

Ruimteteekunde met de micro (1)

M. Kindt/H.B. Verhage

OW & OC, RU Utrecht.

Samenvatting

In dit artikel worden enkele ervaringen beschreven die in een 5e klas wiskunde B met ruimte meetkunde op de microcomputer zijn opgedaan.

Geleid door werkbladen, konden de leerlingen met gebruikmaking van een standaardprogramma experimenteren met ruimtelijke figuren.

In een volgend artikel komt een ander aspect aan de orde: de introductie van parametervoorstellingen met hulp van de micro.

Meetkunde met de microcomputer, daar moet wat van te maken zijn gezien de prachtige tekenfaciliteiten die de meeste micro's tegenwoordig hebben. In een eerder nummer van de Nieuwe Wiskrant heeft Prof. Lauwerier al op het belang van de computer voor het meetkunde-onderwijs gewezen [1]. Ook wij hebben ons door zijn ideeën laten inspireren. Eén en ander heeft geresulteerd in een projectje van zo'n zes lessen Ruimteteekunde voor wiskunde B. Naast een aantal werkbladen is ook een standaardprogramma voor de BBC-computer ontwikkeld. Zowel werkbladen als computerprogramma zijn uitgetoetst in een 5 VWO wiskunde B-klas op het Wagenings Lyceum. De klas telde 18 leerlingen en per twee leerlingen was een micro beschikbaar.

Een computermeetkundesom

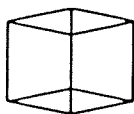
Om maar meteen een voorbeeld te geven van een opdracht op één van de werkbladen:

11. Ga met Q terug naar het hoofdmenu en kies het onderdeel ROTATIE.

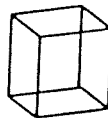
Hoe moet je de kubus draaien (om resp. x -, y - en z -as) om de volgende plaatjes te krijgen?



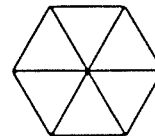
1.



2.



3.



4.

De kubus, met hoekpunten $(\pm 5, \pm 5, \pm 5)$, was bij de vorige opdracht met gebruikmaking van een eenvoudig tekenalgoritme (het programmaonderdeel MAKEN) op het scherm gekomen; eerst in een parallelprojectie met assenstelsel en vervolgens loodrecht geprojecteerd op het Oyz-vlak dat voor deze gelegenheid samenviel met het beeldscherm.

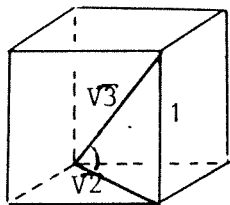
Het lukte de meeste leerlingen om de uitgangspositie:



met behulp van rotaties om de y -as en de z -as in de gevraagde gedaante op het scherm te krijgen. Dat gebeurde met proberen: een beetje vallen en opstaan, mentaal handelen en schatten.

De eerste drie luisteren minder nauw dan de vierde, waarbij twee eindpunten van een lichaamsdiagonaal moeten samenvallen. De trial-and-error methode leidde bij velen naar een rotatie om de y -as over een hoek van 35° à 36° , gecombineerd met een 45° draaiing om de z -as.

Pas op de vraag of die hoek exact te bepalen is wordt er schoorvoetend een schetsje gemaakt:



De rechthoekige driehoek met zijden 1, $\sqrt{2}$ en 3 levert een nauwkeurig resultaat van $35,26^\circ$ op, het geen onmiddellijk op het beeldscherm kan worden gecontroleerd.

Dit voorbeeld leerde ons o.a. dat een leerling, eenmaal zittend voor het beeldscherm, wel bereid is het computertje in zijn hoofd te laten werken, maar niet spontaan naar potlood en papier grijpt; een ervaring die we bij ons zelf ook hadden waargenomen. Om de leerlingen als het ware te dwingen toch zo nu en dan wat op te schrijven, hadden we voor werkbladen gekozen met ruimte voor het beantwoorden van vragen. Dat dit niet door elke leerling gewaardeerd werd, blijkt uit de volgende reactie van Arjen: *“Het was alleen vervelend dat je steeds zoveel op moest schrijven.”*

Doel van de lessencyclus

Toen we de eerste opzet voor deze lessenserie maakten, hadden we nog niet erg goed voor ogen wat we eigenlijk wilden. Er zijn zoveel mogelijkheden die er veelbelovend uit lijken te zien:

1. de leerlingen op de computer laten manipuleren met ruimtelijke figuren, in de hoop op die manier het ruimtelijk inzicht te bevorderen;
2. de leerlingen aan de hand van het tekenen van ruimtelijke figuren op een beeldscherm iets leren over verschillende projectiemethoden en eventueel ook over de formules die daar bij horen;
3. de computer gebruiken om parametervoorstellingen van cilinder, kegel e.d. tot leven te brengen.

