaad het aantal tweestapsroutes van A naar A voorstelt (zie de routes AAA, ABA en ACA in figuur 1);

(ii) het element $[M^2]_{24} = 1$ inderdaad het aantal tweestapsroutes van B naar D voorstelt (zie de route BCD in figuur 1).

Nogmaals: de elementen van M^2 laten zich op deze praktische wijze interpreteren dankzij de keuze van de getallen 0 en 1 in definitie (1).

Eenvoudig is nu verder in te zien (en desgewenst is dit ook te bewijzen door middel van volledige inductie), dat algemeen het element $[M^k]_{ij}$ van de matrix M^k het aantal k-stapsroutes voorstelt van punt i naar punt j. We lichten dit thans toe voor het geval $k = 3$.

Laat de matrix $N = (n_{ij})$ gedefinieerd zijn door $N = M^2$. In figuur 3a staan schematisch weergegeven de aantallen tweestapsroutes van A naar A, B, C en D (deze aantallen volgen uit de eerste rij van de matrix $N = M^2$) en de eventuele takken (éénstapsroutes) van A, B, C en D naar D.



aantal twee-stapsroutes van A naar A, B, C en D

tak van A, B, C en D naar D

fig. 3a

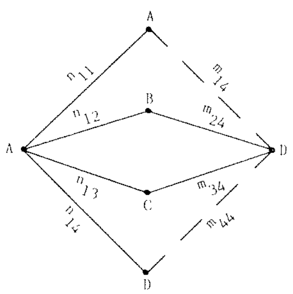


fig. 3b

Het is duidelijk dat het aantal driestapsroutes van A naar D nu weer berekend kan worden door in figuur 3a de beide getallen langs elk van de vier routes van A naar D met elkaar te vermenigvuldigen en de resultaten bij elkaar op te tellen:

(5) $3 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 0 = 4$

(corresponderend met de *vier* driestapsroutes AABD, ACBD, AACD en ABCD in figuur 1).

Formule (5) leert ons, dat het aantal driestapsroutes van A naar D in feite gelijk is aan (zie figuur 3b):

$$n_{11} \cdot m_{14} + n_{12} \cdot m_{24} + n_{13} \cdot m_{34} + n_{14} \cdot m_{44}$$

d.w.z. gelijk aan het matrixelement $[NM]_{14}$ oftewel $[M^3]_{14}$.
Algemeen geldt dus, dat het element $[M^3]_{ij}$ van de matrix M^3 het aantal driestapsroutes voorstelt van punt i naar punt j.

Tot besluit van deze paragraaf vermelden we tenslotte nog, dat ook de elementen $t_{ij}^{(k)}$ van de sommatrix $T^{(k)}$, gedefinieerd door:

(6) $T^{(k)} = M + M^2 + \ldots\ldots + M^k, \quad k \in \mathbb{N}$

een concrete interpretatie toelaten. Immers, omdat geldt:

$$t_{ij}^{(k)} = [M]_{ij} + [M^2]_{ij} + \ldots\ldots + [M^k]_{ij},$$

stelt $t_{ij}^{(k)}$ het aantal routes voor van punt i naar punt j, dat uit *hoogstens k* takken bestaat.

In het op de volgende pagina afgedrukte verhaal gaat een bekend probleem uit de grafentheorie schuil. Dit wordt duidelijk zichtbaar, wanneer we de graaf tekenen die hoort bij de tabel uit het verhaal (zie figuur 4).

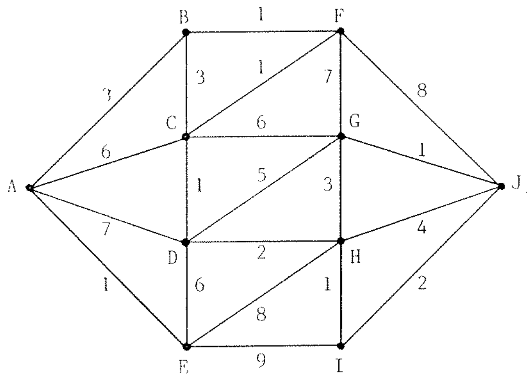


fig. 4

Tom Poes dient in deze graaf een route aan te geven van A naar J, die een zo kort mogelijke reistijd vergt. Dit komt neer op het oplossen van het zogenaamde 'kortste route'-probleem uit de grafentheorie:

> Laat gegeven zijn een graaf, waarbij aan elk van de takken een positief getal is toegekend.
> Gevraagd wordt om bij twee gegeven punten van de graaf een 'kortste' verbindingsweg aan te geven, d.w.z. een verbindingsweg waarbij de som van de getallen langs de takken van die weg zo klein mogelijk is.

In ons geval stellen de getallen langs de takken een tijdsduur voor en representeert de 'kortste' verbindingsweg de *snelste* reisroute tussen de twee gegeven punten. In andere toepassingen kunnen de getallen langs de takken afstanden of geldbedragen (bv. transportkosten) voorstellen. De 'kortste' verbindingsweg levert dan de *kortste* (gelet op afstand) of de *goedkoopste* (gelet op transportkosten) reisroute tussen de twee gegeven punten.

