

“Bewijs”

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1} = \\ & \underbrace{\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}}_0 + \underbrace{\binom{n-1}{k} - \binom{n-2}{k}}_0 + \underbrace{\binom{n-2}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} - \binom{k}{k} + \binom{k-1}{k-1}}_0 = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

2) In het volgende geldt: $a_i \neq a_j$ als $i \neq j$ ($i, j \in \mathbb{N}$).

a) In rij A_0 staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van a_0^n ($n \in \mathbb{N}$). Dit is duidelijk, steeds één term.

b) In rij A_1 staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dus het aantal termen van:

$$(a_0+a_1)^0; (a_0+a_1)^1; (a_0+a_1)^2; \dots \text{ enz.}$$

Dit volgt direct uit de driehoek van Pascal.

Het aantal termen op de horizontale rijen is 1, 2, 3, ... enz.

c) Nu rij A_2 :

Neem bijvoorbeeld:

$$(a_0+a_1+a_2)^8 = ([a_0+a_1] + a_2)^8.$$

Dit ontwikkelen we en laten de coëfficiënten weg. Er ontstaan de volgende vormen:

rij:	vorm:	aantal verschillende termen in rij A_1 :
0	a_2^8	$1 = \binom{1}{1}$
1	$(a_0 + a_1)^1 \cdot a_2^7$	$2 = \binom{2}{1}$
2	$(a_0 + a_1)^2 \cdot a_2^6$	$3 = \binom{3}{1}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
7	$(a_0 + a_1)^7 \cdot a_2$	$8 = \binom{8}{1}$
8	$(a_0 + a_1)^8$	$9 = \binom{9}{1}$

totaal 45

Het is duidelijk dat de vormen in de rijen 0 t/m 8 allemaal verschillende termen bevatten.

De vorm $(a_0+a_1)^n \cdot a_2^{8-n}$ heeft evenveel verschillende termen als $(a_0+a_1)^n$. Maar deze aantallen staan in rij A_1 !

Het aantal verschillende termen van

$(a_0+a_1+a_2)^8$ is dus:

$$\binom{9}{1} + \binom{8}{1} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1}.$$

Dit is dus de som van de eerste 9 termen van rij A_1 dus de 9-de term uit rij A_2 . Dit aantal is $\binom{10}{2}$ volgens (**).

Nu in het algemeen:

$(a_0+a_1+a_2)^n = ([a_0+a_1] + a_2)^n$. Weer ontwikkelen:

rij:	vorm:	aantal verschillende termen in rij A_1 :
0	a_2^n	$1 = \binom{1}{1}$
1	$(a_0+a_1+a_2)^1 \cdot a_2^{n-1}$	$2 = \binom{2}{1}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n-1	$(a_0+a_1+a_2)^{n-1} \cdot a_2$	$n = \binom{n}{1}$
n	$(a_0+a_1+a_2)^n$	$n+1 = \binom{n+1}{1}$

$$\text{totaal: } \binom{n+1}{1} + \binom{n}{1} + \dots$$

$$\dots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} = \binom{n+2}{2} = A_{2,n} (**)$$

ðf de som van de eerste n+1 termen uit de rij A_2 , en dat is gelijk aan de n+1-ste term in rij A_2 .

Conclusie:

In rij A_2 staan het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1+a_2)^n$ met $n \in \mathbb{N}$.

d) Stel in rij A_i staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1+\dots+a_i)^n$ met $n \in \mathbb{N}$.

Neem $(a_0+a_1+a_2+\dots+a_i+a_{i+1})^n = ([a_0+a_1+\dots+a_i] + a_{i+1})^n$.

Weer ontwikkelen:

rij:	vorm:	aantal verschillende termen in rij A_1 :
0	a_{i+1}^n	$\binom{1}{1}$
1	$(a_0+\dots+a_i)^1 \cdot a_{i+1}^{n-1}$	$\binom{i+1}{1}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n-1	$(a_0+\dots+a_i)^{n-1} \cdot a_{i+1}$	$\binom{i+n-1}{1}$
n	$(a_0+\dots+a_i)^n$	$\binom{i+n}{1}$

$$\text{Samen is dat weer volgens (**): } \binom{n+i+1}{i+1}$$

Het is samen ook de som van de eerste n+1 termen uit de rij A_i , dus de n+1-ste term uit rij A_{i+1} .

