Pascal

C. de Jonge
Thycollege, Oldenzaal

Samenvatting

Het is bekend dat in de driehoek van Pascal direct de coëfficiënten van de termen in de ontwikkelingen van $(a+b)^n$ met $n \in \mathbb{N}$ zijn af te lezen. Uit het artikel blijkt dat ook het aantal verschillende termen in de ontwikkeling van $(a_0 + \ldots\ldots + a_i)^n$ met $i, n \in \mathbb{N}$ direct uit de driehoek van Pascal is af te leiden.

De driehoek van Pascal blijft intrigeren.
Twee collega's bezig met kansrekening in 4 atheneum hoorde ik praten over het volgende probleem:

Hoeveel verschillende termen heeft $(a+b+c+d+e)^{14}$?

Zij waren tot het vermoeden gekomen dat dit aantal $\binom{18}{14}$ was. Als dit juist was, dan kon dat geen toeval zijn.
Op zoek dus in de driehoek van Pascal.

1) De driehoek van Pascal ontstaat door steeds twee buurgetallen in een rij op te tellen. I.h.a.:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ of}$$

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} \quad {}^{*})$$

Op elke rij van de driehoek van Pascal staan de coëfficiënten van de termen in de ontwikkeling van $(a+b)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

Je kunt ook naar andere rijen in de driehoek kijken.

rij A_0: 1,1,1,1,1,1,... of: $\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}, \binom{3}{0}, \ldots$

rij A_1: 1,2,3,4,5,6,... of: $\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \binom{4}{1}, \ldots$

rij A_2: 1,3,6,10,15,... of: $\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \ldots$

rij A_i: 1,i,........... of: $\binom{i}{i}, \binom{i+1}{i}, \binom{i+2}{i}, \ldots$

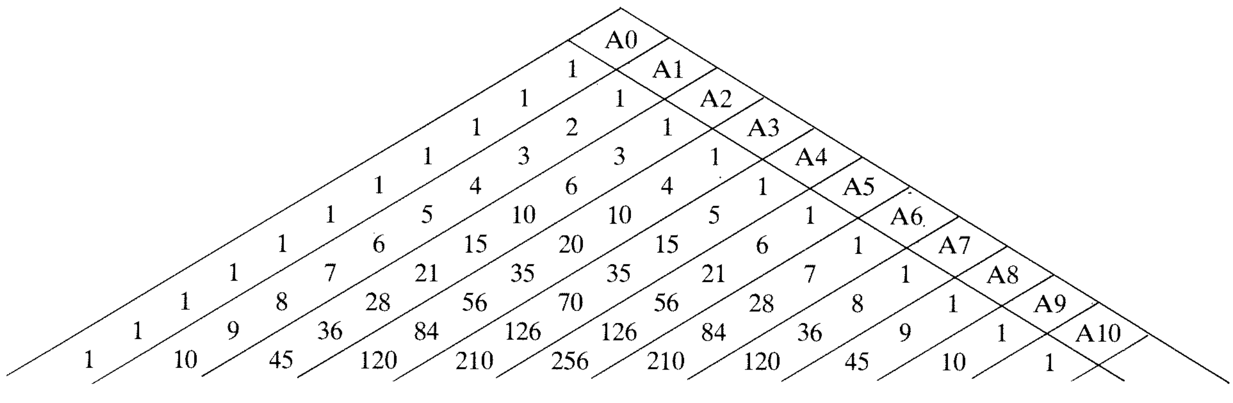
i.h.a: $A_{i,j} = \binom{i+j}{i}$ (de j+1-ste term in rij A_i; $j = 0,1,2\ldots$

Zo is te zien, dat de som van de eerste drie termen uit rij A_2 gelijk is aan de derde term in rij A_3!
I.h.a. geldt: de som van de eerste k termen uit rij A_i is gelijk aan de k-de term uit rij A_{i+1}.
Als je kijkt hoe de driehoek van Pascal is geconstrueerd dan is dat duidelijk.

Bijvoorbeeld geldt: $\binom{13}{6} = \binom{12}{5} + \binom{11}{5} +$

$+ \binom{10}{5} + \ldots\ldots + \binom{6}{5} + \binom{5}{5}$.

En i.h.a.: $\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$



"Bewijs"

$$\underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{*} + \underbrace{\binom{n-2}{k-1}}_{*} + \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{*} + \underbrace{\binom{k}{k-1}}_{*} + \binom{k-1}{k-1} =$$

$$\binom{n}{k} - \underbrace{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}}_{0} - \underbrace{\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k}}_{0} \dots\dots + \binom{k+1}{k} - \underbrace{\binom{k}{k} + \binom{k-1}{k-1}}_{0} = \binom{n}{k}$$

2) In het volgende geldt: $a_i \neq a_j$ als $i \neq j$ $(i, j \in \mathbb{N})$.

a) In rij A_0 staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van a_0^n $(n \in \mathbb{N})$. Dit is duidelijk, steeds één term.

b) In rij A_1 staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dus het aantal termen van:

$(a_0+a_1)^0$; $(a_0+a_1)^1$; $(a_0+a_1)^2$; ..... enz.

