Puzzel

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Brievenbus

Trouwe lezers zullen in de vorige NW de puzzelrubriek gemist hebben. Dat heeft enige praktische oorzaken, onder andere het erg dicht op elkaar vallen van de inzendgrens voor puzzels uit nummer n en het uitkomen van nummer n + 1 van de NW. Bovendien dijde deze rubriek wat ver uit en is een korte stilstand dan niet zo erg.
Intussen is er heel wat post binnengekomen, teveel om in dit nummer te vermelden èn te bespreken.

- Twee reacties kwamen binnen op de puzzel uit het julinummer van ... 1985, van Mat Dicker en Bert Boon. Dat gaat om een logica-achtige puzzel. Omdat de twee brieven elkaar gedeeltelijk tegenspreken, stuur ik ze met verwisselde adressen naar de inzenders terug... Dan kunnen we er later in een op logica-puzzels gerichte rubriek op terugkomen. Daarbij komt dan onder andere werk van R. Smullyan ter sprake.
- Nog steeds komen titels van romans binnen waarin wiskunde een rol speelt. We sparen door voor een totaaloverzicht.
- De strategiepuzzels 16 t/m 20 zijn nog niet allemaal gekraakt. Aan de hand van een bespreking van 'Winning Ways for your Mathematical Play' van Berlekamp, Conway and Guy, kom ik daar nog dit jaar op terug.

Tot zover uitstel en nieuwe plannen.

Nieuwe passers uit Leiden

Onlangs (16 september 1987) promoveerde J.A. van Maanen op een proefschrift met de titel:

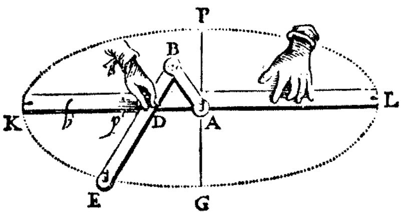
> 'Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands.'

ill. 1

Wie op de studiedag van de NVvWL (30 oktober 1987) is geweest, weet hoe inspirerend de schrijver over geschiedenis van de wiskunde kan praten en verbanden weet te leggen met de onderwijspraktijk van nu.
In het eerste hoofdstuk wordt werk van Frans van Schooten Jr. vermeld. Deze vertaalde en becommentarieerde de '*Géométrie*' van Descartes, die in 1637 verscheen.

De vertaling was van Frans naar Latijn, waardoor het werk voor de wetenschappelijke wereld van die dagen dus juist toegankelijker werd. Zoals onder het portret (ill. 1) te zien is, werd wel in de 'volkstaal' gedoceerd in Leiden.
Hij belichtte ook vele duistere passages en werd zodoende de grondlegger van de analytisch-meetkundige behandeling van de kegelsneden.

In een ander werk van Van Schooten, (De organica conicarum sectisnum in plano descriptione tractatus) vinden we de volgende kinematische constructie van de ellips. (ill. 2)



ill. 2

Over dit soort mechaniekjes gaat de nieuwe opgave. Ter oriëntatie:

Opgave 40:
Als D langs KL loopt beschrijft E een ellips. Waarom?

Nu komen in het boek van Van Schooten ook nog andere apparaten voor om andere kegelsneden te tekenen. Maar die vertoon ik niet, want:

Opgave 41:
Bedenk dat zelf!

U mag gebruiken wat u wilt: draadjes, scharnierende stangen, schuiftoestanden enz.
Er zijn natuurlijk restricties: het omtrekken van de schaduw van een voetbal als constructie van de ellips bijvoorbeeld.

Probeer ook:

Opgave 42:
Vind een mechaniek om een cirkel te tekenen rond een gat in de grond.
De bedoeling is natuurlijk: zonder het middelpunt te gebruiken.
Tekeningen graag zodanig dat ze meteen in het volgende nummer van de NW afgedrukt kunnen worden.

Dubbellimiet van gestapelde machten

Bij opgave 37 ging het om uitdrukkingen als:

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

De bedoeling was te onderzoeken of zo'n oneindige stapeling iets kon betekenen, dat wil zeggen uit te zoeken hoe de rij:

$1, a, a^a, a^{a^a}, \ldots$

zich voor verschillende a (≥ 0) gedraagt.
Opgave 37 is opgelost (en ingestuurd) door: Mike Staring, Joachim Wulff en Marcus Nijmeyer; H.A. Heymans; J. Postma.
Heymans heeft eerder aan dit soort problemen gewerkt en stuurt kopieën van onderzoekingen uit 1972 in.

Iedereen heeft gemerkt dat het gaat om itereren van de functie:

$f: x \rightarrow a^x$

en kijken of, beginnend bij A, er een limiet ontstaat.
Die limiet moet voldoen aan $x = a^x$.
Als $1 \leq a \leq e^{1/e}$ kunnen we het volgende plaatje tekenen; in het voorbeeld is a 1.3.

