Met recht gebogen

M. Kindt
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

*Een gebogen vlak voortgebracht door een bewegende rechte wordt regelvlak genoemd.
Op school beperkt men de aandacht voor regelvlakken meestal tot de allereenvoudigste typen; cilinder en kegel. Met de invoering van de onderwerpen 'ruimtemeetkunde' (wiskunde B) en 'functies van twee variabelen' (wiskunde A) kunnen meer tot de verbeelding sprekende typen als de hyperbolische paraboloïde (zadel) en de eenbladige hyperboloïde (koeltoren) hun intrede in het klaslokaal doen. Deze beide klassieke regelvlakken worden in dit artikel vanuit verschillende gezichtspunten bekeken.*

Een meetkundige plaats

Uit de oude stereo-doos komt de volgende opgave:

Gegeven twee kruisende lijnen l en m; gevraagd de meetkundige plaats van de middens van alle verbindingslijnstukken van l en m.

Of meer dynamisch geformuleerd:
Het punt P doorloopt de lijn l en het punt Q de lijn m; gevraagd naar de figuur die door het midden M van PQ wordt beschreven.

Een goede strategie bij de oplossing is: houd P vast en laat Q wandelen langs de lijn m. Het midden M van PQ beweegt zich dan ook langs een rechte, een kwestie van meetkundig vermenigvuldigen.

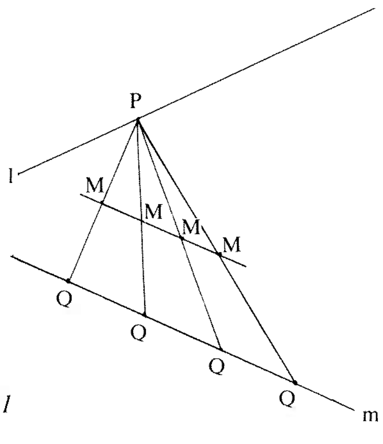

fig. 1

Laat nu P variëren en de lijn van middens (zeg: p) schuift door de ruimte.

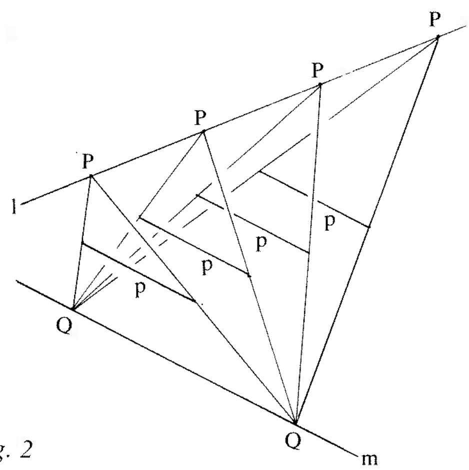

fig. 2

Dat de lijn p daarbij in één vlak blijft kan worden ingezien door nu het punt Q te bevriezen, hetgeen een lijn q oplevert (zie fig. 3). De lijnen p snijden bij verplaatsing door de ruimte steeds de lijn q en liggen derhalve in één vlak.

In de stereometrie van vroeger werd er van leerlingen nog verlangd om aan te tonen dat elk punt van het gevonden vlak de gevraagde eigenschap heeft. In de constructieve en aanschouwelijke aanpak die hierboven gedemonstreerd is, lijkt dat overbodig: natuurlijk vult de schuivende lijn het vlak geheel op.

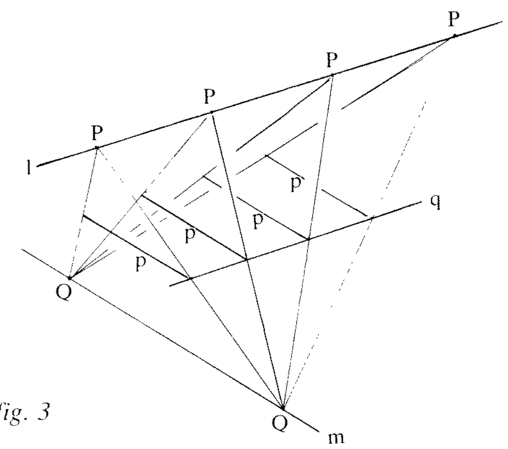

fig. 3

De stereometrie ging, de vectormeetkunde kwam. De laatste levert een wel zeer krachtige methode om bovenstaand vraagstuk op te lossen.
Stel namelijk l: $x = a + \lambda b$ en m: $x = c + \mu d$, waarbij b en d onafhankelijke vectoren zijn.
De verzameling middens van verbindingslijnstukken volgt direct uit:

$$x = \tfrac{1}{2}(a + \lambda b) + \tfrac{1}{2}(c + \mu d)$$

ofwel $$x = (\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c) + \lambda(\tfrac{1}{2}b) + \mu(\tfrac{1}{2}d)$$

hetgeen de vectorvoorstelling is van een vlak parallel met l en m. In één klap is de meetkundige plaats gevonden compleet met waterdicht bewijs. Het 'nodig en voldoende' is slechts een kwestie van dubbele implicatiepijlen.

Jaren geleden, tijdens een experiment met de toen gloednieuwe vectormeetkunde, legde ik het bovenstaande vraagstuk geheel in vectorstijl voor aan mijn klas 4 HBS [1]. Het was op een repetitie en tot mijn grote voldoening kwam vrijwel elke leerling er vlot uit. Bij de behandeling van het proefwerk wilde ik de leerlingen tonen hoe moeizaam de ouderwetse aanpak van dit vraagstuk verliep in vergelijking tot de aanpak met vectoren. Mijn verhaal, ongeveer als hierboven en vergezeld met wat uit de hand getekende prentjes op het bord, pakte averechts uit. De leerlingen verklaarden bijna unaniem dat zij de meetkundige aanpak veel helderder vonden: 'je ziet tenminste wat er gebeurt' en 'met vectoren reken je maar wat en het komt er wel uit, maar waarom, dat weet je eigenlijk niet', dat was de teneur van de reacties.

Kortom zij legden genadeloos de vinger op de zere plek van structuralistisch wiskunde-onderwijs en de daarbij passende meetkunde op basis van lineaire algebra. Nu, zeventien jaar later, lijkt het er op of de meetkunde op school weer meetkunde wordt.

Het spannen van een zadelvlak

Teruggekeerd naar de punten halverwege twee kruisende lijnen. Als aan P en Q de beperking wordt opgelegd dat de verhouding van de gerichte lijnstukken AP en CQ constant is (A en C zijn gekozen punten op respectievelijk l en m), dan is de verzameling middens een rechte lijn. Met wat vectoralgebra vogel je dat zo uit, maar ik probeer het maar weer langs inzichtelijke weg. Daarbij kies ik twee equidistante puntenrijen op l en m, waarin opgenomen A en C. (Equidistant dat wil zeggen dat de stap van een punt naar een van zijn twee buren steeds dezelfde lengte heeft). De bijbehorende lijnen p en q vormen een rooster van parallellogrammen en de middens van PQ liggen op een roosterdiagonaal.

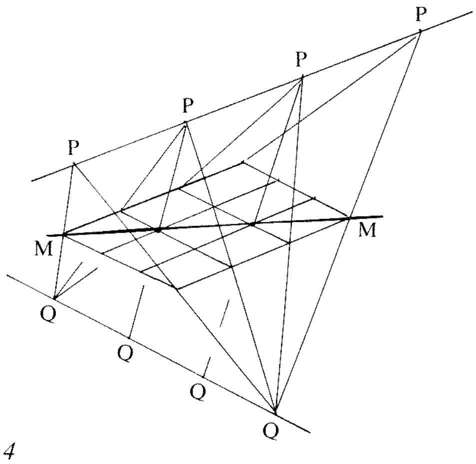

fig. 4

De middens van de lijnstukken PM liggen ook weer op een rechte lijn, evenzo die van QM. Zo kun je steeds weer nieuwe lijnen-van-middens maken en wordt er een gebogen vlak geweven. In de klas kan dat concreet worden gemaakt met vier latjes, wat spijkers en een rolletje touw. Van die latjes moet eerst een scheluw raamwerk worden gemaakt. Scheluw betekent 'uit het vlak'; in een artikel in Pythagoras, jaargang 25 schrijft Popke Bakker over de scheluwlijsten als kunstobjecten [2]. Bij een behandeling van kruisende lijnen is het belangrijk dat leerlingen tastbaar met een begrip als 'scheluw vierhoek' kennismaken [3].
Het weefwerk kan snel in een kubus worden getekend met als lijst de scheluw vierhoek ABGF. Merk op dat als de kubus een kwartslag wordt gedraaid de buiging beter zichtbaar wordt.

