Basisvorming in de ruimte

A. van Streun
R.U., Groningen

Samenvatting

De ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen zal ongetwijfeld een belangrijke plaats krijgen in een nieuw basisprogramma voor 12–15 jarigen. Mogelijke leerinhouden passeren de revue. Aan welke criteria moeten de onderwerpen voldoen? Een recente SLO-publikatie en ervaringen met de ontwikkeling van 'Wiskundelijn' worden in de beschouwing betrokken.

Het ruimtelijke voorstellingsvermogen

Eén dezer dagen viel mij het doorwrochte verhaal van prof. dr. Heinrich Wölpert in 'Mathematik Unterricht' uit 1983 weer in handen. Onder de titel *'Materialien zur Entwicklung, der Raumvorstellung im Mathematikunterricht'* bespreekt hij het brede belang van het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen, waarna hij een uitputtende reeks van mogelijke ruimtemeetkundige activiteiten presenteert. Voldoende om in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs jaarlijks twee lesuren mee te vullen. Op grond van psychologisch onderzoek noemt Wölpert de leeftijd van 7–13 jaar als de meest gunstige voor de ontwikkeling van de bekwaamheid om *mentaal* ruimtelijk te kunnen zien en te kunnen denken. Na die leeftijdsperiode komt de groei in het ruimtelijk inzicht geleidelijk tot stilstand.
Voor de ontwikkeling van een leerplan voor 12–16 jaar en voor de ruimtemeetkunde in de bovenbouw van havo en vwo is zo'n constatering niet onbelangrijk. De basis moet in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs worden gelegd. Ontbreekt de vorming van het ruimtelijk voorstellingsvermogen in die jaren, dan wordt het later moeilijk om er iets aan te doen. Is dat de verklaring van het bekende verschijnsel bij de oude stereometrie èn bij de nieuwe ruimtemeetkunde, dat sommige leerlingen nooit tot dat ruimtelijk inzicht komen? Is het voor hen wellicht te laat?

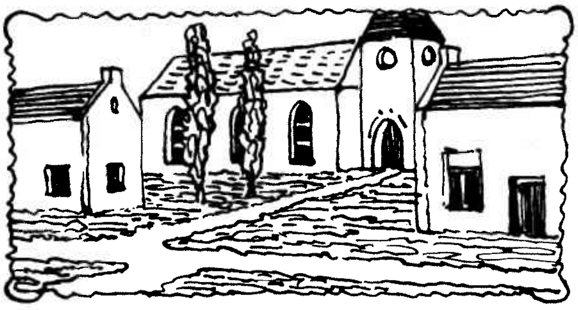
Aansluiting bij het basisonderwijs

Ook al nemen we het genoemde psychologisch onderzoek gebaseerd op intelligentietests niet al te serieus, dan nog lijkt een nadere studie van die vorming op zijn plaats. Waarmee beginnen we in het voortgezet onderwijs? Wat is dat ruimtelijk voorstellingsvermogen eigenlijk?

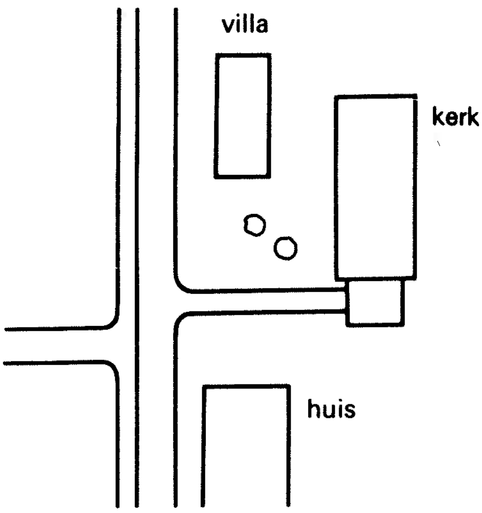
Links en rechts *Fig. 1*

(*a*) *Je staat bij de kerk.*
Je kijkt naar de boerderij.
Staat de grote boom aan je linker- of je rechterkant?
(*b*) *Nu sta je bij de grote boom.*
Je kijkt naar de molen.
Staat de kerk aan je linker- of aan je rechterkant?
(*c*) *Nu sta je bij de boerderij. Je kijkt in de richting van de kerk.*
Staat de molen links of rechts van je?