In de volgende paragraaf zullen we laten zien hoe het 'kortste route'-probleem kan worden opgelost met behulp van *matrixrekening*. Hierbij zullen we voor dezelfde aanpak kiezen als in de vorige paragraaf, zodat heel mooi de analogie zichtbaar wordt tussen het 'kortste route'-probleem en de problematiek van de verbindingsmatrices.

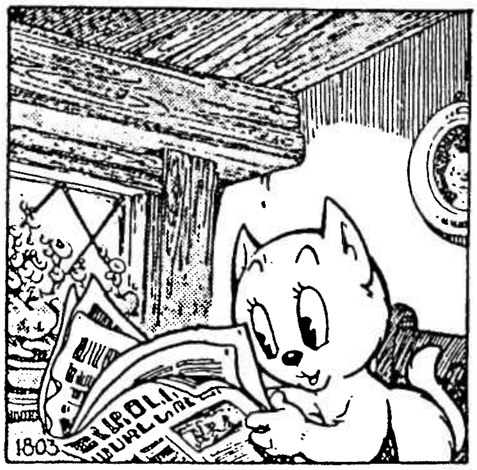
De snelste route: een analyse

We beschouwen wederom de graaf van figuur 1, waarbij nu aan elk van de zes takken een positief getal

Heer Bommel en de Oerwoudrally (1)

(vrij naar Maarten Toonder)

Op een mooie dag in het voorjaar zat Tom Poes thuis de krant door te nemen om te zien of hij daaruit nog ideeën voor een avontuur kon putten. Zijn oog viel op een advertentie waarin deelnemers werden gevraagd voor de Oerwoudrally, een jaarlijks terugkerende sportieve gebeurtenis die zich afspeelde in de binnenlanden van Donker Afrika. "Dat is net iets voor heer Ollie en mij", mompelde Tom Poes en hij spoedde zich naar slot Bommelstein.



Daar trof hij heer Bommel aan, die juist de markies De Cantecleer op bezoek had. "Parbleu, mes amis", sprak de markies, nadat Tom Poes de advertentie had voorgelezen, "dat is niets voor u beiden. Men vraagt om heldhaftige lieden in het bezit van een betrouwbaar vervoermiddel dat tegen een stootje kan. Maar zeg nu zelf, de Oude Schicht ...."
Minzaam glimlachend viel heer Bommel hem in de rede: "De Oude Schicht is in prima conditie, markies, net als ikzelf trouwens. En wat heldhaftigheid betreft, op dat gebied hebben wij Bommels altijd ons mannetje gestaan. Als heer van stand krijg je dat bij de geboorte mee, als u begrijpt wat ik bedoel."
En zich tot Tom Poes wendend vervolgde hij: "Ik heb best weer eens zin in een goed avontuur, jonge vriend. Wij doen dus mee met die rally!"

De volgende ochtend begaf heer Bommel zich naar het gemeentehuis van Rommeldam, teneinde daar informatie in te winnen over het gebied waar de rally zou worden verreden ("Ik en de Oude Schicht zijn namelijk erg gevoelig voor terreinomstandigheden, jonge vriend", had hij Tom Poes toevertrouwd.)

De ambtenaar achter het loket was op dit vroege uur nog doende de slaap uit zijn ogen te verdrijven. Op heer Bommel's verzoek om inlichtingen nam hij echter een lijvig boekdeel ter hand en begon te bladeren.
"Tja", mompelde hij suffig, "er schijnen daar een tiental nederzettingen te liggen in een uitgestrekt gebied waar woestijnen en regenwouden elkaar afwisselen. Maar echt in kaart gebracht is dat gebied nooit."
"Oh", reageerde heer Bommel onthutst, "maar ik kan toch niet helemaal onvoorbereid naar Afrika afreizen? De eer van een heer staat op het spel, u moet mij toch enige informatie kunnen verschaffen?"
De beambte zuchtte eens diep, deed een poging tot nadenken en sprak toen: "Natuurlijk! De Statistische Jaarboeken! Hoofdstuk 3: Verkeer. Paragraaf 2: Motorrijtuigen Buitenland. Sub c: Sportieve en Culturele Aangelegenheden. De rally wordt namelijk al heel wat jaren verreden, ziet u? Ik zal even wat statistische gegevens voor u opschrijven."
En na nog wat geblader in een aantal dikke boeken overhandigde hij heer Bommel enkele papieren, waarmee deze opgelucht huiswaarts keerde.

vervolg op pagina 10.

(de reistijd langs de betreffende weg) is toegekend:

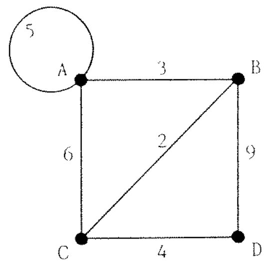


fig. 5

Uit deze graaf blijkt direct, dat de kortst mogelijke reistijd voor een tocht van bijvoorbeeld A naar D 9 bedraagt (via de driestapsroute ABCD).
We stellen ons nu echter ten doel om *door middel van matrixrekening* de kortst mogelijke reistijd tussen elk tweetal steden te bepalen.
Hiertoe dienen we allereerst, analoog aan de vroegere verbindingsmatrix, een symmetrische 4×4-matrix $M = (m_{ij})$ te vormen die de situatie van figuur 5 beschrijft. Een gedeeltelijke invulling van de matrix M ligt voor de hand, namelijk:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & ? \\ 3 & ? & 2 & 9 \\ 6 & 2 & ? & 4 \\ ? & 9 & 4 & ? \end{pmatrix}$$