In eerste instantie hadden we vooral het idee om aandacht te besteden aan de vraag hoe je iets ruimtelijks op een computer kunt tekenen (mogelijkheid 2), met in het achterhoofd een nog vrij vage eindopdracht zoals ‘maak een programma dat een bol tekent’. De leerlingen zouden dus zelf wat moeten programmeren. Zoals Prof. Lauwerier ook al betoogt, is dat als het om tekenen op de micro gaat bepaald geen onaantrekkelijke bezigheid. Even nadenken leert echter, dat het gevaar van een verwarrende opeenstapeling van formules hier niet denkbeeldig is. Immers, we hebben te maken met drie typen formules: van de ruimtelijke figuur, van de projectiemethode en van de transformatie van echte coördinaten naar beeldschermcoördinaten. In sommige gevallen kan deze laatste stap achterwege blijven, namelijk als de computer een standaard schaalopdracht kent. Maar ook dan schuilt er een addertje onder de grasmat, waardoor een voetbal er op het beeldscherm wel eens uit kan komen te zien als een rugbybal.

Verwarrend dus, die verschillende stappen:

figuur \rightarrow projectie \rightarrow beeldscherm

Bij nader inzien leek het ons aantrekkelijker om de wiskunde die het tekenen op de computer met zich meebrengt (de projectie- en transformatieformules) zoveel mogelijk te beperken en ons te richten op algebraïsche voorstellingen die op een heel natuurlijke wijze in tekenprogramma's voor kunnen komen.

De vage eindopdracht voor de leerlingen, ‘maak een programma dat een bol tekent’, hadden we nog steeds wel in gedachten, maar nu met een heel ander doel. We wilden proberen om met hulp van de computer parameterlijnen van gebogen vlakken in de ruimte (zie ook [2]) voor de leerlingen duidelijk te maken (mogelijkheid 3). De leerlingen zouden zelf in programmaatjes moeten kunnen inbreken, maar dan zonder hun hersens te hoeven pijnigen over projectie- en transformatieformules.

Omdat het leren programmeren in het onderwijs nogal een omstreden zaak is, lag het voor de hand ook te zoeken naar mogelijkheden voor een standaardprogramma. Zo'n standaardprogramma zou ruimtelijke plaatjes moeten kunnen tekenen, maar dan wel zo dat van de leerling ook eigen activiteit gevraagd wordt. De computermeetkundesom aan het begin van dit artikel is een voorbeeld van een opdracht die aan dit criterium voldoet.

Zo kwamen we tenslotte tot een serie van 6 lessen die er als volgt uitzag:

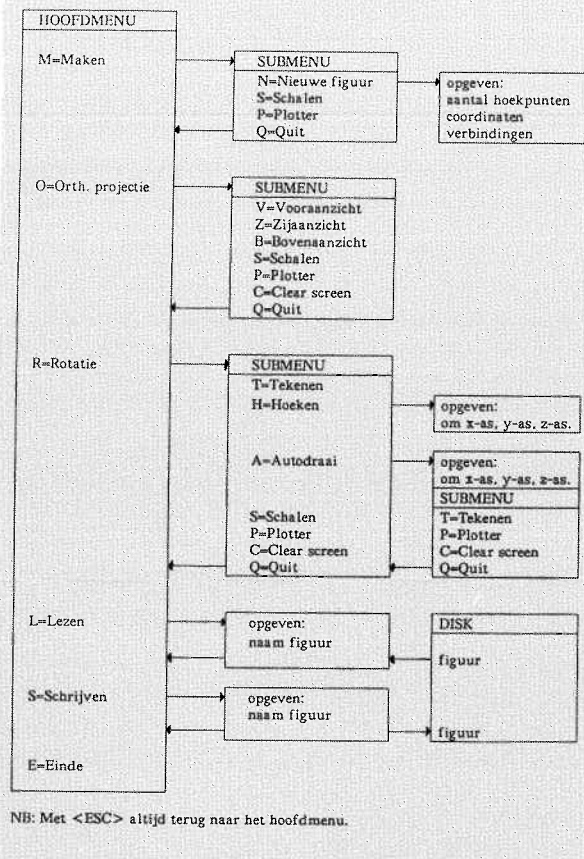
- les 1 en 2: Practicum deel 1 – oriëntatie op ruimtelijke ‘draadfiguren’ met behulp van een standaardprogramma; orthogonale projectie, rotatie en zelf figuren maken.
- les 3 en 4: Practicum deel 2 – krommen in het platte vlak tekenen op de computer; met een gegeven programma als basis zelf nieuwe programma's maken.
- les 5 en 6: Practicum deel 3 – tekenen van gebogen vlakken in de ruimte, een gegeven programma veranderen.

