Niveaulijnen en borduurpatronen

H.A. Lauwerier
M.I., U.v.A., Amsterdam

Samenvatting

Functies van twee variabelen vormen een bron van inspiratie voor computer-fanaten. Niveaulijnen en niveaugebieden van dergelijke functies leveren vaak prachtige plaatjes.
Voor degenen die nog steeds twijfelen of ze nog aan de computer zullen gaan een aanmoediging.

Bent u al aan de computer? Sommige docenten staan er nog aarzelend tegenover, zien op tegen het lezen van een programmeertaal of denken het nog zonder te kunnen stellen. Anderen zijn wellicht verslaafd, hebben thuis een computer en dreigen nachtrust en het geluk van hun levenspartner te verstoren. Wellicht kan dit artikeltje wat hulp bieden. U leert er met uiterst eenvoudige hulpmiddelen zowel functies van twee variabelen te analyseren als een handwerkboek met modellen voor tafelkleedjes samen te stellen.

Eerst iets over de computer. Het beeldscherm is opgebouwd uit een matrix van zgn. pixels. In de hoogste resolutie zijn er meestal 320 × 200 of 640 × 400 beeldpunten. Ze zijn adresseerbaar als (p,q) waarbij de matrixconventie gevolgd wordt.
D.w.z. p loopt van 0 tot 319(639) van links naar rechts en q loopt van 0 tot 199(399) van boven naar beneden. We stellen ons voor dat we een IBM-compatible computer gebruiken met GW-Basic als programmeertaal. Bovendien veronderstellen we dat het beeldscherm de vorm heeft van een liggende rechthoek met de verhouding 4 : 3. Een kleine berekening laat zien dat de pixels horizontaal wat dichter bij elkaar staan dan verticaal en wel in de verhouding 6 : 5. We nemen aan dat het beeldscherm monochroom is met een achtergrondkleur die we zwart noemen. De voorgrondkleur noemen we wit. Het tekenen op het scherm is dus net als het schrijven met wit krijt op een zwart schoolbord.

Het volgende programma is de kern van wat we gaan doen.

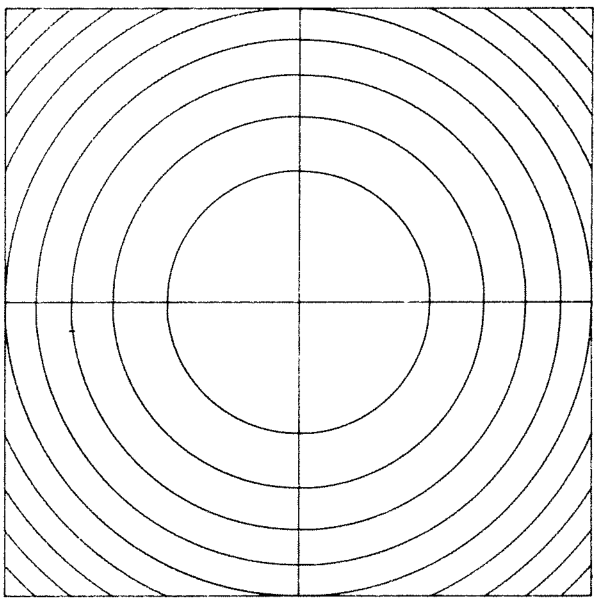
```
10 REM ***PATROON***
20 SCREEN 3 : CLS
30 N=10
40 FOR I=-N TO N
50 FOR J=-N TO N
60 X=I/N : Y=J/N
70 P=320+6* I : Q=200-5*J
80 PSET (P,Q)
90 NEXT J : NEXT I : END
```

Op regel 20 wordt met de opdracht screen 3 de maximale resolutie gedefinieerd. We veronderstellen dat dit als bij de Olivetti M24 neerkomt op 640 × 400 pixels. De tweede opdracht cls, na de dubbele punt als koppelingsteken, maakt het scherm schoon. Met de dubbele lus van i en j plaatsen we $(2n + 1)^2$ beeldpunten in een rechthoek die dankzij de getallen 6 en 5 op regel 70 precies een vierkant is. De getallen 320 en 200 in dezelfde regel laten dit vierkant in het midden van het beeldscherm terechtkomen. Wanneer we de punten wat dichter bij elkaar willen brengen, kunnen we het beste de getallen 6 en 5 vervangen door bijv. 4 en 3. De zuivere vierkantvorm gaat daarbij een klein beetje verloren. Het puntenvierkant laten we corresponderen met het vierkant:

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

van een gewoon Cartesisch coördinatenstelsel. In de beeldpunten is dus:

$$x = i/n, y = j/n.$$



Niveaulijnen van $z = 1 - (x^2 + y^2)/2$ *Fig. 1*

Het centrale probleem is het onderzoek van een functie $z = f(x,y)$ van twee variabelen x en y. Meetkundig is zo'n functie een berglandschap waarbij z de hoogte is op de plaats (x,y). Wie ooit eens in de bergen gewandeld heeft, kent het nut van wandelkaarten waarin lijnen van dezelfde hoogte ingetekend zijn. De functie:

$$z = 1 - (x^2 + y^2)/2$$

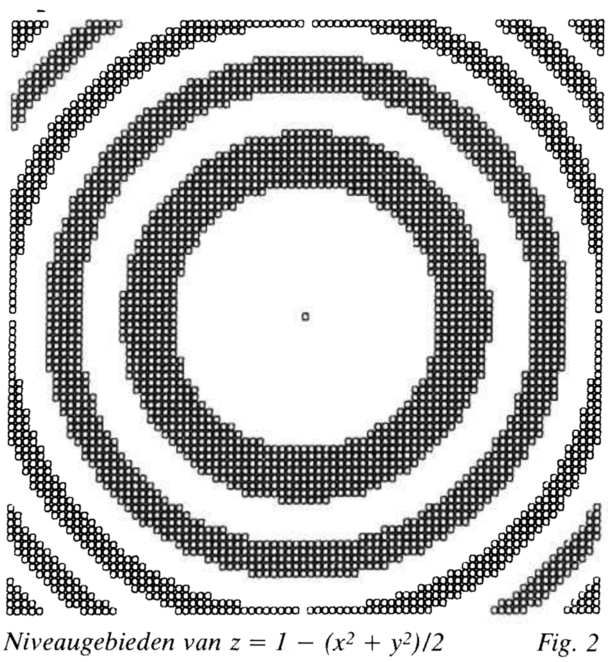
kan in zo'n hoogtekaart weergegeven worden door voor een aantal vaste waarden van z de krommen:

$$x^2 + y^2 = 2(1 - z)$$

te tekenen. Dat zijn cirkels met de straal $\sqrt{2 - 2z}$. Beperken we ons hier tot waarden van x en y uit het standaardvierkant, dan loopt z van 0 tot 1. We zouden dus niveaulijnen kunnen tekenen voor de waarden z = 0 (0.1) 1. Het resultaat is weergegeven in fig. 1. Hoe dichter de niveaulijnen bij elkaar liggen, hoe steiler het oppervlak is.

De niveaulijnen verdelen het vierkant in gebieden waarvoor $0 < z < 0.1$, $0.1 < z < 0.2$, ..., $0.9 < z < 1$. Die gebieden kunnen ook gekarakteriseerd worden door int (10 z) = 0, int (10 z) = 1, ..., int (10 z) = 9. Int. betekent 'het gehele deel van' (integer) in Basic-notatie. In een echte topografische kaart worden gebieden van verschillende hoogte onderscheiden door kleurverschillen. Hier behelpen we ons door de gebieden om en om te arceren. Dat komt erop neer die gebieden zwart (of wit) te maken waarvoor:

int (10 z) = even.



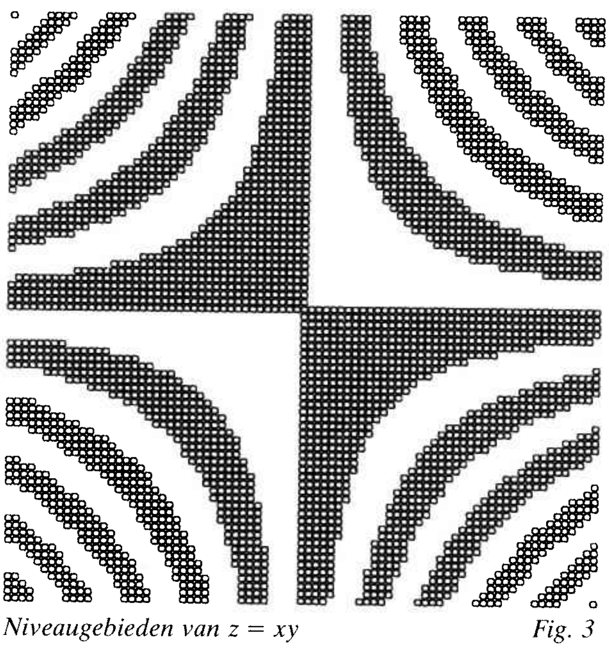
Niveaugebieden van $z = 1 - (x^2 + y^2)/2$ *Fig. 2*