Dus in rij A_{i+1} staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1+\dots+a_{i+1})^n$ met $n \in \mathbb{N}$.

- 3) Terug naar $(a+b+c+d+e)^{14}$.
 Het aantal verschillende termen staat dus in rij A_4 .
 Het is de 15-de term.

A_4 : $\binom{4}{4}$; $\binom{5}{4}$; $\binom{6}{4}$; en de 15-de term is inderdaad $\binom{18}{4} = \binom{18}{14}$!

- 4) Algemeen:
 Het aantal verschillende termen van $(a_0 + \dots + a_k)^n$

is $A_{k,n} = \binom{n+k}{k}$,

want A_k : $\binom{k}{k}$; $\binom{k+1}{k}$; en de $n+1$ -ste term is

$\binom{n+k}{k}$.

- 5) Eén gevolg:

$$\binom{n+k}{k} = \binom{n}{k} \text{ dus:}$$

$(a_0 + \dots + a_n)^k$ heeft evenveel verschillende termen als $(a_0 + \dots + a_k)^n$.

Dus met het beginprobleem:

$(a+b+c+d+e)^{14}$ heeft evenveel verschillende termen als:

$$\frac{(a+b+c+\dots+m+n+o)^4}{15 \text{ termen.}}$$

de Wageningse Methode

een wiskunde-methode voor havo/vwo (en mavo).

ontwikkeld vanuit de IDWO-visie op wiskundeonderwijs

- * gaat uit van contexten die aansluiten bij onze dagelijkse belevingswereld.
- * veel aandacht voor probleemoplossend denken; technieken worden inge-oefend door deze in allerlei situaties te laten uitvoeren.
- * hernieuwde aandacht voor ruimte- en vlakke meetkunde (ook in de onderbouw).

zelfontdekken staat centraal

- * de leerling leidt zelf de theorie af, is minder afhankelijk van klassikale uitleg.
- * de leerling kan (alleen of in kleine groepen) de stof zelfstandig doorwerken; die is daarop geschreven en (jarenlang!) herschreven; er zijn antwoordenboekjes en (diagnostische) zelftoetsen.
- * dit maakt de methode ons inziens ook erg bruikbaar voor bijzondere opleidingen (avondscholen, open universiteit, enz.).
- * de leraar heeft ruimschoots gelegenheid aandacht te besteden aan individuele leerlingen.

adressenbestand

Wilt u meer weten van de Wageningse Methode en op de hoogte blijven van onze uitgaven, laat ons dat dan even weten. Een briefkaart naar Meijer en Siegers B.V., t.a.v. Will Heykamp, Antwoordnummer 36, 6860 VB Oosterbeek is voldoende om opgenomen te worden in ons adressenbestand. Wij houden u dan op de hoogte. (Als u aan een onderwijsinstelling verbonden bent, schrijf dan ook de naam en het adres van die instelling op uw kaart).

werkboekjes

- * de Wageningse Methode bestaat uit werkboekjes.
- * werkboekjes werken motiverend (elk boekje is ook weer een nieuw begin); ze zijn tijdsbesparend en niet duur.
- * er zijn antwoordenboekjes en docentenhandleidingen (waarin ook proefwerken zijn opgenomen); bovendien is er nog een bundel met proefwerken bij de onderbouw.

De methode is volledig voor de onderbouw havo/vwo en bovenbouw wiskunde A; volgend schooljaar verschijnen de eerste boekjes ruimtemeetkunde; een analyseboek (wiskunde B) staat op stapel.

Er is ook een versie van de onderbouw in boekvorm die door Educaboek wordt uitgegeven. Een mavo-editie van de Wageningse Methode is in ontwikkeling.

MEIJER & SIEGERS