Door de accentverschuiving die in de delen 2 en 3 was opgetreden (van projectiemethoden naar algebraïsche voorstellingen) stond deel 1 in feite betrekkelijk los van de delen 2 en 3. In die zin is de lessenserie niet samenhangend te noemen, het komt er op neer dat in twee mogelijke richtingen (resp. de lessen 1-2 en 3-6) een aanzet is gegeven om de microcomputer bij (ruimte)meetkunde te gebruiken.

Het programma RUIFIG

Met dit programma kunnen ruimtelijke figuren gemaakt en getekend worden. In deze paragraaf bespreken we de mogelijkheden van het programma aan de hand van het practicum dat de leerlingen hebben doorgewerkt. De werking van het programma is samengevat in een schema.

Structuur van het programma RUIFIG.



Een schema van RUIFIG

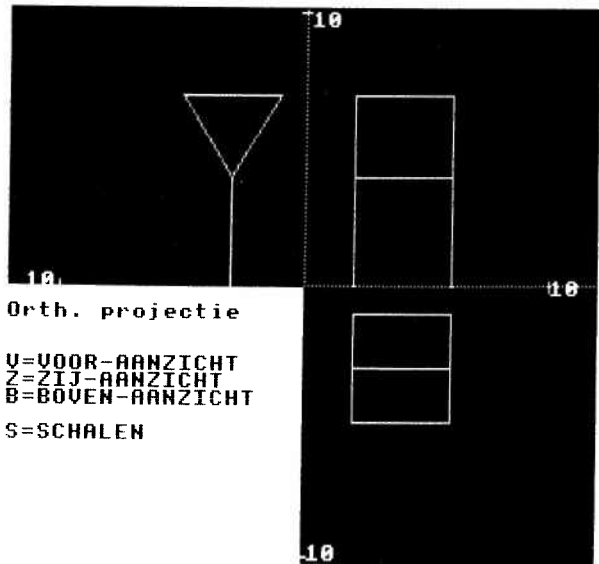
Als de leerlingen het programma gestart hebben, moeten ze om te beginnen een (onbekende) figuur van de schijf laden. Dan volgt de opdracht:

Met het onderdeel ORTHOGONALE PROJECTIES kunnen de verschillende loodrechte projecties van een figuur getekend worden.

3. Kies uit het hoofdmenu ORTH. PROJECTIE en laat vervolgens de verschillende aanzichten van de figuur tekenen. Kun je een ruimtelijke schets van de figuur maken?

Een afdruck van het beeldscherm staat in de kolom hiernaast.

Voor leerlingen die Ruimteteekunde doen is dit geen onbekende type vraag, maar het aardige is hier dat de vraag met steeds andere plaatjes gesteld kan worden. Het programma biedt namelijk de mogelijkheid om zelf nieuwe figuren te maken en die op schijf op te slaan.

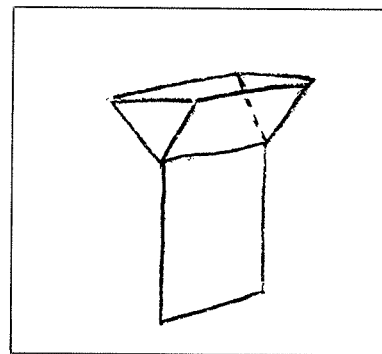


Het beeldscherm van ORTH. PROJECTIE

Een ander tekengedeelte van het programma heet ROTATIE. Hier kan een figuur naar believen om één of meer van de assen gedraaid worden (resp. om de x, y en z-as), pas daarna wordt de figuur getekend. Eén van de vragen luidt:

8. Kun je de figuur zo draaien dat je een plaatje krijgt dat lijkt op de schets die je bij opgave 3 hebt gemaakt?

Een tekening van een leerling bij opgave 3 is bijvoorbeeld:



Aangezien de leerlingen allemaal verschillende schetsen hebben gemaakt, volgen bij vraag 8 ook verschillende antwoorden.