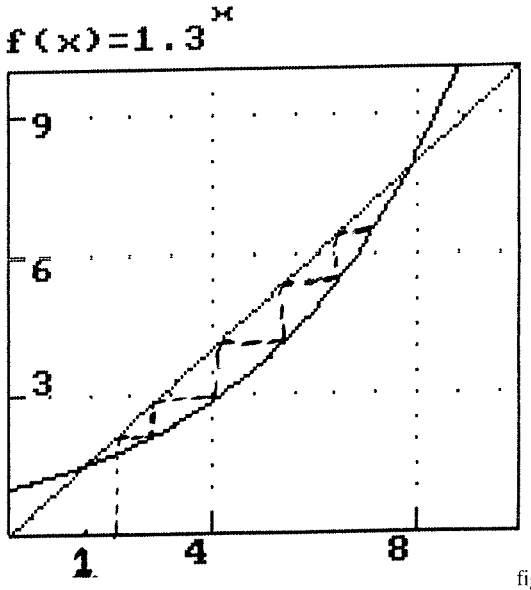


fig. 1

Het itereren van f is het bestijgen van het trappetje tussen de grafiek van de a^x en de lijn x.
Als a te groot is, lukt het niet meer, snijden de grafieken elkaar niet eens meer.
De grens ligt bij $a = e^{1/e}$; dat hebben alle inzenders gevonden.
Het geval $a < 1$ gaat net zo, hopen we.
Neem in het plaatje $a = 0.3$. (Zie fig. 2).
Itereren levert nu een spiraal op, die binnenwaarts naar het snijpunt draait.

We zouden alles precies moeten bewijzen natuurlijk om echt zeker te zijn, want er zit een addertje onder dit gras: als a klein wordt, bijv. $a = 0.05$, dan is de

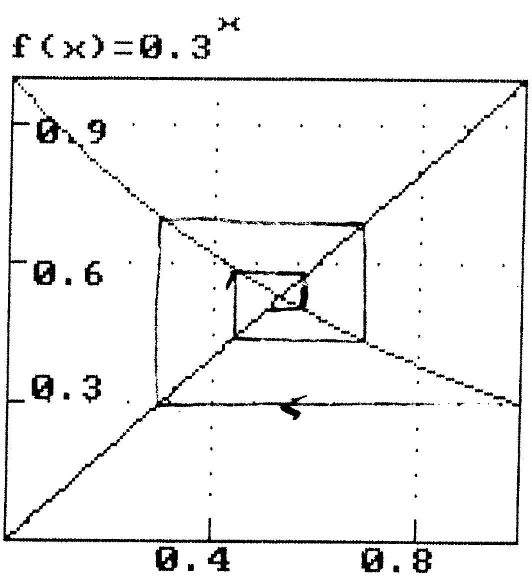


fig. 2

grafiek van a^x in de buurt van het snijpunt steiler dan de diagonaallijn en dan gaat het niet goed meer! Eén inzender heeft dat gemist, de anderen merkten het op en bewezen ook wat in de tabel hieronder is te zien.

n= 90	.13735269
n= 91	.66267414
n= 92	.13735392
n= 93	.66267170
n= 94	.13735492
n= 95	.66266972
n= 96	.13735574
n= 97	.66266809
n= 98	.13735641
n= 99	.66266676
n= 100	.13735695

We nemen dus $a = 0.05$ en kijken naar iteratie 90 t/m 100. Er is een soort 'dubbellimiet' ontstaan, een cyclus van twee getallen waartussen heen en weer wordt geslingerd. Hulde aan degenen die dit ontdekt hebben! Makkelijk was het niet.

De grens voor a, waaronder dit schommelverschijnsel altijd optreedt, is volgens de inzenders (en volgens mij, en volgens L. Maassen) juist $a = e^{-e}$.
Met behulp van suggesties uit de voorgaande illustraties en wat puzzeldrift kan dat allemaal gecontroleerd worden; succes.

Apart staat opgave 38 c:

Voor welke $(x, y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ geldt

$x^y = y^x$ en $x \neq y$?

Behalve mondelinge 'oplossingen' binnen OW&OC-kringen, is alleen het drietal Staring, Wulff en Nijmeijer met een oplossing gekomen.
We kennen natuurlijk allemaal het geval $2^4 = 4^2$. De vraag is dus of er meer mogelijkheden zijn; in $\mathbb{Q}$ wel te verstaan, want anders is het flauw. Bij elke x in $\mathbb{Q}^+$ is weliswaar een y te vinden met $x^y = y^x$, maar die y zal – zo blijkt – zelden rationaal zijn.

Met een kleine wijziging volgt hier de oplossing van genoemd trio.