We keren nu weer terug tot het pixelprogramma. In het vierkant $(2n+1)^2$ pixels brengen we alleen punten aan, wanneer ze vallen in de even niveaugebieden.

```
 10 REM ***PATROON***
 20 SCREEN 3 : CLS
 30 N=40 : C=10
 40 FOR I=-N TO N
 50 FOR J=-N TO N
 60 X=I/N : Y=J/N
 70 P=320+4*I : Q=200-3*J
 80 Z=1-(X*X+Y*Y)/2
 90 IF INT(C*Z) MOD 2 =0 THEN PSET (P,Q)
100 NEXT J : NEXT I : END
```

Daartoe vervangen we de opdracht van regel 80 door een combinatie van opdrachten waarbij alleen een punt geplaatst wordt wanneer 10z even is. Het volledige programma is nu als onderstaand. De getallen 4 en 3 op regel 70 geven op het beeldscherm een betere vulling van punten, maar in plaats van een zuiver vierkant krijgen we nu een rechthoek met de verhouding 10 : 9.

Het bovenstaand programma is al heel algemeen. Op regel 80 kunnen we eigenlijk een willekeurige functie kiezen en met de constante c kunnen we het aantal niveau's regelen.
Ter oefening nemen we de functie z = xy welke M. Kindt in de Nieuwe Wiskrant van juli 1986 besproken heeft. Het resultaat, met n = 40 en c = 10 is weergegeven in Fig. 3.



Niveaugebieden van z = xy *Fig. 3*

We voeren hetzelfde programma nog eens uit met c = 400. Het resultaat laat zich beschrijven als een regelmatig patroon in de vorm van een dambord met 100 schijven. Om eventuele kleine onregelmatigheden in dit patroon welke het gevolg zijn van toevallige afrondingsfouten op te heffen, kunnen we z = xy vervangen door bijv. xy + 0.0001 of we kunnen c = 400 vervangen door bijv. c = 400.1.

Een fraai voorbeeld van decoratieve computerkunde en zeer geschikt als kruissteekjespatroon. Het lijkt in niets op de vorige illustratie, maar toch is de wiskundige 'verklaring' vrij eenvoudig. Substitutie van x = i/40, y = j/40 in z = cxy geeft:

$$z = \tfrac{1}{4} ij$$

Vervangen we i door $i \pm 8$ of $j \pm 8$, dan krijgen we een z-waarde die met de vorige z-waarde een even getal verschilt. Modulo 2 heeft nu geen invloed. Het patroon is dus periodiek in horizontale en verticale richting met de periode 8. Het zal wel duidelijk zijn dat we met een andere keuze van c en n andere patronen kunnen krijgen. Bovendien kunnen we verschillende functies $z = f(x,y)$ nemen. En alsof dit alles nog niet voldoende is, kunnen we in plaats van mod 2 ook een andere keuze treffen, bijv.:

if int(c * z) mod 2 = 1 then ...
if int(c * z) mod 3 = 0 then ...
if int(c * z) mod 7 = 0 or int(c * z) mod 7 = 1 then ...

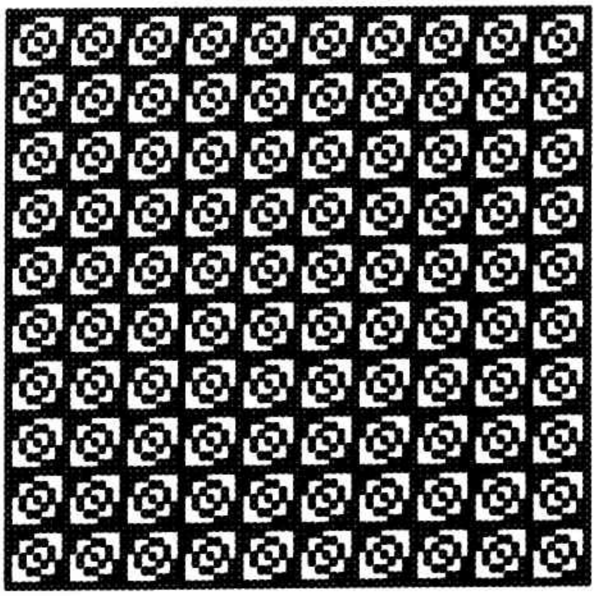


Fig. 4

Kortom, in uw computer bevindt zich een hele reeks boeken met borduurpatronen. Wie zelf eens wat wil proberen, kan het beste eenvoudige functies nemen met een ingebouwde symmetrie als:

$z = (1 - x^2)(1 - y^2)$,
$z = x^2 - y^2$,
$z = x^2 + y^2 - |xy|$,
$z = 1 - \frac{1}{2}|x + y| - \frac{1}{2}|x - y|$,
$z = 1 - \min(x^2, y^2)$,
$z = x^3 - 3xy^2$,
$z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$,
$z = xy(x^2 - y^2)$.

Wie de mogelijkheid heeft kleuren te gebruiken, kan regel 110 uitbouwen, bijv.:

int (cz) mod 4 = 0	rood,
int (cz) mod 4 = 1	wit,
int (cz) mod 4 = 2	blauw,
int (cz) mod 4 = 3	zwart.

De fraaiste resultaten krijgen we wanneer we de grafische output van de computer naar een plotter overbruggen. In plaats van puntjes kunnen we willekeurige symbolen afdrukken, bijv. kleine cirkeltjes zoals hier. Om u aan te moedigen eindig ik met twee leuke voorbeelden, gekozen uit een reeks van vele experimenten.

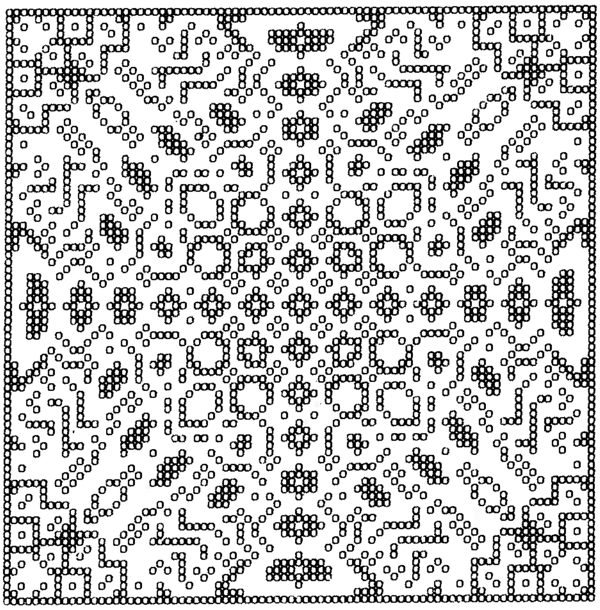


Fig. 5

Fig. 5 toont een resultaat van het standaardprogramma voor:

$z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

met de conditie:

if int (c * z) mod 3 = 0 then ...

waarbij:

$n = 40, c = 400$.

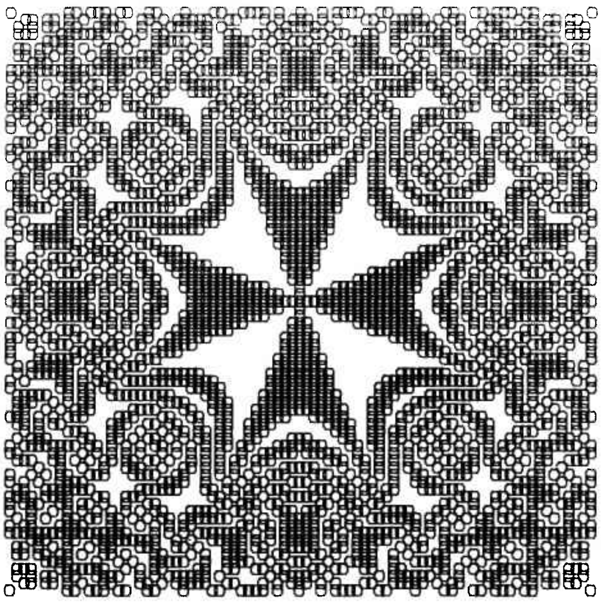


Fig. 6

Fig. 6 toont analoog:

$z = c(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$

met de gewone mod 2 conditie en waarbij $n = 40$ en $c = 40$. Als extra kunstgreep hebben we bij het plotten de naburige cirkeltjes iets laten overlappen om een soort kleurschakering teweeg te kunnen brengen.