Dit volgt direct uit de driehoek van Pascal.
Het aantal termen op de horizontale rijen is 1, 2, 3, ... enz.

c) Nu rij A_2:
Neem bijvoorbeeld:

$(a_0+a_1+a_2)^8 = ([a_0+a_1]+a_2)^8$.

Dit ontwikkelen we en laten de coëfficiënten weg. Er ontstaan de volgende vormen:

rij:	vorm:	aantal verschillende termen in rij A_1:
0	a_2^8	$1 = \binom{1}{1}$
1	$(a_0+a_1)^1 \cdot a_2^7$	$2 = \binom{2}{1}$
2	$(a_0+a_1)^2 \cdot a_2^6$	$3 = \binom{3}{1}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
7	$(a_0+a_1)^7 \cdot a_2$	$8 = \binom{8}{1}$
8	$(a_0+a_1)^8$	$9 = \binom{9}{1}$

totaal 45

Het is duidelijk dat de vormen in de rijen 0 t/m 8 allemaal verschillende termen bevatten.
De vorm $(a_0+a_1)^n \cdot a_2^{\,8-n}$ heeft evenveel verschillende termen als $(a_0+a_1)^n$. Maar déze aantallen staan in rij A_1!
Het aantal verschillende termen van

$(a_0+a_1+a_2)^8$ is dus:

$$\binom{9}{1} + \binom{8}{1} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1}.$$

Dit is dus de som van de eerste 9 termen van rij A_1 dus de 9-de term uit rij A_2. Dit aantal is $\binom{10}{2}$ volgens (**).

Nu in het algemeen:
$(a_0+a_1+a_2)^n = ([a_0+a_1]+a_2)^n$. Weer ontwikkelen:

rij:	vorm:	aantal verschillende termen in rij A_1:
0	a_2^n	$1 = \binom{1}{1}$
1	$(a_0+a_1+a_2)^1 \cdot a_2^{n-1}$	$2 = \binom{2}{1}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n−1	$(a_0+a_1+a_2)^{n-1} \cdot a_2$	$n = \binom{n}{1}$
n	$(a_0+a_1+a_2)^n$	$n+1 = \binom{n+1}{1}$

totaal: $\binom{n+1}{1} + \binom{n}{1} + \dots\dots$

$\dots\dots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} = \binom{n+2}{2} = A_{2,n}$ (**)

òf de som van de eerste n+1 termen uit de rij A_2, en dat is gelijk aan de n+1-ste term in rij A_2.

Conclusie:
In rij A_2 staan het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1+a_2)^n$ met $n \in \mathbb{N}$.

d) Stel in rij A_i staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1+\dots\dots+a_i)^n$ met $n \in \mathbb{N}$.

Neem $(a_0+a_1+a_2+\dots+a_i+a_{i+1})^n = ([a_0+a_1+\dots\dots+a_i]+a_{i+1})^n$.

Weer ontwikkelen:

rij:	vorm:	aantal verschillende termen in rij A_1:
0	a_{i+1}^n	$\binom{i}{i}$
1	$(a_0+\dots+a_i)^1 \cdot a_{i+1}^{n-1}$	$\binom{i+1}{i}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n−1	$(a_0+\dots+a_i)^{n-1} \cdot a_{i+1}$	$\binom{i+n-1}{i}$
n	$(a_0+\dots+a_i)^n$	$\binom{i+n}{i}$

Samen is dat weer volgens (**): $\binom{n+i+1}{i+1}$

Het is samen ook de som van de eerste n+1 termen uit de rij A_i, dus de n+1-ste term uit rij A_{i+1}.

Dus in rij A_{i+1} staat het aantal verschillende termen in de ontwikkelingen van $(a_0+a_1+\dots+a_{i+1})^n$ met $n \in \mathbb{N}$.

3) Terug naar $(a+b+c+d+e)^{14}$.
Het aantal verschillende termen staat dus in rij A_4.
Het is de 15-de term.

A_4: $\binom{4}{4}; \binom{5}{4}; \binom{6}{4}; \ldots\ldots$ en de 15-de term is inderdaad $\binom{18}{4} = \binom{18}{14}$!

4) Algemeen:
Het aantal verschillende termen van $(a_0 + \ldots + a_k)^n$ is $A_{k,n} = \binom{n+k}{k}$,

want A_k: $\binom{k}{k}; \binom{k+1}{k}; \ldots\ldots$ en de n+1-ste term is

$\binom{n+k}{k}$.

5) Eén gevolg:
$\binom{n+k}{k} = \binom{n}{k}$ dus:

$(a_0 + \ldots\ldots + a_n)^k$ heeft evenveel verschillende termen als $(a_0 + \ldots\ldots + a_k)^n$.

Dus met het beginprobleem:
$(a+b+c+d+e)^{14}$ heeft evenveel verschillende termen als:

$$\underbrace{(a+b+c+\ldots\ldots+m+n+o)^4}_{\text{15 termen.}}$$