Een logisch vervolg...

J. ter Pelle
SLO, Enschede

Samenvatting

Het ontwikkelen van een 'logische lijn' blijkt een weerbarstige materie. Freudenthal verweet de ontwerpers een aantal kansen gemist te hebben.
Gepoogd werd een logische revisie toe te passen door grote investeringen in tijd en moeite; docent inpraten, lessen geven, observeren, videoen, analyseren, materiaal bijstellen, opnieuw uitproberen. De verrijking blijkt uiterst bescheiden te zijn.

Kort Vooraf

In '85 verschenen in de Nieuwe Wiskrant twee artikelen over logica [1] [2]. In beide wordt de term 'logica' in een heel specifieke betekenis gebruikt. Niet als theorie van formele systemen maar als analyserende activiteit van de lerende, als denken over denken, reflectie dus.
De verbale uitingsvorm ervan kennen we als redeneren. De uitkomst ervan *kan* een abstractie, een conclusie, een weerlegging, een generalisatie, etc. *zijn*. Let wel: *kan zijn*. Als het zich voordoet is er sprake van bewustwording van (wiskundige) denkschema's. Maar al te vaak blijven de denkschema's impliciet en worden ze de leerling niet bewust (gemaakt). In het eerste artikel was het nog een volstrekt open vraag, of, en zo ja met welke middelen deze bewustmaking kon worden gerealiseerd of gestimuleerd. In het tweede artikel signaleert Freudenthal een aantal verkeken kansen (door ontwerpers van leerlingenmateriaal en leraren) om dit reflectieve denken te stimuleren. Een logisch vervolg zou nu zijn, om in dit artikel aan te geven waar wél kansen liggen (in leerlingenmateriaal en bij leraren) voor een logische 'verrijking'. De weerbarstigheid van de materie en daarmee de geringe inhoudelijke vooruitgang in het ontwikkelwerk dwingt echter tot de nodige bescheidenheid. Van het weinige dat wel gerealiseerd kan worden, wil ik in dit artikel verslag doen.

Logische verrijking

Steeds sterker heeft de mening post gevat, dat je voor een 'logische lijn' niet zozeer nieuw leerlingenmateriaal zou moeten ontwikkelen, maar het veeleer moet zoeken in een verdieping en verrijking van de bestaande spullen.
Grofweg kan dat op twee manieren:
1e Het aanpassen van leerlingenmateriaal (wijzigen van vraagstellingen, toevoegen van op redeneren en reflectie gerichte opdrachten, inlassen van 'terugblikpagina's', etc.).
2e Het aanpassen van de docentenhandleiding (suggesties voor nabesprekingen, voorbeelden van geslaagde interventies en verbale ondersteuning van het groepswerk, voorbeelden van adequate, reflectie uitlokkende vraagstellingen, etc.).

Hoe dit op enigerlei wijze concreet uitpakt, is een vraag die zich alleen, en dan nog exemplarisch, laat beantwoorden door de praktijk. Hiertoe werd een ervaren docent uit de ontwikkelgroep ingepraat op mijn logische bedoelingen. Met name had de docent de opdracht gekregen om goed op formuleringen en de juistheid van redeneringen te letten. Waar zich tijdens het groepswerk of de nabespreking mogelijkheden zouden voordoen om wat logische puntjes op de i te zetten, zou hij deze benutten. Bijvoorbeeld door op geschikte momenten door te vragen:

"Zeg het nog eens iets anders."
"Hoe heb je gedacht?"
"Leg het hem eens kort en duidelijk uit."
"Lees nog eens goed wat er precies staat."
"Goed nadenken. Zoals ... het zegt, is dat goed?"
"Kun je dat nog iets preciezer onder woorden brengen?"

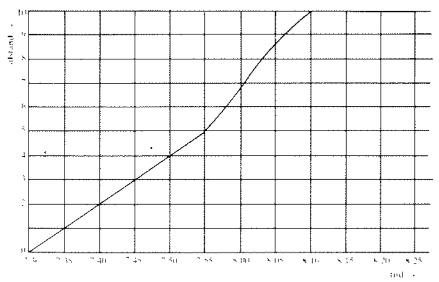
Door de serie lessen te observeren, te videoën en naderhand te analyseren, zouden zich inhoudelijke aanknopingspunten moeten aandienen voor een logische 'verrijking' van leerlingen- of docentenmateriaal. Dat dit inderdaad in bescheiden mate het geval blijkt te zijn willen we illustreren, door te laten zien hoe een werkblad en de bijbehorende passage uit de docentenhandleiding verandert onder invloed van een logische revisie. Als 'bewijsmateriaal' voeg ik relevante passages uit de videoprotocollen toe.