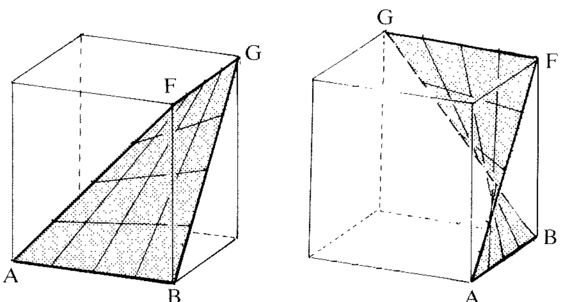

fig. 5

Het zadelkarakter tekent zich nu af.
In *Lessen in Ruimtemeetkunde 1* [4] wordt de snijfiguur van dit zadelvlak met een diagonaalvlak in drie orthogonale projecties geconstrueerd en de snijkromme lijkt verdacht veel op een parabool. Aan de lezer de uitdaging om die kromme op zijn paraboolkarakter te onderzoeken (zie fig. 6).

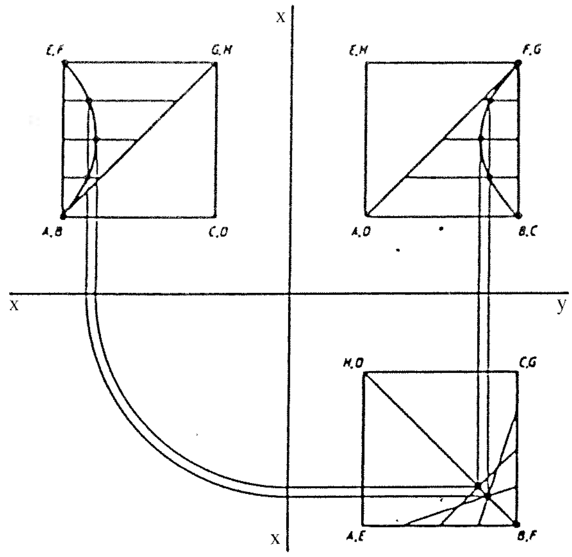

fig. 6

Terzijde: de top van de parabool is juist het zadelpunt. De projecties verraden ook onmiddellijk dat de middens van de verbindingslijnen van AF en BG, parallel met het grondvlak, op een rechte lijn liggen.

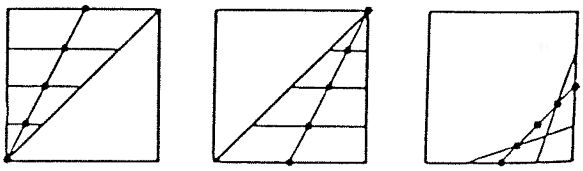

fig. 7

Een aardige vraag als toegift: hoe snijden de zadelvlakken op de lijsten ABGF en BCFE elkaar?

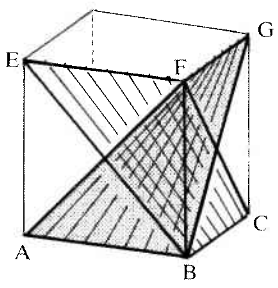

fig. 8

Een functie van twee variabelen

Zoals iedereen weet is wiskunde A toepassingsgericht en worden er voorbeelden ontleend aan o.a. de economie. Een typisch geval van een economische functie van twee variabelen is een zogenaamde nutsfunctie. Het eenvoudigste type heeft de wiskundige vorm: f(x,y) = x,y (waarbij x en y positief zijn).
Hoe kan een grafische voorstelling van die functie worden opgebouwd? Wel, neem x constant en laat y variëren; er ontstaat een rechte lijn parallel met het Oyz-vlak.