Hierbij kozen we het element m_{ij} gelijk aan de reistijd langs de tak tussen punt i en punt j, vooropgesteld dat er zo'n tak bestaat.
Een essentieel probleem vormt echter de vulling van de 'gaten' in de matrix M: welke waarde (zeg W) kennen we toe aan een niet-bestaande tak tussen punt i en punt j?
De resultaten van de paragrafen *'Over het 'hoe en waarom' van verbindingsmatrices'* brengen ons op het volgende idee: is het misschien mogelijk om de waarde W zó te kiezen, dat de elementen van de produktmatrices M^2, M^3, etc. een praktische betekenis krijgen? Het zou bijvoorbeeld heel mooi zijn als het volgende zou gelden:

(7) het element $[M^k]_{ij}$ van de matrix M^k stelt de reistijd voor langs de snelste k-stapsroute van punt i naar punt j.

Teneinde enig inzicht te krijgen in de hiertoe te kiezen waarde voor W, richten we onze aandacht eens op de tweestapsroutes van A naar D en we vragen ons af: hoe komt de reistijd, gemeten langs de snelste tweestapsroute van A naar D, tot stand?

In figuur 6 staan weer alle tweestapsroutes van A naar D die *in principe* mogelijk zijn (vergelijk figuur 2a). De takken zijn hierbij voorzien van de bijbehorende reistijd respectievelijk voorzien van de nog onbekende waarde W.
De kortst mogelijke reistijd van A naar D wordt nu op de volgende wijze berekend:

a. tel in figuur 6 de beide getallen langs elk van de vier tweestapsroutes bij elkaar op, en
b. neem vervolgens het minimum van de vier sommen.

We vinden op deze manier voor de reistijd langs de snelste tweestapsroute van A naar D:

$$\min\{5+W, 3+9, 6+4, W+W\}.$$

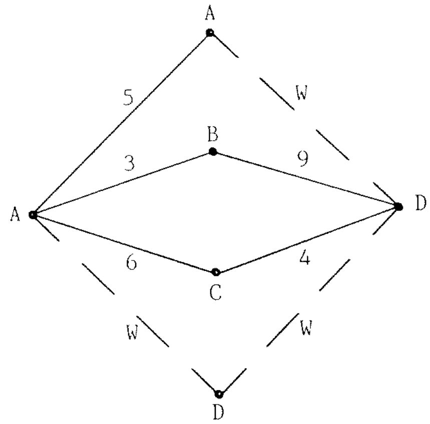


fig. 6

Maar dan ligt de te kiezen waarde voor W ook voor de hand! Immers, als we willen verhinderen dat een *onmogelijke* tweestapsroute (zoals AAD of ADD) als snelste uit de bus komt, dan moeten we blijkbaar de volgende keuze maken:

$W = \infty$ (oneindig)

Denkt u bij het symbool ∞ maar gerust aan dat 'getal', dat groter is dan elk reëel getal en waarvoor zulke plausibele rekenregels gelden als:

$$\begin{cases} a + \infty = \infty + a = \infty & \text{voor elke } a \in \mathbb{R} \\ \infty + \infty = \infty & \\ \min\{a, \infty\} = a & \text{voor elke } a \in \mathbb{R} \\ \min\{\infty, \infty\} = \infty & \end{cases}$$

Met de keuze $W = \infty$ ziet de reistijdenmatrix M er als volgt uit:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 9 \\ 6 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 9 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

en gaat figuur 6 over in:

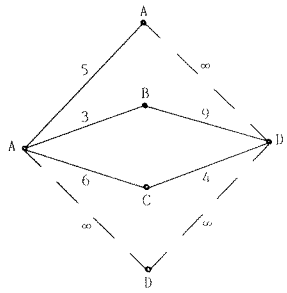


fig. 7a

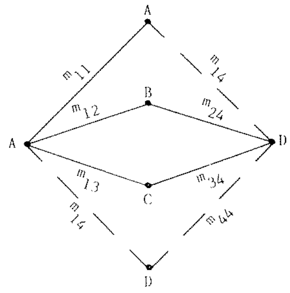
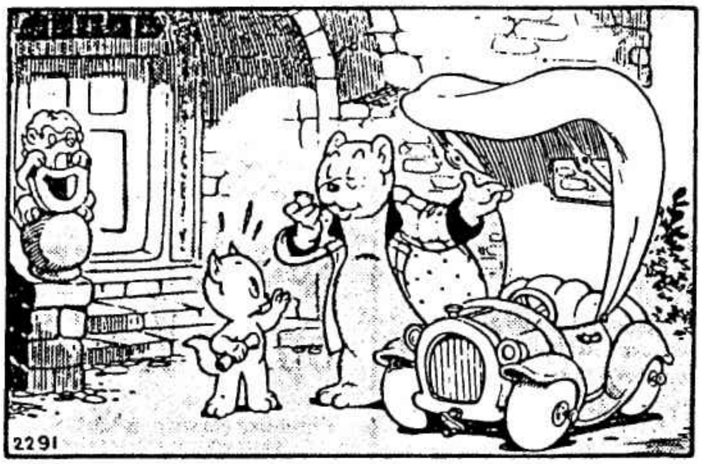