Een rekenmethode zoals 'Rekenen & Wiskunde' laat de leerlingen plaatjes en plattegronden aan elkaar koppelen. Heeft dat met die vorming te maken?
Ik denk het wel. "Stel je staat bij de kerk..." Je verplaatst je *mentaal* naar de positie in de tekening of naar het aangegeven punt op de plattegrond. Flauw voor de brugklas? Hebt u nog nooit iemand ontmoet die geen plattegronden of kaarten kon lezen? Of foto's kon interpreteren? En kunt u direct op het werkblad aangeven waar de fotograaf staat?



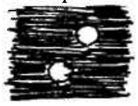
Kun je op het werkblad precies de plaats aangeven waar de foto is genomen?
Overleg met elkaar.

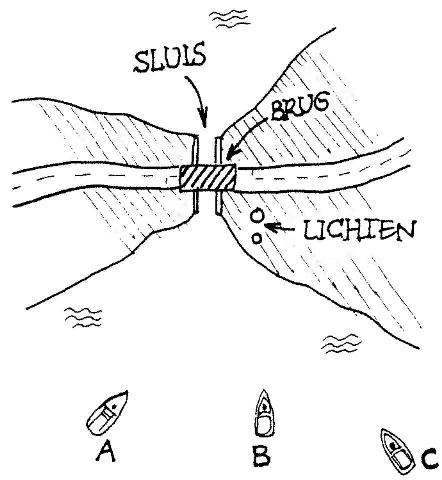


Waar staat de fotograaf? Fig. 2

De SLO spreekt in dit verband van het interpreteren van vlakke weergaven, zoals bij het lezen van kaarten, plattegronden, foto's en bouwtekeningen nodig is. Mijns inziens maatschappelijk relevant, goed onderwijsbaar en rijk aan didactische mogelijkheden.

Hier zie je een tekening van de sluis, van bovenaf gezien. Je ziet daarop de brug voor fietsers en auto's, die je op de foto's ook gezien hebt.
Ook staan beide lichten erop.
Het licht dat het grootst is getekend stelt het licht voor op de hoogste *paal. Dat licht staat ook achter de andere, gezien vanaf de schepen.*
Stel je voor dat je op één van de drie schepen bent. Het is al donker.
Je ziet de lichten zo:
Op welk schip bevind je je?

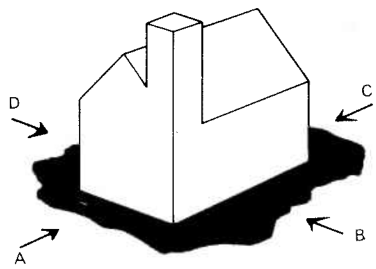




Op welk schip? Fig. 3

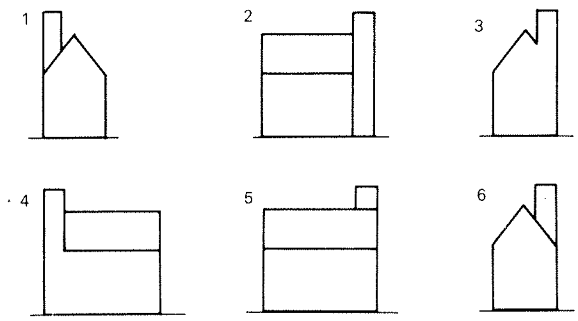
Kijken, bouwen, mentaal voorstellen

Een andere meetkundige activiteit die dankzij Wiskobas in een aantal rekenmethoden is doorgedrongen, bestaat uit het bouwen van kubushuisjes en het tekenen van aanzichten. Een uitbreiding van deze activiteiten met lucifersdoosjes (veel lastiger) vormt een mooie overgang van het kijken en bouwen naar het mentaal voorstellen van ruimtelijke situaties.



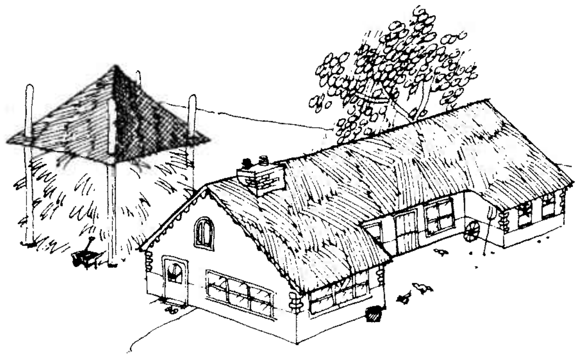
Vier van de zes tekeningen die hieronder staan, zijn aanzichten van dit model.