Vervolgens laten we x lopen; naarmate de lijn zich verder van de oorsprong verwijdert, wordt zij steiler.

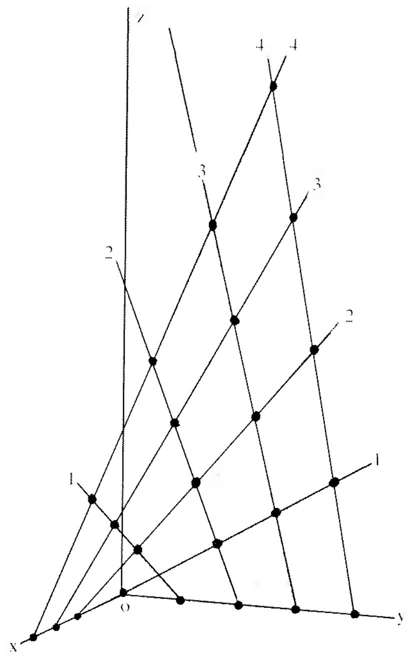

fig. 9

Iets dergelijks kan gezegd worden van de lijnen parallel met het Oxz-vlak die tot de grafiek behoren. Het zal de lezer duidelijk zijn dat er een zelfde soort weefsel ontstaat als in de vorige paragraaf, een vanwege de beperkingen x > 0 en y > 0 incompleet zadelvlak.

Een andere manier om zicht te krijgen op het verloop van de functie wordt geleverd door het hoogtekaartje.

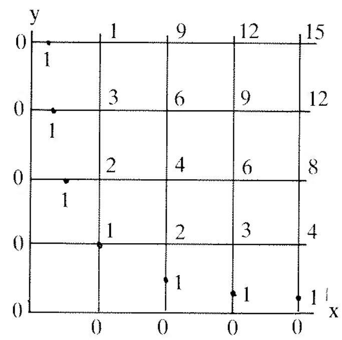

fig. 10a

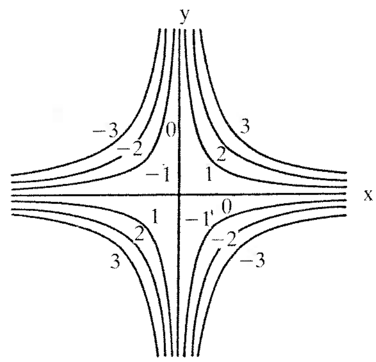

fig. 10b

De hoogtegetallen bij de roosterpunten zijn juist de uitkomsten van de tafels van vermenigvuldiging. Een wat in de economie indifferentiecurve wordt genoemd en in de wiskunde niveaukromme of isolijn, verbindt alle punten met dezelfde hoogte. Zo snijdt de hoogtelijn 1 de lijn x = 2 halverwege 0 en 2, de lijn x = 3 op een derde tussen 0 en 3, enz. Er ontstaat nu de hyperbooltak xy = 1. Breiden we het domein van de functie uit tot het gehele vlak, dan komt er een fraai hoogtekaartje (zie fig. 10b).

In het hoogtekaartje is het zadelpunt in de oorsprong duidelijk zichtbaar. Nog een manier om dit zadelpunt te zien. Snijd de grafiek met de vlakken x = y en x = −y en de snijkromme is respectievelijk een dal- en bergparabool.

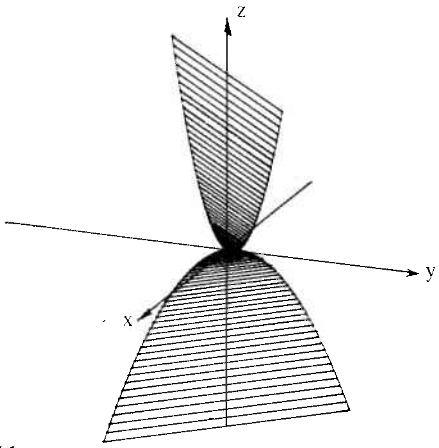

fig. 11

Dat een zadelvlak met tweede-graadsvergelijking (hier dus z = xy) hyperbolische paraboloïde wordt genoemd zal geen bevreemding wekken.