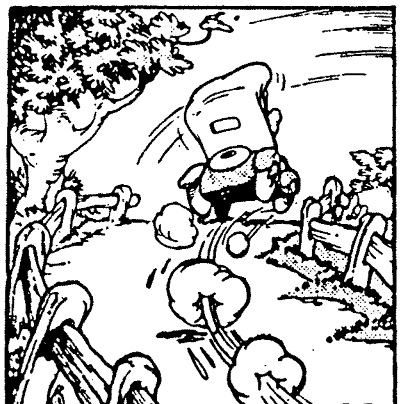
fig. 7b

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	–	3	6	7	1	–	–	–	–	–
B	3	–	3	–	–	1	–	–	–	–
C	6	3	–	1	–	1	6	–	–	–
D	7	–	1	–	6	–	5	2	–	–
E	1	–	–	6	–	–	–	8	9	–
F	–	1	1	–	–	–	7	–	–	8
G	–	–	6	5	–	7	–	3	–	1
H	–	–	–	2	8	–	3	–	1	4
I	–	–	–	–	9	–	–	1	–	2
J	–	–	–	–	–	8	1	4	2	–

Enige tijd later vertrokken heer Bommel en Tom Poes naar Afrika. Bij het vertrek had heer Bommel Tom Poes de papieren van de ambtenaar overhandigd met de woorden: "Analyseer jij onderweg deze gegevens maar eens, jonge vriend. Zo iets is heel leerzaam voor een jong iemand als jij!"
Toen Tom Poes onderweg de eerste bladzijde openvouwde, trof hij daarop een tabel aan met een tiental namen (A t/m J) van nederzettingen en een aantal cijfers. Naast de tabel had de ambtenaar een korte toelichting geschreven waaruit Tom Poes opmaakte, dat bv. het cijfer 7 op het kruispunt van rij A en kolom D de gemiddelde reistijd (in dagen) voorstelde die de deelnemers in de afgelopen jaren nodig hadden gehad om van A naar D te komen.

Tom Poes las alles eens aandachtig door en zei toen: "Start en finish zijn in A respectievelijk . J, heer Ollie. Maar langs welke route wilt u van A naar J rijden?"
Heer Bommel hield zijn ogen strak op de weg gericht en antwoordde: "Ik wil gewoon in een zo kort mogelijke tijd van start naar finish rijden, jonge vriend. En het lijkt me een aardige opgave voor jou om een route uit te stippelen die aan die eis voldoet. Goed voor je mathematische ontwikkeling, als je begrijpt wat ik bedoel. Neem er maar rustig de tijd voor, want het duurt nog wel even voor we in Afrika zijn."
En dit gezegd hebbend trapte hij het gaspedaal nog wat verder in, terwijl Tom Poes in een diep gepeins verzonk.





Een streepje, zoals bijvoorbeeld op het kruispunt van rij B en kolom E, duidde erop, dat het nog nooit iemand was gelukt om rechtstreeks van B naar E te rijden (wellicht was het oerwoud daar ter plaatse ondoordringbaar, suggereerde de ambtenaar).

We vinden dan voor de reistijd langs de snelste tweestapsroute van A naar D:

(8) $\quad \min\{5+\infty, 3+9, 6+4, \infty+\infty\} = 10,$

corresponderend met de route ACD in figuur 5.
Formule (8) leert ons, dat de reistijd langs de snelste tweestapsroute van A naar D in feite gelijk is aan (zie figuur 7b):

(9) $\quad \min\{m_{11}+m_{14}, m_{12}+m_{24}, m_{13}+m_{34}, m_{14}+m_{44}\}.$

Als we nu op de verzameling $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ een tweetal binaire operaties $\oplus$ en $\otimes$ definiëren door:

$$\begin{cases} a \oplus b = \min\{a,b\} & \text{voor alle } a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a \otimes b = a+b & \text{voor alle } a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{cases}$$

dan gaat (9) over in:

(10) $\quad (m_{11} \otimes m_{14}) \oplus (m_{12} \otimes m_{24}) \oplus (m_{13} \otimes m_{34}) \oplus (m_{14} \otimes m_{44})\ ,$

waarbij we gebruik maakten van de associativiteit van de operatie $\oplus$.
Deze laatste uitdrukking vertoont een sprekende gelijkenis met de uitdrukking (4). Sterker nog, als we voor 4×4-matrices $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ met elementen uit $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ een matrixprodukt AB definiëren door:

(11) $\quad [AB]_{ij} = (a_{i1} \otimes b_{1j}) \oplus (a_{i2} \otimes b_{2j}) \oplus (a_{i3} \otimes b_{3j}) \oplus (a_{i4} \otimes b_{4j})\ ,$

dan kunnen we zeggen dat (10) gelijk is aan het element $[M^2]_{14}$ van de produktmatrix M^2 (en dus ook, in overeenstemming met onze oorspronkelijke wens (7), dat $[M^2]_{14}$ de reisduur voorstelt langs de snelste tweestapsroute van A naar D).