Welke tekeningen zijn dat?
Zet de kijkrichting erbij.



Mentaal voorstellen Fig. 4

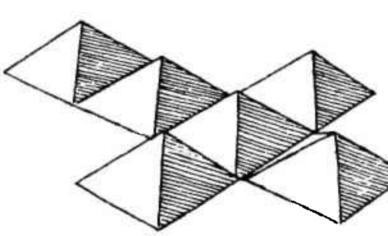
In de technieken en de bouwkunde wordt veel gebruik gemaakt van aanzichten van voorwerpen en bouwwerken. Als het leerproces zorgvuldig wordt opgebouwd vanuit het kijken naar zelf gemaakte bouwsels, dan lukt een opdracht als het tekenen van aanzichten van een boerderij uit 'Goed gezien' ook wel. Een maatschappelijk relevant onderwerp, goed onderwijsbaar als voldoende concrete ervaringen zijn opgedaan en rijk aan wiskundige activiteiten.



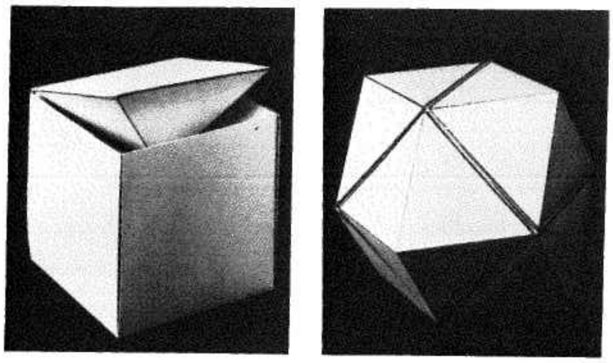
Aanzichten Fig. 5

De regelmatige veelvlakken

De start van het Wiskivon-pakketje 'Verpakkingen' vind ik nog altijd ijzersterk. Niet het benoemen van ruimtelijke modellen staat centraal, maar de wiskundig veel rijkere activiteit van het ordenen en klassificeren van een chaotische verzameling verpakkingen naar zelf bedachte criteria. Welk vervolg op dit klassificeren is nuttig en zinvol?
Kun je het verkennen van zelf gemaakte veelvlakken ook rekenen tot het ontwikkelen van het ruimtelijk inzicht? Moeten de regelmatige veelvlakken ook tot de ruimtemeetkunde voor iedereen behoren? De culturele waarde vind ik altijd een wat verdacht noodargument. Als ik in de brugklassen zie met hoeveel enthousiasme leerlingen aan die ruimtelijke figuren allerlei regelmatigheden opsporen, inhouden berekenen en symmetrievlakken tekenen, dan lijkt mij dat onderwerp rijk aan didactische mogelijkheden en goed onderwijsbaar.
Is die activiteit rondom veelvlakken ook maatschappelijk relevant? Zo te zien ervaren de leerlingen het maken van en redeneren met ruimtelijke modellen als zinvol. Maar behoort de ontdekking van de formule van Euler tot de basisvorming voor iedereen, zoals de SLO voorstelt? In 'Wiskundelijn' staat die voorshands onder WIT, voor de liefhebbers.



(c) *Lijm op elk vierkant een piramide, zoals is aangegeven in de tekening.*
(d) *Naar binnen gevouwen wordt het een kubus. Naar buiten gevouwen krijg je een ruitentwaalfvlak.*

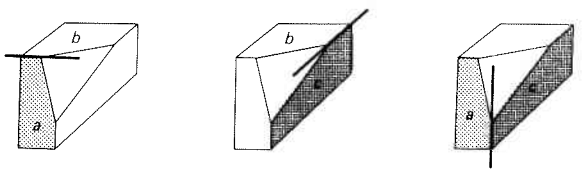


(a) *Wat is de inhoud van de kubus, die je in som 11 hebt gevouwen?*
(b) *Wat is de inhoud van één piramide?*
(c) *Wat is de inhoud van het ruitentwaalfvlak?*

Het ruitentwaalfvlak Fig. 6

Onmogelijke figuren

In SMP 11–16 ontdekte ik voor het eerst de didactische mogelijkheden van onmogelijke figuren. Waarom is de getekende figuur onmogelijk? Dat kun je alleen maar beredeneren als je weet hoe lijnen en vlakken ten opzichte van elkaar kunnen liggen. Twee snijdende vlakken hebben één snijlijn. De drievlakkenstelling moet kloppen. De bekende eigenschappen uit de oude stereometrie komen door deze non-voorbeelden veel beter uit de verf. Mooie zinvolle oefeningen in het redeneren met meetkundige stellingen, maar niet voor iedereen?