Opmerking: Wees voorzichtig met het berekenen van hellingen. De helling van de hierboven getekende dalparabool in het punt (x,x,x^2) is niet 2x, zoals de argeloze differentieerder zou denken, maar $\sqrt{2}\,x$!

Een omwentelingslichaam

Op het programma van wiskunde B prijkt het onderwerp omwentelingslichamen. Bij de analyse zijn de leerlingen al gewend inhouden van pottenbakkersvormen te berekenen via het eenvoudige 'integraal-pi-y-kwadraat-dee-iks', maar het is natuurlijk niet onaardig om zo'n omwentelingslichaam (of omwentelingsvlak?) aan een meetkundig onderzoek te onderwerpen.
Een voor de hand liggende vraag is bijvoorbeeld welke vormen er voortgebracht worden door een rechte lijn l die om de as k wentelt. De drie situaties l parallel k, l snijdt k en l kruist k leveren achtereenvolgens een cilinder, kegel en eenbladige hyperboloïde op. (Zie figuur 12).

Bij de cilinder is de *afstand* van l tot k verantwoordelijk voor de dikte van de buis. Bij de kegel is de *hoek* tussen l en k verantwoordelijk voor de vorm. Een hoek die naar 90° neigt levert een hoofddeksel op zoals dat wel in Zuidoost Azië wordt gedragen, terwijl een kleine hoek garant staat voor een spitse kegel.

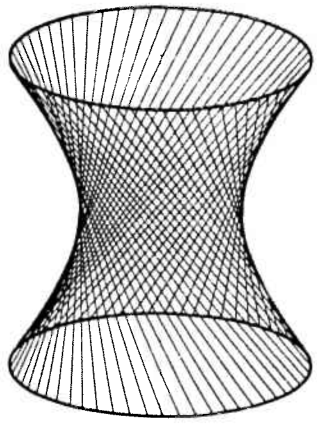

fig. 12 1-bladige hyperboloïde

De onderlinge ligging van twee kruisende lijnen l en k wordt bepaald door zowel *hoek* als *afstand*. Er zijn platte hyperboloïden en hyperboloïden die bijna cilinder zijn, afhankelijk van de hoek tussen l en k. De afstand van l tot k bepaalt de taille (= kleinste draaicirkel) van de hyperboloïde.

Als de leerling nog niets weet van de afstand van kruisende rechten, kan de hyperboloïde een goede aanleiding zijn tot dit begrip. De stralen van de draaicirkels gaan vanuit l loodrecht naar de as k en zijn kleinste verbindingen van de punten van l naar k. De kleinste der kleinsten, de straal van de taille, is het absolute minimum van de verbindingslijnstukken. Door k en l van rol te laten verwisselen kan worden ingezien dat dit lijnstuk ook loodrecht op l staat. (Als men de existentie van een gemeenschappelijke loodlijn niet als vanzelfsprekend wil accepteren, waar wat voor te zeggen is, zal nog even gepraat moeten worden over een constructie).

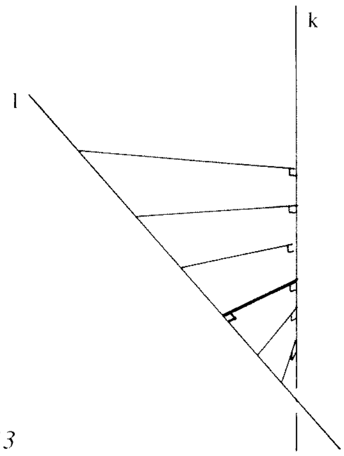

fig. 13

De hyperboloïde op de foto (een toren bij Kobe, Japan) toont duidelijk twee families rechte lijnen op het oppervlak. Twee leden van dezelfde familie kruisen elkaar, terwijl twee leden van verschillende families elkaar snijden of parallel zijn, net als bij het zadelvlak. (Zie fig. 14).