Merk op, dat de definitie (11) ontstaat uit de klassieke definitie:

$$[AB]_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + a_{i4} \cdot b_{4j}$$

van het matrixprodukt AB door daarin de operaties + ('optellen') en • ('vermenigvuldigen') te vervangen door respectievelijk de binaire operaties $\oplus$ ('minimum nemen') en $\otimes$ ('optellen').

Gebruikmakend van definitie (11) vinden we nu het volgende resultaat:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 9 \\ 6 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 9 & 4 & \infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 9 \\ 6 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 9 & 4 & \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 10 \\ 8 & 4 & 9 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 11 \\ 10 & 6 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

waarbij bijvoorbeeld het element $[M^2]_{23} = 9$ als volgt werd berekend:

$$\begin{aligned} [M^2]_{23} &= (3 \otimes 6) \oplus (\infty \otimes 2) \oplus (2 \otimes \infty) \oplus (9 \otimes 4) \\ &= \min\{3+6, \infty+2, 2+\infty, 9+4\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

corresponderend met de reistijd langs de snelste tweestapsroute van B naar C (zie de route BAC in figuur 5).

We laten het verder aan de lezer over om voor zichzelf na te gaan, dat met behulp van definitie (11) volgt:

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 10 \\ 9 & 4 & 9 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 11 \\ 10 & 6 & 11 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 9 \\ 6 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 9 & 4 & \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 10 & 9 \\ 7 & 11 & 6 & 13 \\ 10 & 6 & 11 & 8 \\ 9 & 13 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

en

$$M^4 = M^3M = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 10 & 9 \\ 7 & 11 & 6 & 13 \\ 10 & 6 & 11 & 8 \\ 9 & 13 & 8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 9 \\ 6 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 9 & 4 & \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 & 14 \\ 12 & 8 & 13 & 10 \\ 9 & 13 & 8 & 15 \\ 14 & 10 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

waarbij bijvoorbeeld het element $[M^3]_{12} = 7$, volledig in overeenstemming met onze verwachtingen, de reistijd voorstelt langs de snelste driestapsroute van A naar B (zie de route ABCB in figuur 5).

Om nu tenslotte tot ons uiteindelijke doel te geraken (we wilden immers de kortst mogelijke reistijd tussen elk tweetal steden in figuur 5 bepalen) dienen we te kijken naar de gegeneraliseerde sommatrix (vergelijk formule (6)):

$$T^{(k)} = M \oplus M^2 \oplus \ldots\ldots \oplus M^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

waarbij de gegeneraliseerde som $A \oplus B$ van twee matrices $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ gedefinieerd wordt door:

(12) $\quad [A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$

oftewel:

$$[A \oplus B]_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}\ .$$

Merk weer op, dat (12) ontstaat uit de klassieke definitie van de som van twee matrices door daarin de operatie + ('optellen') te vervangen door de binaire operatie $\oplus$ ('minimum nemen').

Gebruikmakend van (12) vinden we:

$$\begin{aligned} T^{(3)} &= M \oplus M^2 \oplus M^3 \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 9 \\ 6 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 9 & 4 & \infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 10 \\ 8 & 4 & 9 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 11 \\ 10 & 6 & 11 & 8 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 11 & 7 & 10 & 9 \\ 7 & 11 & 6 & 13 \\ 10 & 6 & 11 & 8 \\ 9 & 13 & 8 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

waarbij bijvoorbeeld het element $[T^{(3)}]_{14} = 9$ op de volgende wijze werd berekend:

$$\begin{aligned} [T^{(3)}]_{14} &= [M]_{14} \oplus [M^2]_{14} \oplus [M^3]_{14} \\ &= \infty \oplus 10 \oplus 9 \\ &= \min\{\infty\ 10, 9\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Dit element stelt dus de kortst mogelijke reistijd voor tussen A en D, *als we ons beperken tot routes die uit* hoogstens drie *stappen bestaan* (zie de route ABCD in figuur 5).

Het aardige is nu, dat de snelste route tussen twee gegeven steden in figuur 5 in hoogstens drie stappen naar het eindpunt voert. Immers, als een route pas na het passeren van meer dan drie takken voor het eerst het eindpunt aandoet, dan voert hij langs meer dan vier punten, zodat één punt meer dan eens wordt aangedaan. Zo'n route kan dus nooit de snelste zijn, omdat hij kan worden ingekort tot een snellere route.

Dat de snelste route tussen twee gegeven steden uit hoogstens drie takken bestaat (en dat de elementen van de matrix $T^{(3)}$ dus in feite de kortst mogelijke reistijden voorstellen), komt ook tot uiting via een directe berekening. Berekenen we namelijk $T^{(4)}$, dan vinden we:

$$T^{(4)} = M \oplus M^2 \oplus M^3 \oplus M^4 = T^{(3)} \oplus M^4$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 & 14 \\ 12 & 8 & 13 & 10 \\ 9 & 13 & 8 & 15 \\ 14 & 10 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= T^{(3)}$$

en algemeen geldt verder:

$$T^{(k)} = T^{(3)} \qquad \text{voor } k>3.$$

Conclusie

Het element $[T^{(3)}]_{ij}$ van de gegeneraliseerde sommatrix $T^{(3)}$ stelt de reistijd voor langs de snelste route van punt i naar punt j.