Stel $r = \frac{y}{x}$; neem aan: $y > x$.
Men vindt nu snel:

$$\text{I} \quad \begin{cases} x = r^{\frac{1}{r-1}} \\ y = r^{\frac{r}{r-1}} \end{cases}$$

r is rationaal; zeg $\frac{k}{m}$, met $\text{ggd}(k, m) = 1$.

Dus hebben we:

$$\text{II} \quad \begin{cases} x = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{m}{k-m}} \\ y = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{k-m}} \end{cases}$$

Als $k - m = 1$, zijn x en y beide rationaal. We hebben nu al oneindig veel oplossingen gevonden, nl. voor elk natuurlijk getal m:

$$\text{III} \quad \begin{cases} x_m = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m} \\ y_m = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} \end{cases}$$

Voor $m = 1$ zijn x en y zelfs natuurlijke getallen.
De keus $k - m = 1$ blijkt noodzakelijk te zijn.
Als volgt wordt dat duidelijk.
We gaan een combinatie $x^a y^b$ proberen te maken, waarbij $x^a y^b = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{k-m}}$ en a en b geheel zijn. Dan proberen we daarna te laten zien dat dan $k - m = 1$ moet gelden om het rechterlid rationaal te krijgen.
Die a en b vinden we door oplossen van:

$a \bullet m + b \bullet k = 1.$

Dat lukt, want $\text{ggd}(k, m) = 1$.
$\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{k-m}}$ kan alleen rationaal zijn, als k en l beide $(k - m)$-machten zijn. Maar als $l = k - m$ groter dan 1 is, liggen alle l-machten van natuurlijke getallen meer dan l uit elkaar. Het lukt dus niet, III is dus volledig.

Een laatste opmerking bij opgave 39, sabbelen op π. Daarin werd π met een arctg-reeks benaderd:

$$\pi = 4\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots\right)$$

Bij stoppen bij de term $\frac{-4}{1999}$ bleek een decimaal niet te kloppen, de derde, maar dan een stuk weer wel.
K.A. Post stuurde een kopie van de bron waar ik dit probleem uit kende: de 'Math. Gazette' van oktober 1982. In feite is het een Brits tijdschrift voor leraren, maar het gooit nogal hoge ogen wat wiskunde-doen betreft. In het tijdschrift verschenen gevarieerde antwoorden, maar K.A. Posts eigen oplossing schittert door elegantie.

Centraal idee is, dat de limiet van de reeks voor π steeds dichtbij het midden tussen twee termen zal zitten. Nemen we de term $\frac{-4}{1999}$ nog eens bij de kop, dan

ligt de limiet dus dichtbij het getal:

$$4\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\tfrac{1}{1999}\right)+\tfrac{1}{1000}.$$

En die $\frac{1}{1000}$ zorgt voor de afwijkende decimaal.

K.A. Post bewijst, door de integraal 'achter' de reeks,

$$\pi=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

in het spel te brengen dat, in de notatie van vorige keer.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}<(-1)^n(\pi-S_n)<\frac{1}{n}$$

Daar is ie dan: de $\frac{1}{2n^3}$ is als $n=1000$, klein genoeg om nog heel wat goede decimalen te garanderen.
Dat hiermee de wonderen niet uit de wereld zijn, wordt uit het volgende echter wel duidelijk.
We weten:

$$\ln(2)=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\ldots.$$

We berekenen (met de PDP-11) in 30 decimalen ln(2) en S(5000), de som van de eerste 5000 termen.
De afwijkende decimalen komen nu in plukjes voor:

```
ln(2)   = .693147180559945309417232121458
s(5000) = .693047190559945109417248121472
```

Geen toeval, echt niet. Sterkte!

Aad Goddijn.

N.B. De grafieken zijn getekend met behulp van het programma 'GRAFIEK' van Piet van Blokland en Douwe Kok.
Voor inlichtingen kunt u zich wenden tot:
VL, Vakgroep Wiskunde/Informatica, Postbus 261, 1110 AG Diemen.

---

coi centrum voor onderwijs en informatietechnologie

Evaluatie educatieve programmatuur op radio

Vanaf maandag 7 september zal het Soft- en Courseware Evaluatiecentrum Nederland SCEN een softwarerubriek verzorgen in het radioprogramma 'Chips die je niet kunt eten'.
De rubriek is bestemd voor leerkrachten uit alle onderwijssectoren en zal per uitzending thematische softwarebesprekingen bieden. Praktijkervaringen en de uitkomsten van de door SCEN uitgevoerde evaluaties komen in deze rubriek uitgebreid aan de orde.
Vanaf 7 september wekelijks om 18.10 uur op radio 5: SCEN-evaluaties in het programma 'Chips die je niet kunt eten'.