Deze eigenschappen heb ik vroeger weleens voorgeschoteld gekregen met behulp van veel algebra, maar ook hier geldt weer dat de meetkundige weg meer inzicht geeft.

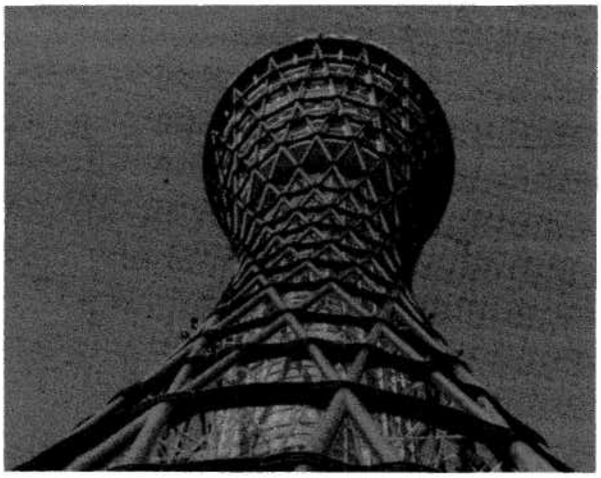

fig. 14

Neem twee kruisende lijnen l en k met kortste verbindingslijnstuk PQ. De lijn l wordt gedraaid om k. De hoek tussen l en k is verantwoordelijk voor de vorm van de aldus ontstane hyperboloïde. Nu is er door P nog een tweede lijn m die dezelfde hoek met k maakt en dus dezelfde hyperboloïde als het ware tegendraads doorloopt.
Dat de lijnen van één familie elkaar kruisen volgt gemakkelijk, maar dat m elk exemplaar van de l-familie snijdt (op één exemplaar na, waarmee m parallel is) is iets lastiger te bewijzen. Een beetje transformatiemeetkunde helpt.

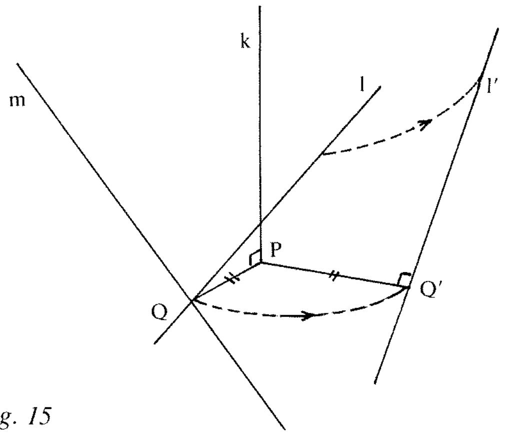

fig. 15

In bovenstaande figuur geldt:
- l is het spiegelbeeld van m bij de spiegeling S_α in het vlak α (door k en PQ).
- l' is het beeld van l bij een rotatie om de as k; die rotatie kan worden ontbonden in de spiegelingen S_α en S_β. (β is het vlak door k en de bissectrice van $<QPQ'$).
- Uit $l' = S_\beta S_\alpha(l)$ en $l = S_\alpha(m)$ volgt $l' = S_\beta(m)$ ofwel m en l' zijn elkaars spiegelbeeld in β; bijgevolg snijden l' en m elkaar (in β) of zijn l' en m parallel (als l' de 180° gedraaide l is).

De hyperboloïde die wordt beschreven door de voorvlaksdiagonalen van een kubus te wentelen om de verticale as door de middelpunten van grond- en bovenvlak, kan in orthogonale projectie vrij eenvoudig door de leerlingen worden getekend.