De drie snijlijnen gaan niet door één punt Fig. 7

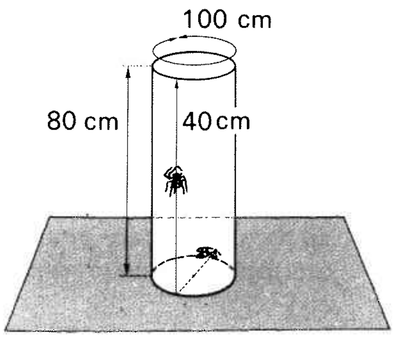
Een mooie vondst als je in 4 vwo de onderlinge ligging van lijnen en vlakken systematisch aan de orde stelt. Didactisch rijk, maatschappelijk mijns inziens niet zo relevant en voor mij is het de vraag of die onderlinge ligging in de eerste jaren van de basisvorming op elk niveau wel onderwijsbaar is.

Berekenen van lengten

Het berekenen van afstanden met behulp van de stelling van Pythagoras in balken en piramides is een vaste activiteit in het wiskundeprogramma van de onderbouw havo-vwo en van het lbo-mavo. "Meneer, hoe kun je nu *zien*, dat die hoek recht is?" Volgens mij kun je dat helemaal niet zien. Docenten en leerlingen met veel ervaring en een goed geheugen *weten* dat die hoek recht is.

Alle andere stervelingen moeten maar een diagonaalvlak of iets dergelijks op schaal tekenen. Zoals iedereen uitslagen moet tekenen, als de kortste weg over de buitenkant van een ruimtelijke figuur moet worden berekend.
Als de stelling van Pythagoras tot het door iedereen te beheersen wiskundig gereedschap moet worden gerekend, dan geldt dit ook voor toepassingen in de ruimte.

Stella zit op de buitenkant van een cilindervormige glazen pot, 40 cm onder de rand. Fred zit in de glazen pot recht tegenover de plaats waar Stella op de cilinder zit. De cilinder is 80 cm hoog en de cirkelomtrek is 100 cm.



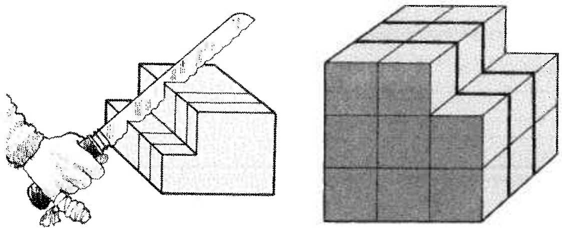
(a) Teken de kortste weg van S naar F op schaal.
(b) Bereken de lengte van die kortste weg.

De kortste weg *Fig. 8*

Op dit moment behoort de driehoeksmeetkunde met sinus en tangens nog net tot het C-programma. Het onderwerp is berucht (moeilijk onderwijsbaar), in technische richtingen zeker relevant en het heeft mijns inziens didactische mogelijkheden in de klassieke toepassingssfeer, zonder het functieverhaal erbij te halen. Hoeken in de ruimte horen er dan ook bij.
Met enige twijfel neig ik ertoe om de SLO bij te vallen, die dit onderwerp niet tot het gemeenschappelijke laagste streefniveau wil rekenen. Hoewel 'Vlieg er eens in' toch wel goede didactische aanknopingspunten bevat.

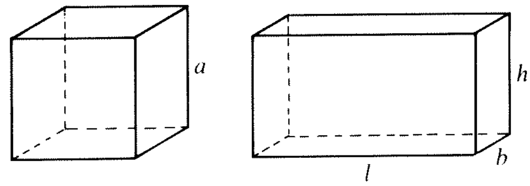
Inhouden

De aansluiting bij het basisonderwijs was even uit het zicht verdwenen, maar met het onderwerp 'Inhouden' zijn we er weer. Zowel de snelle verkorting naar lengte × breedte × hoogte als het (blijven) stapelen met blokjes van 1 cm^3 komt in de verschillende rekenmethoden voor. Ergens zag ik ook 1/3 × hoogte × grondvlak. Wat doe je in de gemeenschappelijke basisvorming aan inhouden? Geen formules voor allerlei typen ruimtelijke modellen alstublieft, maar stapelen met kubusjes en de modellen herleiden tot balken. Dat lijkt mij zinvol en voor iedereen te doen. Een prisma, breed opgevat, is het beste startpunt omdat zowel de vorm als de berekening voldoende algemeen zijn.