Het draaien wordt verder nog geoefend aan de hand van de opgave over de kubus uit het begin van dit artikel. Deze kubus hebben de leerlingen zelf moeten maken.

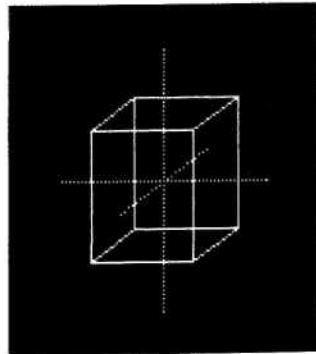
Het maken van een nieuwe figuur gaat met het programmadeel MAKEN. De figuren die gemaakt kunnen worden zijn eigenlijk een soort draadmodellen. Een figuur is vastgelegd door een aantal hoekpunten, voorzien van coördinaten, en de verbindingen daartussen. Om een figuur te maken moeten achtereenvolgens aantal hoekpunten, coördinaten en verbindingen opgegeven worden.

Een afdruk van het beeldscherm nadat de kubus is ingevoerd:

Coördinaten:

```

A:  |-----|-----|-----|-----|
B:  |-----|-----|-----|-----|
C:  |-----|-----|-----|-----|
D:  |-----|-----|-----|-----|
E:  |-----|-----|-----|-----|
F:  |-----|-----|-----|-----|
G:  |-----|-----|-----|-----|
H:  |-----|-----|-----|-----|
    
```



Verbindingen:

```

AB  CG
BC  DH
CD  EH
DA  FG
AE  GH
BF  HE
    
```

```

X (-10,10 )
Y (-10,10 )
Z (-10,10 )
    
```

```

N=NIEUW FIG
S=SCHALEN
    
```

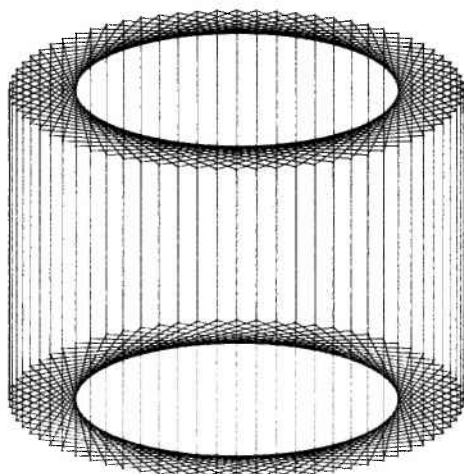
Met $X(-10, 10)$ wordt bedoeld dat de x-as van -10 tot 10 getekend is. Evenzo voor y en z.

Helaas komt de verhouding tussen hoogte en breedte van de printer niet helemaal overeen met de verhouding op het beeldscherm, waardoor de kubus op dit plaatjes wat opgerekt is. De tekening op het beeldscherm is echter wel goed van verhoudingen.

Een aldus gemaakte figuur kan vervolgens op schijf bewaard worden of in één van de tekendelen van het programma verder gebruikt worden.

Het mysterieuze AUTODRAAI

Binnen het programmadeel ROTATIE zit ook nog het verrassende onderdeel AUTODRAAI. Hiermee kan een figuur in stapjes een herhaald aantal keren gedraaid worden. Het herhaald draaien van een kubus om de z-as vanuit een goed gekozen beginstand geeft bijvoorbeeld het volgende plaatje:



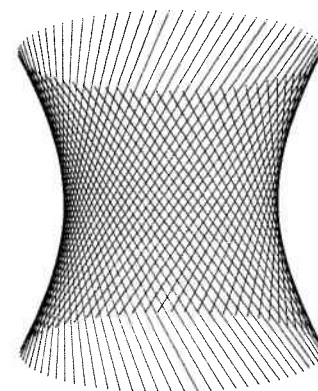
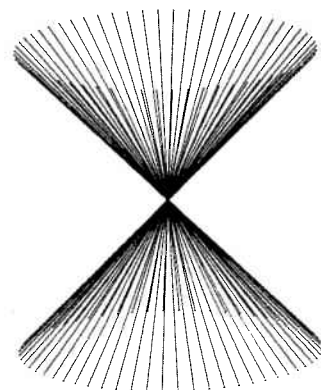
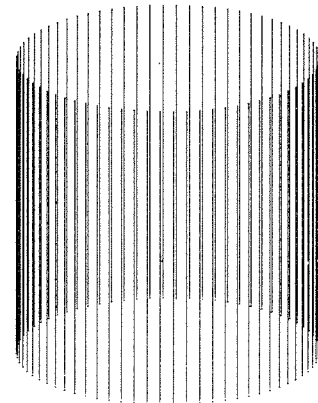
De tekening is gemaakt met een plotter, die op een eenvoudige manier vanuit het programma is aan te sturen. Gedurende de lessen was er geen plotter beschikbaar voor de leerlingen, maar voor echt mooie plaatjes is zo'n randapparaat onontbeerlijk.