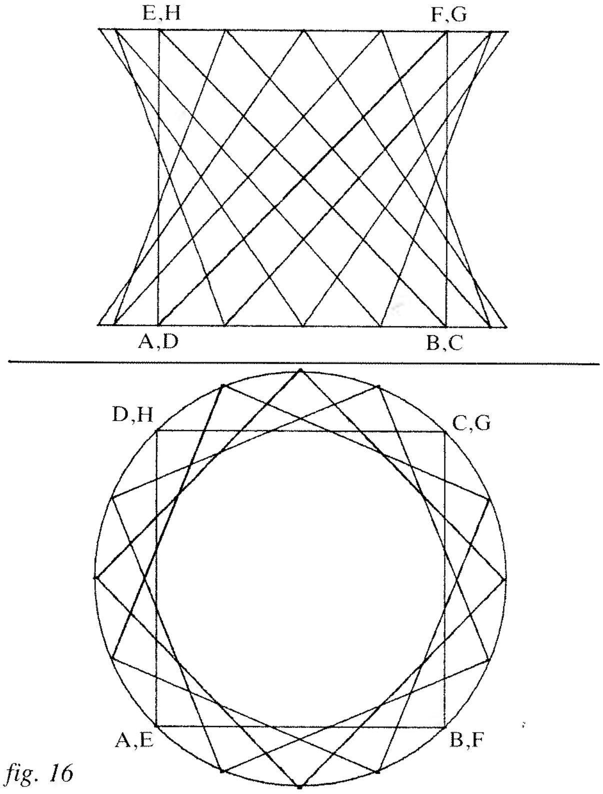

fig. 16

Wat minder eenvoudig wordt het als de lichaamsdiagonaal de spil wordt waar alles om draait. De hele kubus gewenteld geeft dan een fraaie kegelsandwich met hyperboloïde als beleg.

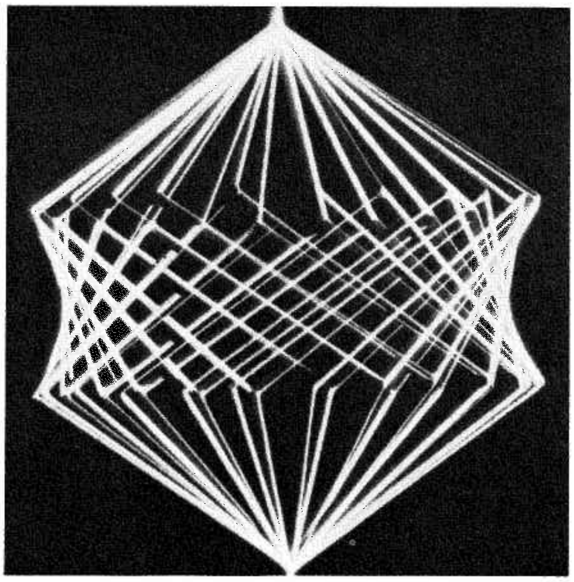

fig. 17

Slot

Duidelijk is wel dat er zonder theorie over tweedegraads-oppervlakken of bilineaire vormen al heel wat over de beide kwadratische regelvlakken te zeggen valt. Ja, op intuïtief niveau zouden deze aesthetische en interessante figuren, die de leerlingen zeer aanspreken, al in de onderbouw kunnen worden bekeken. De combinatie met handvaardigheid ligt dan voor de hand. Het zelf vervaardigen met draden of dunne staafjes van de regelvlakken verschaft niet alleen het nodige werkplezier, maar legt een goede basis voor het onderwijs in de ruimtemeetkunde in de bovenbouw. In dit verband verwijs ik graag naar een van de mooie projecten van Emma Castelnuovo [5].

Tenslotte nog de opmerking dat de microcomputer (zie ook [6] een zeer waardevol instrument is bij het uitbeelden van regelvlakken, maar daar over meer in een volgend artikel.

Literatuur

[1] Kindt, M., *Gewichtige Meetkunde,* Wiskrant 13-24.

[2] Bakker, P., *Dubbelverstek*, Pythagoras jaargang 25, no. 1.

[3] Kindt, M., *Dat is wat ik me van wiskunde 2 had voorgesteld*, Nieuwe Wiskrant, september 1982.

[4] Kindt, M. en J. de Lange, *Lessen in Ruimtemeetkunde 1,* Educaboek, Culemborg.

[5] Castelnuovo, E., *Documenti di un esposizione di matematica*, Boringhieri 1972.

[6] Lauwerier, H.A., *Meetkunde met de Micro*, Nieuwe Wiskrant september 1985.