Een hulpfunctie bij de vergelijking van Leonardo Pisano

J. Verrips
Student Nutsseminarium, Amsterdam

Samenvatting

Een eenvoudige afleiding van Taylor's reeks wordt voorgesteld die alleen op veeltermen van toepassing is. Deze kan worden begrepen door middel van een 'hulpfunctie'.

Leonardo Pisano, (Fibonacci, 1170 – na 1240) was een Italiaans wiskundige die bekendheid heeft gekregen door het invoeren van Arabische cijfers, analyse van vierkantswortels, algebra, binomiaalcoëfficiënten, indeterminate analyse en het schrijven van Liber abbaci, een boek over rekenmethoden en Liber quadratorum, een boek over getaltheorie. [1]

In 1225 benaderde hij de wortel van de vergelijking $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ tot op 9 decimalen nauwkeurig ($x = 1.368808107..$), maar niemand weet hoe. [2]
Ik heb geprobeerd het hem na te doen en ben daarbij op een verrassend eenvoudige redenering gestuit die zich gemakkelijk tot Taylorpolynomen laat generaliseren. De enige aanname is dat hij een methode kende om nauwkeurig vierkantswortels te benaderen. Met moderne notatie gaat het als volgt:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$
$$f(1) = -7$$
$$f(2) = 16$$

Is er een h zó dat $f(1+h) = 0$, met h uit $<0,1>$?
Proberen levert:

$$f(1+h) = (1+h)^3 + 2(1+h)^2 + 10(1+h) - 20 = 0$$
$$f(1+h) = h^3 + 5h^2 + 17h + f(1) = 0$$

We beschouwen $5h^2 + 17h + f(1)$, hulpfunctie in $x = 1$. Met kwadraat afsplitsen of de abc-formule vinden we twee wortels voor h. Omdat alleen bij $|h|<1$ de hulpfunctie $f(1+h)$ redelijk benadert, kiezen we de wortel dicht bij nul en de volgende benadering is nu $1+h$.

Nemen we als startwaarde niet 1 maar x, dan vinden we de formule:

$$f(x+h) = h^3 + h^2(3x+2) + h(3x^2+4x+10) + f(x).$$

We definiëren de hulpfunctie [3]:

$T(x,h) = f(x+h) = 0$
{als $f(x)$ een nulpunt heeft is er bij alle x een h zodat $T(x,h)$ nul is, T is functie van h}
$T^2(x,h) = f(x+h) - h^3$
{de afgeronde hulpfunctie}.

Als we de functie $f(x) = x^n$ beschouwen, vinden we de hulpfunctie:

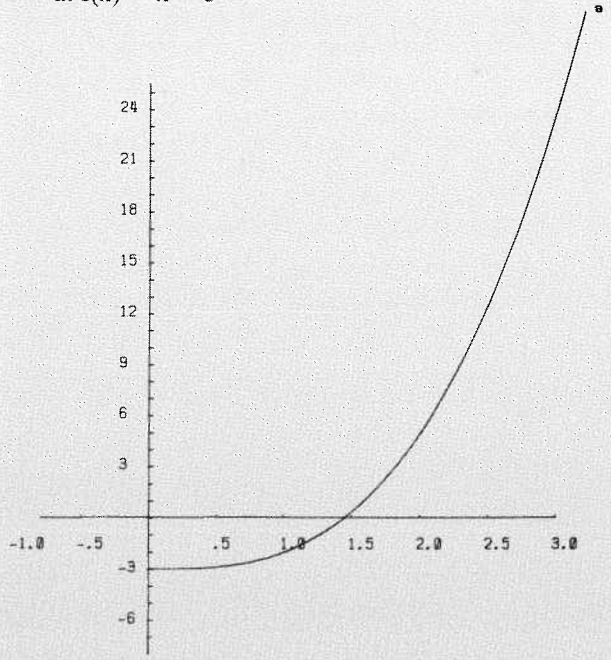
$$T(x,h) = (x+h)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \qquad (1)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x)^{(k)}}{k!} h^k$$

$$\text{immers } \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{n.n-1.n-2. \, ..n-k}{k\,!} x^{n-k}$$
$$= \frac{(x^n)^{(k)}}{k!}$$

$h^k = ((x+h) - x)^k$ dus (1) is een Taylorpolynoom om $x+h$.