Het gegeneraliseerde matrixprodukt

Het spreekt vanzelf, dat de fraaie resultaten van de vorige paragraaf (en met name de praktische toepasbaarheid van het nieuw gedefinieerde matrixprodukt (11)) ons doen besluiten om het klassieke matrixprodukt te generaliseren door onder andere de daarin van oudsher gebruikte operaties + ('optellen') en • ('vermenigvuldigen') te vervangen door een tweetal andere binaire operaties die we voortaan aan zullen geven met $\oplus$ en $\otimes$.

Laat V een niet-lege verzameling zijn met daarop een tweetal binaire operaties $\oplus$ (een *gegeneraliseerde optelling*) en $\otimes$ (een *gegeneraliseerde vermenigvuldiging*), waarvoor geldt:

1. $\oplus$ is commutatief en associatief, d.w.z.

   $a \oplus b = b \oplus a$

   $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

   voor alle a, b, c $\in$ V.

2. $\otimes$ is associatief, d.w.z.

   $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ voor alle a, b, c $\in$ V

   en bovendien distributief ten opzichte van $\oplus$, d.w.z.

   $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

   $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

   voor alle a, b, c $\in$ V.

3. V bevat een nulelement ϕ en een eenheidselement e met de volgende eigenschappen:

   $a \oplus \phi = a$

   $\phi \otimes a = a \otimes \phi = \phi$

   $e \otimes a = a \otimes e = a$

   voor alle a $\in$ V.

Laat verder $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ twee n $\times$ n-matrices zijn waarvan de elementen tot V behoren.

Dan verstaan we onder de *gegeneraliseerde matrixsom* $A \oplus B$ van A en B de n $\times$ n-matrix waarvan de elementen gegeven worden door:

(13) $\quad [A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$.

Bovendien verstaan we onder het *gegeneraliseerde matrixprodukt* AB van A en B de n$\times$n-matrix waarvan de elementen gegeven worden door:

(14) $\quad [AB]_{i1} = (a_{ij} \otimes b_{1j}) \oplus (a_{i2} \otimes b_{2j}) \oplus \ldots \oplus (a_{in} \otimes b_{nj})$.

Men gaat eenvoudig na, gebruikmakend van de definities (13) en (14), dat de n $\times$ n-matrix:

(15) $$\Phi = \begin{pmatrix} \phi & \phi & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \cdots & \phi \end{pmatrix}$$

voldoet aan:

$A \oplus \Phi = \Phi \oplus A = A$

$\Phi A = A \Phi = \Phi$

voor elke n $\times$ n-matrix A. De matrix Φ stelt dus de (gegeneraliseerde) nulmatrix voor.

Bovendien gaat men eenvoudig na, gebruikmakend van definitie (14), dat de n $\times$ n-matrix:

(16) $$E = \begin{pmatrix} e & \phi & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & e & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & \phi & e & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \cdots & e \end{pmatrix}$$

voldoet aan:

$EA = AE = A$

voor elke n $\times$ n-matrix A, zodat de matrix E de (gegeneraliseerde) eenheidsmatrix voorstelt.

Verder laten een aantal uit de klassieke matrixrekening bekende rekenregels zich eenvoudig generaliseren. Zo geldt voor alle n $\times$ n-matrices A, B en C:

$$A \oplus B = B \oplus A$$
$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B \oplus C) = (AB) \oplus (AC)$$
$$(A \oplus B)C = (AC) \oplus (BC)$$

Deze gegeneraliseerde rekenregels kunnen op een soortgelijke manier worden bewezen als de overeenkomstige rekenregels in de klassieke theorie.

Voorbeelden

1. Met de keuze:

$$V = \mathbb{R}$$
$$a \oplus b = a + b \qquad \text{(de gewone optelling)}$$
$$a \otimes b = a \bullet b \qquad \text{(de gewone vermenigvuldiging)}$$

gaan de formules (13) en (14) over in de klassieke definities van matrixsom en matrixprodukt. De matrices (15) en (16) nemen dan de vertrouwde gedaanten:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{en } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

aan.

2. Met de keuze:

$$V = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
$$a \oplus b = \min\{a, b\} \tag{17}$$
$$a \otimes b = a + b$$

gaan de formules (13) en (14) over in de definities (11) en (12) uit de vorige paragraaf. De elementen ∞ en 0 spelen in dit geval de rol van nulelement respectievelijk eenheidselement, zodat volgt:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & \infty \end{pmatrix} \text{ en } E = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \cdots & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \cdots & \infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Het gegeneraliseerde matrixprodukt kent (bij een geschikte keuze van V, $\oplus$ en $\otimes$) vele interessante toepassingsmogelijkheden. In twee volgende artikelen zullen we daarvan nog het een en ander laten zien.

Een computerprogramma voor de Oerwoudrally

We keren nu terug naar het oorspronkelijke probleem van heer Bommel en Tom Poes:

Bepaal de kortst mogelijke reistijd tussen de punten A en J in de graaf van figuur 4.