Logische revisie

Onderstaande versie van het werkblad Fietsen (3) (fig. 1) uit het pakketje *'Hoe langer hoe meer'* zal menig lezer uit vorige Wiskrantartikelen bekend zijn [3]. De bijbehorende passage uit de docentenhandleiding blijkt veel minder bekend (fig. 2). Enige voor het vervolg belangrijke zinsdelen zijn erin onderstreept.

Fietsen (3)

Hier zien jullie Yoeri's grafiek opnieuw.



Maken jullie de volgende vragen weer éérst alleen.

a. Sanne vertrekt gelijk met Yoeri uit Losser. Na 20 minuten ligt ze precies een kilometer achter op Yoeri. Ze komt 5 minuten later dan Yoeri op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Sanne onderweg *niet* steeds met dezelfde snelheid heeft gefietst?
Schets de grafiek van Sanne in hetzelfde rooster.
Iedereen klaar? Bespreken maar.

Samen verder.

b. Jullie hebben allemaal een grafiek van Sanne geschetst. Zijn die alle *precies* hetzelfde? *Moet* dat zo zijn? Wat *moet* bij alle grafieken hetzelfde zijn?

c. Robert gaat 5 minuten later dan Yoeri uit Losser weg en komt 5 minuten eerder op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Robert Yoeri heeft ingehaald?

d. Teken Robert's grafiek, ook in hetzelfde rooster, als je weet dat hij met een *constante snelheid* heeft gefietst. *Moet* Robert's grafiek bij jullie allemaal precies hetzelfde zijn? Waarom?

Als jullie het goed getekend hebben, dan 'ontmoeten' de grafieken van Yoeri en Robert elkaar
Meestal wordt dat zo gezegd: "*De grafieken* snijden *elkaar*".

e. Vul in:
Robert haalde Yoeri om ..... minuten voor 8 in. Ze waren op dat moment nog ongeveer .. kilometer van school verwijderd

figuur 1 – het werkblad

Fietsen 3 vraagt naar het tekenen van tijd-afstand-grafieken die aan een aantal eisen voldoen (Sanne ligt na 20 minuten precies een kilometer achter). Bovendien wordt hier het snijpunt van twee tijd-afstand-grafieken geïnterpreteerd, wat in deze context letterlijk ontmoeten betekent.

Vraag a
De bedoeling is deze individueel te laten beantwoorden.
De grafiek die getekend moet worden heeft een aantal vaste punten maar is verder niet eenduidig te bepalen.
De meeste kinderen zullen punten met rechte lijntjes verbinden. Dat kan, maar hoeft zeker niet.

Vraag b is dan ook bedoeld om verschillende antwoorden van groepsleden met elkaar te confronteren en de leerlingen zich te laten realiseren dat er verschillende mogelijkheden zijn, maar dat er wel een paar dingen hetzelfde moeten zijn.

Vraag c
In feite wordt hier gevraagd naar het beredeneren van iets triviaals. 'Later weg' en 'eerder aankomen' kan toch niets anders betekenen dan dat ze elkaar ergens ingehaald moeten hebben?
Toch levert dit interessante discussies op. Het verwoorden van zo'n redenering is zeker belangrijk.

Vraag d
Hier wordt de grafiek opgevoerd als een soort bewijsmateriaal voor vraag c.
Hier zie je zo dat Robert Yoeri ingehaald moet hebben.
Het snijpunt krijgt daardoor betekenis.
Ook is het belangrijk te realiseren dat een toevoeging als: "Je weet dat hij met constante snelheid gefietst heeft" hier nu wel een eenduidig bepaalde grafiek oplevert.