De laatste opdracht van dit eerste deel van het practicum was heel open:

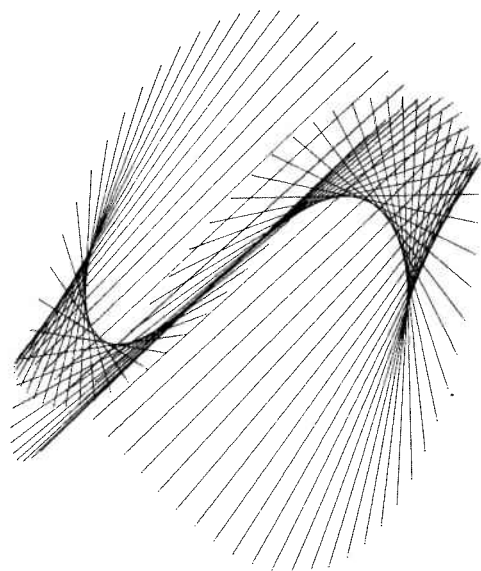
Als een lijnstuk met kleine stapjes een groot aantal keren gedraaid wordt, kunnen bijzondere figuren ontstaan.

13. *Maak een lijnstuk en laat dit draaien. Wat voor ruimtelijke figuur kun je zo maken? Onderzoek de mogelijkheden voor verschillende lijnstukken.*

Dat de opdracht open was, hebben we geweten. Zolang binnen AUTODRAAI maar om één as tegelijk gedraaid wordt, blijft het wel overzichtelijk: afhankelijk van het lijnstuk ontstaat één van de volgende plaatjes:



Maar natuurlijk gingen de leerlingen om meerdere assen tegelijk draaien, met verrassende resultaten, zoals:

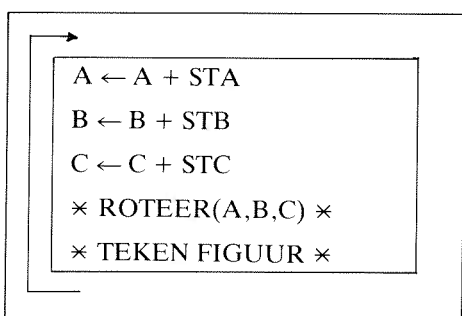


Eerst begrepen we dat niet zo goed, want een samenstelling van drie rotaties om de coördinaatassen is weer een rotatie, waarvan de as een lijn door de oorsprong is. Herhaald toepassen van dezelfde rotatie op een rechte lijn levert onherroepelijk een cilinder, kegel of eenbladige hyperboloïde op. Het venijn zit 'm in de programmaopbouw van AUTODRAAI, waarbij de figuur steeds vanuit de oorspronkelijke stand wordt gedraaid.

AUTODRAAI vraagt om voor elk van de drie draaiassen de stapgrootte voor de draaihoek op te geven (in 't programma STA, STB, STC).

Vooraf kan eventueel een geschikte uitgangspositie gekozen worden (in 't programma beginwaarden voor A, B en C).

Het herhaald intoetsen van het tekencommando $\boxed{\text{T}}$ bewerkstelligt daarna het volgende:



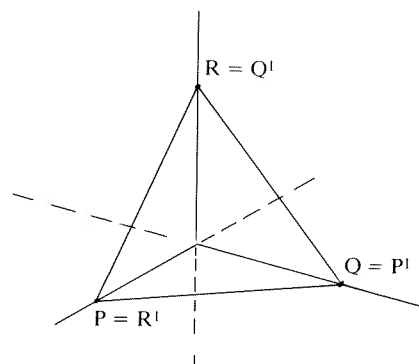
Hierbij is $\text{*ROTEER}(A,B,C)$ de rotatie samengesteld uit een draaiing over resp. de hoek C om de z-as, B om de y-as en A om de x-as.