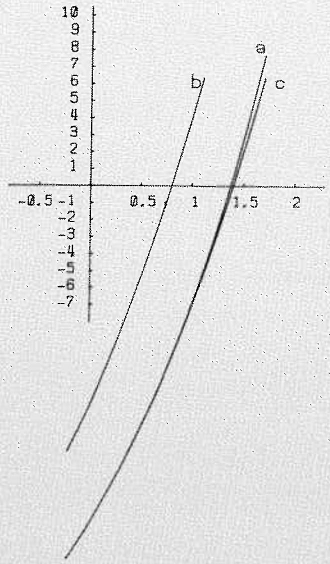
1a. Grafiek van een functie waar we het nulpunt van willen berekenen: x^3-3. We gaan in het vervolg uit van startwaarde $x=2$, de functiewaarde is daar 5.

a: $f(x) = x^3-3$



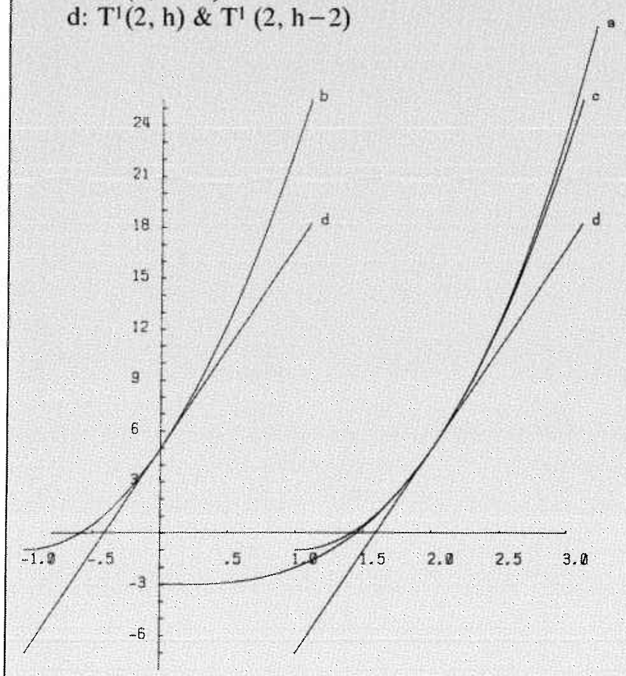
2. Grafiek van de vergelijking van Leonardo Pisano met de kwadratische hulpfunctie in $x=0.6$.

a: $f(x)$
b: $T^2(0.6, h)$
c: $T^2(0.6, h-0.6)$
nulpunt c bij $h = 1.3922$



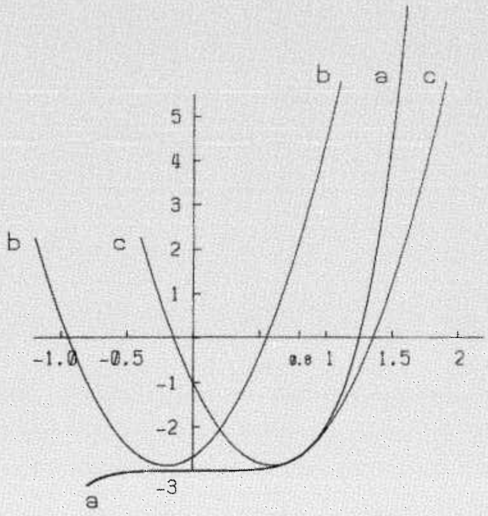
1b. In een plaatje de grafiek van x^3-3, de lineaire hulpfunctie in $x=2$ ($T^1(2,h)$) en de raaklijn in $x=2$. $T^1(2,h-2)$, de kwadratische hulpfunctie en de naar rechts verschoven kwadratische hulpfunctie, $T^2(2,h)$ en $T^2(2,h-2)$.
Merk op dat de x-as samenvalt met de h-as.

a: $f(x) = x^3-3$
b: $T^2(2, h)$
c: $T^2(2, h-2)$
d: $T^1(2, h)$ & $T^1(2, h-2)$



3. Grafiek van x^5-3 met kwadratische hulpfunctie in 0.8. $T^2(x,h) = 10x^3h^2 + 5x^4h + x^5 - 3$.

a: f is: x^5-3
b: $T^2(0.8, h)$
c: $T^2(0.8, h-0.8)$



De illustraties zijn vervaardigd op de afdeling cardiologie van de Vrije Universiteit.
(Prof. Dr. J.P. Roos, Ir. M.J. van Eenige).

Ook als we generaliseren tot n-de graads polynomen kunnen we bewijzen dat T (x, h) een Taylorpolynoom is om x + h:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} .. a_0$$

$$T(x,h) = p_n(x+h)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j(x+h)^j \quad \text{Groepeer machten van h:}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} h^k \sum_{i=k}^{n} a_i \binom{i}{k} x^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} h^k \frac{p(x)^{(k)}}{k!}$$

wegens (1) voor elke n uit $\mathbb{N}$.