Vraag e
Het aflezen "binnen" een hokje is lastig; leerlingen zijn geneigd de eenheid (horizontaal 5 min; verticaal 1 km.) over het hoofd te zien.

figuur 2 – uit de docentenhandleiding

Bij vraag a
Elk van de leerlingen (Henri, Barry, Michel, Arno) heeft een grafiek van Sanne geschetst. Hoewel ze niet helemaal hetzelfde zijn, beschouwen ze deze opdracht als afgerond.
Het "hoe kun je zeker weten" hebben ze zich wel afgevraagd, maar het werkblad vraagt niet om een antwoord op te schrijven, dus staat men er niet echt bij stil. Voor de leraar een reden er in de nabespreking nog eens expliciet naar te vragen. Je merkt aan de antwoorden dat ze er nu pas serieus over gaan nadenken:
Barry: "Als ze even snel zouden fietsen, komen ze gelijk aan. Als ze niet even snel fietsen komt de een vroeger of later aan."
Logisch correct, maar het is geen antwoord op de vraag.
Arno: "Sanne heeft langzamer gefietst omdat ze vijf minuten later aankomt. Ze lag een kilometer achter."
Weer geen antwoord op de vraag.
Leraar: "Ik wil het nog wat duidelijker. Henri zeg jij het eens."
Henri: "In het begin ... eh ... Als ze in hetzelfde tempo door had gefietst was ze te laat gekomen. Om tien voor acht, op drie kilometer is ze harder gaan fietsen."

Correct, hij constateert dat het tweede stuk van de grafiek steiler is dan het eerste.
Michel: "Ze moest sneller fietsen op het eind, dus ... Als je de lijn helemaal doortrekt, als het steeds hetzelfde was, dan was ze pas om vijf voor half negen op school geweest."
Prima bewijs uit het ongerijmde. Volledig correct.
Barry en Arno gaan volmondig accoord, hoewel uit niets blijkt, dat ze beseffen dat hun aanvankelijke antwoord strikt genomen fout was.

Conclusie
Geringe wijziging in de redactie van de opdracht (wel volgorde schetsen en verwoorden omdraaien). Enige aanvulling in docentenhandleiding. (Zie fig. 3 en 4).

Bij vraag b
De vraag of de bij a geschetste grafieken alle precies hetzelfde moeten zijn, is er een die de oorspronkelijke situatie overstijgt [4]. Antwoorden en argumentaties kunnen niet meer ontleend worden aan ervaringen binnen de fietscontext zelf. Elk van de vier leerlingen is er aanvankelijk van overtuigd dat hun grafiek er precies zo uit ziet als die van de drie anderen.
Arno: "Ieder moet toch dezelfde grafiek hebben?"
Barry: "Ja, anders kloppen die gegevens niet!"
Henri: "Of d'r zou een drukfout in moeten zitten."
Door het aandringen van de leraar worden ze nu aan het twijfelen gebracht.
"Kijk nog eens goed", "Is het inderdaad zo dat het precies hetzelfde moet zijn?"
Hiermee suggereert de leraar duidelijk het tegendeel, en de leerlingen gaan dan ook prompt overstag:
Henri: "Je mag ook soms wat harder en dan weer zachter fietsen."
Michel: "D'r mogen nog best wat bochtjes inzitten."
Barry: "Dan is die zelfs nog preciezer."
Leraar: "Hoe bedoel je?"
Barry: "Nou, meer zoals het echt is."

Een mooi voorbeeld waaruit blijkt dat het doorvragen, het dieper op de materie ingaan, vruchten afwerpt.
Elk van de vier weet nu dat van de grafiek de punten A(7.30, 0), B(7.50, 3) en C(8.15, 10) vastliggen en dat elke stijgende lijn door deze punten in principe goed is.

Conclusie
Aanwijzingen in de docentenhandleiding opnemen, voor het geval dat leerlingen met dezelfde rechte grafiekjes komen. Op het werkblad extra vraagjes toevoegen, waardoor men hier iets langer bij stilstaat en niet als vanzelfsprekend ervaart. (Zie fig. 3 en 4).

Bij vraag c
Elk van de leerlingen tekent de punten (7.35, 0) en (8.05, 10) in of wijzen deze aan. Doordat deze punten aan weerszijden van de al getekende grafiek liggen is het inhalen evident. De grafieken moeten elkaar wel snijden. Het verwoorden gaat echter vrij context-afhankelijk en demonstratief.
Michel: "Die lijnen kruisen elkaar, Yoeri gaat zo (handgebaar schuin omhoog) *en Robert gaat zo* (handgebaar iets minder steil omhoog), *dus komen ze elkaar langs."*

Barry: "Yoeri gaat harder en Robert zachter, dus haalt hij hem wel in."
Leraar: "Hoe is dat te zien?"
Barry: "Die van Robert loopt wel steil, maar die van Yoeri nog steiler."