Dwarsdoorsnede × lengte *Fig. 9*

Nadat ik bovenstaande conclusies had geformuleerd, heb ik de gangbare wiskundeboeken voor de eerste drie leerjaren erop nageslagen. Tot mijn verbazing is er nauwelijks iets te vinden over inhoudsberekeningen. Hoort het volgens de auteurs thuis op het voorafgaande basisonderwijs? Is het toch niet maatschappelijk zo relevant als ik dacht? Of acht men het niet didactisch rijk genoeg! De SLO spreekt van de inhoudsformule van een rechthoekig blok, een rechthoekig prisma, een cilinder en samenstellingen daarvan. Kennelijk alleen met het oog op het mavo-lbo-examen verschijnt de inhoudsformule van een balk in het allerlaatste deel van de leerboekenseries, zoals in deel 4m van 'Getal en Ruimte' en in deel 7m van 'Moderne Wiskunde'.



Inhoud

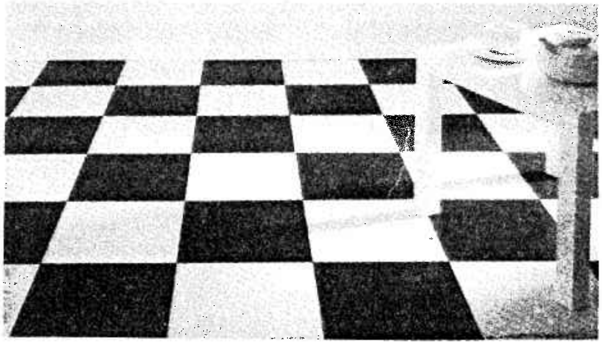
De inhoud van een kubus met ribbe a *is* a^3.
Een kubus met ribbe 1 heeft een inhoud 1. We noemen zo'n kubus een eenheidskubus.
De inhoud van een balk is gelijk aan lengte × breedte × hoogte, of ook wel: oppervlakte grondvlak × hoogte.

Deel 7m, 'Moderne Wiskunde' *Fig. 10*

Over de plaats van de inhoudsberekeningen in de basisvorming zal kennelijk verder gediscussieerd moeten worden. Mijns inziens wel maatschappelijk relevant, goed onderwijsbaar, maar met een duidelijk risico op een verschraling tot didactisch arm gesubstitueer in formules.

Tekenmethoden

Moeten tekenmethoden van ruimtelijke figuren tot de basisvorming worden gerekend of kunnen de leerlingen volstaan met enkele niet verplichtende vuistregels? Het tekenen met perspectief of het beoordelen van tekeningen op perspectief is een aansprekend onderwerp. Maar is het wel maatschappelijk relevant genoeg voor iedereen? En wordt het niet snel te technisch of te veel gepuzzel? Ik weet het niet.

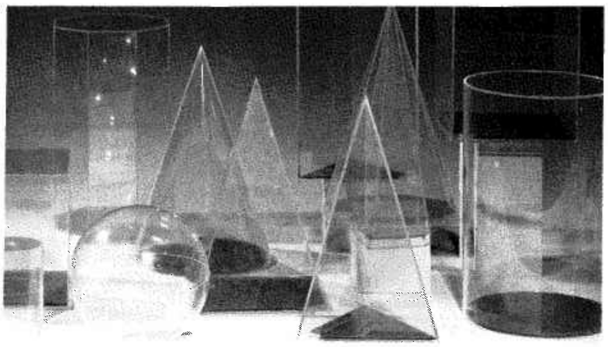


Perspectivische vertekening *Fig. 11*

Opgaven zoals de tegelvloer uit 'Vlak voorbij' behoren wel tot de wiskunde voor iedereen, denk ik, maar het onderzoeken van drie-dimensionale weergaven in centraal perspectief, parallelperspectief en scheve projectie, zoals de SLO oppert, klinkt mij wat te zwaar. Laat staan het voorgestelde onderzoek naar behoud van gelijke lengten bij perspectivische afbeeldingen, of het onderzoek of een scherpe hoek stomp kan worden, of de schaduw van een kubus een vijfhoek kan opleveren e.d. Interessant, wellicht onderwijsbaar, maar niet relevant voor iedereen.