De beide voorgaande paragrafen hebben ons intussen geleerd, dat de kortst mogelijke reistijden tussen de punten in de graaf van figuur 4 gegeven worden door de elementen van de gegeneraliseerde sommatrix:

$$T^{(9)} = M \oplus M^2 \oplus \ldots\ldots \oplus M^9,$$

waarbij de matrix M gegeven wordt door (zie de tabel in het verhaal van de Oerwoudrally):

$$M = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 7 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 3 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 3 & \infty & 1 & \infty & 1 & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 7 & \infty & 1 & \infty & 6 & \infty & 5 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 8 & 9 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & \infty & 3 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 8 & \infty & 3 & \infty & 1 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & 1 & 4 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

en waarbij de gegeneraliseerde matrixbewerkingen gedefinieerd zijn door (13), (14) en (17).

De matrix $T^{(9)}$ kunnen we door de computer laten berekenen met behulp van het volgende MBASIC-programma dat probleemloos draait op een BBC-computer (model B met Torch-kaart) waarop een Epson-printer is aangesloten. (Zie de pagina's hierna.)

Literatuur

[1] Lange Jzn, J. de en M. Kindt: *Matrices (HEWET Wiskunde)*, Educaboek, Culemborg, 1984.

[2] Deo, N.: *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[3] Tijms, H.C.: *Educatieve Operations Research Software: Wis en Waarachtig*, Euclides, 62e jaargang, nr. 8, mei 1987, pp. 227-236.

```
10 GOSUB 1000    'INITIALISATIE
20 GOSUB 2000    'INVOER VAN DE GEGEVENS
30 GOSUB 3000    'BEREKENING VAN DE REISTIJDEN
40 GOSUB 4000    'UITVOER VAN DE RESULTATEN
50 END
1000 '
1010 '* SUBROUTINE: INITIALISATIE *
1020 '
1030 PRINT CHR$(12)   'SCHERM SCHOON
1040 PRINT:PRINT:PRINT
1050 PRINT "**************************************"
1060 PRINT "*                                    *"
1070 PRINT "*  PROGRAMMA VOOR DE BEPALING VAN    *"
1080 PRINT "*  EEN ROUTE TUSSEN TWEE STEDEN MET  *"
1090 PRINT "*  EEN ZO KORT MOGELIJKE REISTIJD.   *"
1100 PRINT "*                                    *"
1110 PRINT "**************************************"
1120 PRINT:PRINT:PRINT
1130 PRINT "Zet de printer aan.":PRINT:PRINT
1140 PRINT "Hoeveel punten (max. 10) heeft uw ";
1150 INPUT "graaf";N
1160 X1$="TABEL VAN KORTSTE REISTIJDEN"
1170 X2$="TABEL VAN SNELSTE REISROUTES"
1180 RETURN
2000 '
2010 '* SUBROUTINE: INVOER VAN DE GEGEVENS *
2020 '
2030 PRINT CHR$(12)   'SCHERM SCHOON
2040 PRINT:PRINT
2050 PRINT "U kunt nu rij voor rij de elementen";
2060 PRINT " van de matrix invoeren."
2070 PRINT "Gebruik uitsluitend gehele getallen";
2080 PRINT " uit 1 t/m 99 en sluit"
2090 PRINT "elk getal af met de RETURN-toets."
2100 PRINT "Druk, als een tak niet bestaat,";
2110 PRINT " alleen op de RETURN-toets."
2120 PRINT:PRINT:PRINT "   !";
2130 FOR I=1 TO N
2140   PRINT " "+CHR$(I+64)+"   ";
2150 NEXT I
2160 PRINT:PRINT "---!-"+STRING$(5*N,"-")
2170 FOR I=1 TO N
2180   PRINT " "+CHR$(I+64)+" !";
2190   FOR J=1 TO I-1
2200     PRINT TAB(5*J);
2210     IF MAT(I,J)=1E+10 THEN PRINT " --";
                         ELSE PRINT MAT(I,J);
2220   NEXT J
2230   FOR J=I TO N
2240     PRINT TAB(5*J+1);
2250     INPUT; "",MAT(I,J)
2260     IF MAT(I,J)>0 THEN GOTO 2280
2270       MAT(I,J)=1E+10:PRINT "--";
2280     MAT(J,I)=MAT(I,J)
2290   NEXT J
2300   PRINT:PRINT "   !"
2310 NEXT I
2320 PRINT CHR$(12)   'SCHERM SCHOON
2330 FOR I=1 TO 5:PRINT:NEXT I
2340 PRINT "Een ogenblikje geduld a.u.b.     ";N
2350 RETURN
3000 '
3010 '* SUBROUTINE: BEREKENING VAN DE REISTIJDEN *
3020 '
3030 PRINT TAB(34);N-1
3040 FOR I=1 TO N
3050   FOR J=1 TO N
3060     MATMACHT(I,J)=MAT(I,J)
3070     IF MAT(I,J)<1E+10 THEN GOTO 3090
3080       ROUTE$(I,J)=" ---":GOTO 3100
3090       ROUTE$(I,J)=" "+CHR$(I+64)+CHR$(J+64)
3100     T(I,J)=MAT(I,J)
3110     TROUTE$(I,J)=ROUTE$(I,J)
3120   NEXT J
3130 NEXT I
3140 FOR K=2 TO N-1
3150   FOR I=1 TO N
3160     FOR J=1 TO N
3170       RIJ(J)=MATMACHT(I,1)+MAT(1,J)
3180       IF RIJ(J)<1E+10 THEN GOTO 3200
3190         RIJ$(J)=" ---":GOTO 3210
3200         RIJ$(J)=ROUTE$(I,1)+CHR$(J+64)
3210       FOR S=2 TO N
3220         X=MATMACHT(I,S)+MAT(S,J)
3230         IF X>=RIJ(J) THEN GOTO 3270
3240         IF X>=1E+10 THEN GOTO 3270
3250           RIJ(J)=X
3260           RIJ$(J)=ROUTE$(I,S)+CHR$(J+64)
3270       NEXT S
3280     NEXT J
3290     FOR J=1 TO N
3300       MATMACHT(I,J)=RIJ(J)
3310       ROUTE$(I,J)=RIJ$(J)
3320       IF MATMACHT(I,J)>=T(I,J) THEN GOTO 3350
3330         T(I,J)=MATMACHT(I,J)
3340         TROUTE$(I,J)=ROUTE$(I,J)
3350     NEXT J
3360   NEXT I
3370   PRINT TAB(34);N-K
3380 NEXT K
3390 RETURN
4000 '
4010 '* SUBROUTINE: UITVOER VAN DE RESULTATEN *
4020 '
4030 TEKST$=X1$:C=6
4040 FOR I=1 TO N
4050   FOR J=1 TO N
4060     IF T(I,J)<1E+10 THEN GOTO 4080
4070       AFDR$(I,J)=" ---":GOTO 4090
4080       AFDR$(I,J)=STR$(T(I,J))
4090   NEXT J
4100 NEXT I
4110 PRINT TAB(34);0
4120 FOR I=1 TO 5:LPRINT:NEXT I
4130 LPRINT CHR$(15)   'VERKLEIND PRINTEN (EPSON)
4140 GOSUB 5000    'TABEL MET TIJDEN AFDRUKKEN
4150 TEKST$=X2$:C=N+3
4160 FOR I=1 TO N
```

```
4170   FOR J=1 TO N
4180     AFDR$(I,J)=TROUTE$(I,J)
4190   NEXT J
4200 NEXT I
4210 GOSUB 5000   'TABEL MET ROUTES AFDRUKKEN
4220 LPRINT CHR$(18)   'NORMAAL PRINTEN (EPSON)
4230 FOR I=1 TO 5:LPRINT:NEXT I
4240 RETURN
5000 '
5010 '* SUBROUTINE: TABEL AFDRUKKEN *
5020 '
5030 IF C>12 THEN C=12
5040 LPRINT TEKST$+":"
5050 LPRINT:LPRINT "   |";
5060 FOR I=1 TO N
5070   LPRINT TAB(I*C-C+5);
5080   LPRINT " "+CHR$(I+64);
5090 NEXT I
5100 LPRINT:LPRINT "---|-"+STRING$(N*C,"-")
5110 FOR I=1 TO N
5120   LPRINT " "+CHR$(I+64)+" |";
5130   FOR J=1 TO N
5140     LPRINT TAB(J*C-C+5);
5150     LPRINT AFDR$(I,J);
5160   NEXT J
5170   LPRINT
5180 NEXT I
5190 LPRINT "   |"
5200 LPRINT:LPRINT:LPRINT
5210 RETURN
```