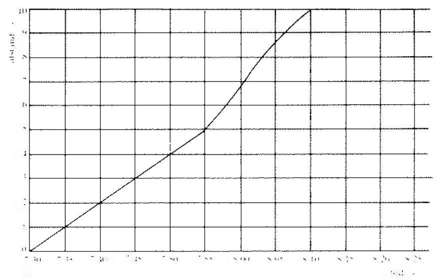
Conclusie
Geen aanknopingspunten voor verrijking. Iets minder situatie-afhankelijke formuleringen zijn misschien te bereiken door een 'kaal' plaatje van de situatie op het bord te tekenen.

Bij vraag d
De link met vraag b wordt door deze groep leerlingen niet spontaan gelegd. Ook de leerkracht verzuimt hier naar terug te verwijzen. Opnemen van een vraag in die richting in het leerlingenmateriaal is nodig. (Zie fig. 3 en 4).

Na een logische revisie van het werkblad en de bijbehorende passage uit de docentenhandleiding zien deze er als volgt uit:

Fietsen (3)

Hier zien jullie Yoeri's grafiek opnieuw.



Maken jullie de volgende vragen weer éérst alleen.

a. Sanne vertrekt gelijk met Yoeri uit Losser. Na 20 minuten ligt ze precies een kilometer achter op Yoeri. Ze komt 5 minuten later dan Yoeri op school aan.
Schets de grafiek van Sanne in hetzelfde rooster.
Hoe kun je zeker weten dat Sanne onderweg *niet* steeds met dezelfde snelheid heeft gefietst?
Schrijf dat eens op:

Iedereen klaar? Bespreken maar.
Samen verder.

b. Jullie hebben allemaal een grafiek van Sanne geschetst. Zijn die alle *precies* hetzelfde?
Moet dat zo zijn?
Wat *moet* bij alle grafieken hetzelfde zijn?
Wat mag verschillen?

c. Robert gaat 5 minuten later dan Yoeri uit Losser weg en komt 5 minuten eerder op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Robert Yoeri heeft ingehaald?

d. Teken Robert's grafiek, ook in hetzelfde rooster, als je weet dat hij met een *constante snelheid* heeft gefietst. *Moet* Robert's grafiek bij jullie allemaal precies hetzelfde zijn?
Schijf eens op waarom:

Waarom lag dat anders bij Sanne's grafiek in vraag b?

Als jullie het goed getekend hebben, dan 'ontmoeten' de grafieken van Yoeri en Robert elkaar. Meestal wordt dat zo gezegd: "*De grafieken* snijden *elkaar*".

e. Vul in:
Robert haalde Yoeri om ... minuten voor 8 in. Ze waren op dat moment nog ongeveer ... kilometer van school verwijderd.

figuur 3 – het werkblad, revisie

Fietsen 3 vraagt naar het tekenen van tijd-afstand-grafieken die aan een aantal eisen voldoen (Sanne ligt na 20 minuten precies een kilometer achter: vast punt (7.50, 3). Robert fietst met constante snelheid: grafiek een rechte lijn etc.) Bovendien wordt het snijpunt van twee tijd-afstand-grafieken geïnterpreteerd, wat in deze situatie letterlijk ontmoeten betekent.