Doorsneden, symmetrieën, rotaties

De lijn- en rotatiesymmetrie in het platte vlak zijn relatief eenvoudige begrippen, die uitstekend in allerlei vormen kunnen worden aangewezen. De analogie naar ruimtelijke figuren ligt voor de hand. Mijn ervaring in 4 vwo met het opzoeken van symmetrievlakken en vooral met het opsporen van rotatieassen maakt mij wat huiverig voor het plaatsen van dit onderwerp in de basisvorming. Lastig, moeilijk voorstelbaar, eigenlijk alleen goed uit te voeren als de leerlingen de modellen in de hand kunnen nemen. Gelukkig importeert de firma Jegro sinds kort de plastic modellen van Arnold in Nederland, zodat in elk wiskundelokaal een eventueel tekort aan geschikte modellen snel is aan te vullen. Doorsneden zijn eveneens goed demonstreerbaar door de modellen gedeeltelijk met vloeistof te vullen.



Ruimtelijke modellen *Fig. 12*

Welke criteria bepalen de leerstofkeuze?

Het lijstje van mogelijke onderwerpen die onder het etiket 'ruimtemeetkunde' vallen, is nog lang niet uitgeput. Wölpert noemt bijvoorbeeld nog de Möbiusband en de wig van Wallis. Het planetenstelsel is een andere keuze of een meer thematische aanpak van het onderwerp 'Wat zie ik?' Welke criteria moet je aanleggen bij het bepalen van de inhoud van de basisvorming? Al schrijvende kwamen er drie bij mij op:

- Het onderwerp moet *maatschappelijk relevant* zijn.
- Het onderwerp moet *op elk niveau*, van lbo tot vwo, *onderwijsbaar* zijn.
- Het onderwerp moet aanleiding kunnen geven tot *belangrijke wiskundige activiteiten*.

Het *eerste criterium* kan het beste beoordeeld worden door *niet-wiskundigen*. De wereldwijde golf 'New Math' met de nadruk op wiskundige structuren en de taal van de verzamelingen en relaties stuitte vanaf het begin op verzet en onbegrip van de niet-wiskundige gebruikers van wiskunde. Na 1968 protesteerden ook in Nederland deze gebruikers.
Het *tweede criterium* kan het beste beoordeeld worden door de *wiskundedocenten* in het *lbo-mavo*. Bij de leerplanwijziging in 1968 hadden zij die inspraak niet, met de bekende gevolgen. Dat moet nu anders.
Het *derde criterium* zal in de onderlinge discussie tussen leerplanontwikkelaars, wiskundedidactici en wiskundedocenten moeten worden beoordeeld. "*Wat leren leerlingen hier meer dan alleen de leerstof?*" Dan denk ik aan heuristische methoden, aan een wiskundige attitude, aan generaliseren/specialiseren, aan abstraheren/concretiseren, aan mathematiseren enz. Allemaal te formuleren als lange-termijn-doelen die met de ene leerstof beter zijn na te streven dan met de andere. Zo besteedden wiskundigen als Morris Kline en René Thom het inruilen van de klassieke meetkunde voor lineaire algebra met het argument, dat niet de leerstof bij die meetkunde zo belangrijk was, maar de wiskundige attitude en probleemaanpak die juist met meetkundige problemen zo goed was te ontwikkelen.
En wie beslist vervolgens? Natuurlijk de minister, maar op basis van welke adviezen?
Wie moet de minister horen?
Dat moeten we opzoeken.

Aan wie het laatste oordeel?

Zo'n beoordeling van een nieuw basiscurriculum moet georganiseerd worden. Natuurlijk niet door de ontwikkelgroep of de begeleidende commissie, maar door een meer onafhankelijke instantie. Is dat niet een mooie taak voor de VALO, die het veld moet vertegenwoordigen?

Literatuur

Kline, M.: *Implications for Curriculum Design*, The Mathematics Teacher, oktober 1976.
Thom, R.: *Modern Mathematics: An Educational and Philosophic Error?*, 'American Scientist', december 1971.
Wölpert, H.: *Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung in Mathematikunterricht*, Mathematik Unterricht, juni 1983.
De illustraties zijn afkomstig uit de SLO-pakketjes, 'Moderne Wiskunde' en 'Wiskundelijn'.