Bij polynomen kunnen we dus een Taylorpolynoom afleiden zonder differentiëren of limietproces, we noemen dit een hulpfunctie. De notatie is T^i voor de tot een i-de graads polynoom afgerond Taylorpolynoom.

De eerste en tweede afgeleide van $T(x_n, h)$ naar h in $h=0$ zijn gelijk aan de eerste en tweede afgeleide van f(x) naar x in $x=x_n$ en de over afstand x_n verschoven $T^2(x_n, h)$ is raakparabool aan f(x) in het punt $(x_n, f(x_n))$.
We hebben het tweedegraads Newton procédé herontdekt, zie de literatuur voor een generalisatie naar v-maal differentieerbare functies over de R^n. [4]

De vergelijking van Leonardo van Pisano.

x_1	x_2: Tweedegraads procédé Nulpunt parabool	x_2: Eerstegraads procédé Newton-Raphson
0.8	1.377934	1.475132
0.9	1.373844	1.439676
1.0	1.371231	1.411765
1.1	1.369738	1.391126
1.2	1.369037	1.377406
1.3	1.368824	1.370202
1.4	1.368807	1.369088
1.5	1.368701	1.373626
1.6	1.368218	1.383389

De kwadratische hulpfunctie levert nauwkeuriger schattingen op.

Het eerstegraads Newton procédé is gelijk aan de methode van Newton Raphson, we stellen $T^1 = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bij het tweedegraads Newton procédé stellen we $T^2 = 0$:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)}$$

Als de discriminant negatief is ligt voor de hand de as van de parabool te nemen: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'}{f''}$.
De fout is bij een tweedegraads procédé van de orde h^3 wat we ook kunnen inzien, omdat we de termen met h^3 en hoger hebben weggelaten ($|h| < 1$).

Zonder rekenmachine is een tweedegraads procédé daarom snel, omdat je betrekkelijk weinig functiewaarden met vele decimalen hoeft te berekenen. Met een rekenmachine is het eerstegraads procédé verkieslijker omdat je dan niet steeds f'' hoeft te benaderen, wat rekentijd kost en complicaties geeft in verband met de machinenauwkeurigheid.

Het is goed mogelijk dat Leonardo Pisano een paraboolmethode heeft afgeleid en toegepast. (J. Verrips [5])

Met dank aan de heer Laan, studieleider en docent aan het Nutsseminarium te Amsterdam, die met literatuur aankwam, eenvoudige notatie suggereerde en eerdere versies van dit artikel van kanttekeningen voorzag.

Noten

[1] Leonardo Pisano: *The Book of Squares*, translated into English by L.E. Sigler, 1987, Academic Press.
[2] Van Asselt en anderen: *Wiskunde voor het HBO*, Educaboek, deel 1 pag. 302 e.v.
Boyer, C.B.: *A History of Mathematics*, 1968, New York, pp. 282 schrijft 1;22,7,42,33,4,40 in zestigtallig stelsel. "
[3] De redenering bevatte aanvankelijk nog een stap: $f(x+h) = g(x,h) + f(x) = 0$
en je noemt g(x, h) verschilfunctie in h ten opzichte van f in het punt x, f(x): "g maakt f nul".
[4] Zie J. Stoer: *Einführung in die Numerike Mathematik*, Springer Verlag 1976, pp. 217 e.v.
den.
Of Dew and James, *Numerical computation in Pascal*, som 5.2 pp. 118 en pp. 58.
[5] Student M.O.-A-wiskunde en informatica, Nutsseminarium te Amsterdam.

Een computerprogramma in Fortran met dubbele precisie levert een waarde op van 1.3688081078213726327..
We hoeven niet per se $f(x_2)$ en de coëfficiënten van h in x_2 te berekenen. $T(x_1, h)$ is exact en we kunnen de hulpfunctie $T(x, h + d)$ definiëren, dit is een Taylorpolynoom om een Taylorpolynoom.
Een soortgelijke methode staat bekend als Horner's schema en werd omstreeks 1300 in China beschreven als fan fa.
Je doet daarbij een substitutie x = y + constante, met de constante vlakbij en kleiner dan de wortel, bepaalt dan een formule in y en benadert vervolgens de wortel van .. $ay^2 + by + c = 0$ met de formule

$$y_1 = \frac{-c}{a+b}$$

en herhaalt het proces met $y = z + y_1$.