Vraag a
De bedoeling is deze eerst individueel te laten beantwoorden.
De grafiek die getekend moet worden heeft drie vaste punten, maar is verder niet eenduidig bepaald.
Veel kinderen zullen de punten met rechte lijntjes verbinden. Dat kan, maar hoeft zeker niet.
De gegeven argumentatie blijkt vaak voor verscherping vatbaar. Goed is natuurlijk: "*Als je de lijn helemaal door zou trekken, als het tempo steeds hetzelfde was, dan zou ze pas rond half negen op school geweest zijn.*" Antwoorden waarin het verschil in steilheid tussen beide grafiekdelen naar voren komt zijn natuurlijk ook prima.
Vraag b
Wanneer leerlingen bij a verschillende antwoorden hebben gevonden en licht verschillende grafieken getekend, biedt deze vraag een prima gelegenheid om deze met elkaar te confronteren. Het geeft de leerlingen de kans *zich te realiseren* dat er verschillende goede mogelijkheden zijn voor een stijgende grafiek door (7.30, 0), (7.50, 3) en (8.15, 10). Mocht elke leerling in een groepje deze punten met rechte lijntjes hebben verbonden, dan zal men die groep er op attent moeten maken dat dit strikt logisch niet noodzakelijk is. Dit kan bijvoorbeeld door verschillende goede grafieken in een tekening op het bord of ohp te zetten.
Vraag c
In feite wordt hier gevraagd naar het verwoorden van iets evidents. 'Later weg' en 'eerder aankomen' kan toch niets anders betekenen dan dat ze elkaar ergens ingehaald hebben?
Toch levert dit interessante discussies op. Het verwoorden van de redenering is zeker belangrijk. Een kaal plaatje van de situatie op bord of ohp kan veel verduidelijken en helpen de redenering minder situatieafhankelijk te formuleren.
Vraag d
Hier wordt de grafiek opgevoerd als een soort bewijsmateriaal voor vraag c.
Je 'ziet nu zo' dat Robert Yoeri ingehaald moet hebben.
Het snijpunt krijgt daardoor betekenis.
Ook is het belangrijk leerlingen de kans te geven zich te realiseren dat de toevoeging "met constante snelheid" nu wel een eenduidig bepaalde grafiek oplevert. Het laatste vraagje bij d helpt daarbij.
Vraag e
Het aflezen 'binnen' een hokje is lastig; leerlingen zijn geneigd de eenheden (horizontaal 5 min; verticaal 1 km.) over het hoofd te zien.

figuur 4 – uit de docentenhandleiding, revisie

Kort achteraf

De voorgestelde wijzigingen in het leerlingenwerkblad zijn marginaal. Ook de veranderingen in de docentenhandleiding zijn inhoudelijk niet echt groot te noemen. De logische revisie blijkt een uiterst bescheiden logische verrijking te zijn. Zeker wanneer je ze afmeet aan de grote investeringen in tijd en moeite (docent inpraten, lessen geven, observeren, videoën, achteraf analyseren, materiaal bijstellen, opnieuw uitproberen). Op zich mag dat geen bezwaar zijn. Als ontwikkelaar doe je al het mogelijke om je materialen te verbeteren.
Een cruciale factor waarop maar weinig rechtstreekse invloed mogelijk is in dit verband is het 'docentengedrag'. Het op het juiste moment met de goede vraag inspringen in een groepsdiscussie of nabespreking is daar een aspect van. Het maakt deel uit van de attitude van de leraar. Freudenthal stelt dan ook terecht [5]: "Ik vind dat de attitude van de vragen "Waarom denk ik dat?", "Waarom denk jij dat", "Waarom denkt hij dat?" van begin af aangekweekt moet worden en dan is de lera(a)r(es) de meest aangewezen persoon die de eerste prikkel moet geven en door moet blijven prikkelen tot het een vanzelfsprekende gewoonte is." Het zoeken naar een logisch vervolg voor toekomstig ontwikkelwerk in dat perspectief, belooft dan wellicht ook meer, dan het nieuw ontwikkelen of bijschaven van lesmateriaal.

Literatuur

[1] Barneveld, G. van en J. ter Pelle: *Aan het begin van een 'logische lijn'*, in Nieuwe Wiskrant, 4e jaargang nr. 2, februari 1985, p. 10 e.v.
[2] Freudenthal, H.: *Logica*, in Nieuwe Wiskrant, 5e jaargang nr. 1, september 1985, p. 3 e.v.
[3] Zie Krabbendam, H. en J. Speelpenning: *Grafieken, verbanden en functies* (1), in Nieuwe Wiskrant, 4e jaargang nr. 3, mei 1985, p. 27 of in het in noot 2 genoemde artikel p. 6.
[4] Zie: Dolmans, F. e.a.: *Situatiebeschijvingen in wiskundeteksten*, SLO, 1984 met name p. 88.
[5] Het in noot 2 genoemde artikel p. 4.