In figuur 8 staat een gedeelte van de uitvoer van het programma, wanneer we de graaf van figuur 4 laten verwerken.

TABEL VAN KORTSTE REISTIJDEN:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	2	3	5	6	1	4	11	8	9	11
B	3	2	2	3	4	1	8	5	6	8
C	5	2	2	1	6	1	6	3	4	6
D	6	3	1	2	6	2	5	2	3	5
E	1	4	6	6	2	5	11	8	9	11
F	4	1	1	2	5	2	7	4	5	7
G	11	8	6	5	11	7	2	3	3	1
H	8	5	3	2	8	4	3	2	1	3
I	9	6	4	3	9	5	3	1	2	2
J	11	8	6	5	11	7	1	3	2	2

TABEL VAN SNELSTE REISROUTES:

	A	B	C	- - - -	I	J
A	AEA	AB	ABFC		ABFCDHI	ABFCDHIJ
B	BA	BFB	BFC		BFCDHI	BFCDHIJ
C	CFBA	CFB	CDC		CDHI	CDHIJ
D	DCFBA	DCFB	DC		DHI	DHIJ
E	EA	EAB	EABFC		EI	EIJ
F	FBA	FB	FC		FCDHI	FCDHIJ
G	GFBA	GFB	GC		GJI	GJ
H	HDCFBA	HDCFB	HDC		HI	HIJ
I	IHDCFBA	IHDCFB	IHDC		IHI	IJ
J	JIHDCFBA	JIHDCFB	JIHDC		JI	JGJ

figuur 8

We lezen hieruit af, dat heer Bommel en Tom Poes het beste de route ABFCDHIJ (met een minimale reistijd van elf dagen) kunnen volgen.

Opmerkingen

1. Alternatieve (en soms efficiëntere) oplossingsmethoden voor het 'kortste route'-probleem treft men aan in [2].
2. Voor educatieve software op het gebied van de Operations Research (een tak van de toegepaste wiskunde die zich onder andere bezighoudt met het 'kortste route'-probleem) verwijzen we naar [3].