Steeds als op $\boxed{\text{T}}$ gedrukt wordt, wordt de figuur opnieuw geroteerd vanuit de oorspronkelijke stand. Het gevolg is, dat de nieuwe rotatie in 't algemeen een andere draaias heeft dan de vorige.

Neem bijvoorbeeld eens $STA=0^\circ$, $STB=STC=90^\circ$ (we nemen de uitgangspositie $A = B = C = 0^\circ$).

Wat is dan het effect van de commando's $\boxed{\text{T}}$ resp. $\boxed{\text{T}}$ $\boxed{\text{T}}$ op de driehoek met hoekpunten P (1,0,0), Q (0,1,0) en R (0,0,1)?

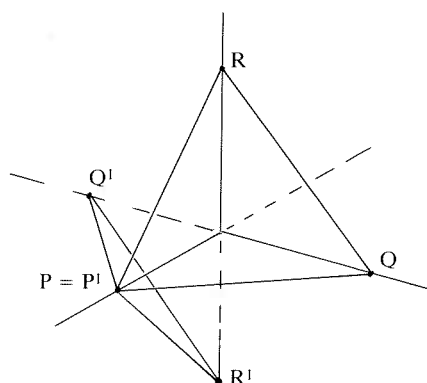
$\boxed{\text{T}}$:



Driehoek PQR gaat in zichzelf over.

$\text{*ROTEER}(0,90,90)$ komt dus neer op een rotatie om de lijn door 0 en (1,1,1) om een hoek van 120° .

$\boxed{\text{T}}$ $\boxed{\text{T}}$:



Driehoek PQR wordt gespiegeld in de x-as.

$\text{*ROTEER}(0,180,180)$ komt dus neer op een rotatie om de x-as over 180° .

De fraaie figuren die AUTODRAAI opleverde, waren het resultaat van wiebelende draaiassen.

Conclusie

Terugkijkend op deze lessen vallen er een aantal opmerkingen te maken:

- Het idee om zo achter de computer met ruimtelijke figuren bezig te zijn lijkt waardevol. Het half mentaal - half experimenterend op de computer draaien en tekenen van figuren stimuleert het ruimtelijk inzicht. Eén van de leerlingen (Ariana) zegt hiervan: *voor mij werkte het 'ruimtelijk zien' heel verhelderend, ik begreep de stof daardoor beter dan voorheen.*
- Vermoedelijk kan al in een veel eerder stadium (lees: een lagere klas) voor leerlingen met zo'n programma gewerkt worden. De computer zal het werken met ruimtelijke modellen van kubussen e.d. echter nooit volledig kunnen vervangen. Zo'n computerprogramma is wel een zinvol vervolg op het werken met materiële hulpmiddelen.
- Wil een programma als dit tot zijn recht komen, dan moet het ondersteund worden door concrete opdrachten (bijv. in de vorm van werkbladen).

Alleen maar wat met een programma spelen is te vrijblijvend.

- Het uitproberen van een computerprogramma brengt heel andere problemen met zich mee dan het uitproberen van uitsluitend geschreven lesmateriaal. Doordat de ontwerper van een programma in het begin nogal eens brandjes moet blussen als er iets mis gaat met de computer, komt er in eerste instantie van rustig observeren niet zo veel terecht.

In een volgend artikel gaan we nader in op de delen 2 en 3 van het practicum, waarbij leerlingen inbreken in

programma's met het oog op algebraïsche voorstellingen van krommen en gebogen vlakken in de ruimte.

Literatuur

- [1] Lauwerier: H.A. *Meetkunde met de micro*, Nieuwe Wiskrant, 5e jrg nr. 1, sept 1985.
- [2] Kindt, M.: *Met recht gebogen*, Nieuwe Wiskrant, 5e jrg nr. 4, juli 1986.

Brede brugperiode?
Heterogene klassen? Mavo, havo of vwo?
Homogene lbo of mavo?
Of.....?

WISKUNDELIJN

PAST ALTIJD

Een nieuwe wiskundemethode
met ruime differentiatiemogelijkheden

Vraag meer informatie over
deze nieuwe heldere lijn voor
het wiskunde-onderwijs.
Telefoon 050-422344



Jacob Dijkstra
Groningen
Postbus 284
9700 AG Groningen

Levering via boekhandel en uitgever