Twee puzzels zijn elkaars tante

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Oei, meetkunde!

"Nogal geschokt hebben we ervan kennis genomen dat de opgaven 7 en 8 meetkundeproblemen zijn!"
Zo beginnen twee vaste inzenders hun bijdrage aan deze puzzelrubriek. Vervolgens lossen ze opgave 7 op en gebruiken daarbij vectorrekening.
Ook andere inzendingen gebruiken middelen uit de moderne wiskunde, zoals transformaties. Eigenlijk is er slechts één puur synthetisch meetkundige oplossing binnengekomen, andere inzendingen leunden zwaar op allerlei analytische middelen als coördinaten, vectoren en zelfs complexe getallen. Maar eerst, voor alle puzzelaars die 'oei meetkunde!' hebben gedacht, drie nieuwe opgaven van totaal ander karakter.

Elkaars tante zijn

Dit probleem is ontleend aan een Indisch verhaal. Er worden familie-relaties in een dorp in beschreven. Het verhaal eindigt met een raadsel: wat is de relatie van twee bepaalde vrouwen in het verhaal?
Het antwoord blijkt te zijn: die vrouwen zijn elkaars tante. Dat wil dus zeggen, dat A de tante van B is, maar ook dat B de tante van A is. Dus niet zoals twee boeken, die op elkaar liggen, terwijl slechts het ene boek van de twee op het andere ligt. Hier is dan:

Opgave 9:
Beschrijf familierelaties waarin twee vrouwen elkaars tante zijn.

Voor de zekerheid spreken we af wat met 'tante-van' bedoeld wordt. De relatie ouder-van nemen we als bekend aan.

Afspraak:
A tante-van B als A vrouw is en er X en Y bestaan zò, dat:
a) X ouder-van A
b) X ouder-van Y
c) Y ≠ A
d) Y ouder-van B.

Geheel analoog is oom-van te definiëren en als enige aanwijzing geef ik: 'Ismael is den oom-van Jacob' (Genesis hfst. 16 en 25).
Oplossingen graag met diagrammen i.p.v. beschrijvingen als: de zus van de moeder van de tweede zoon van de derde vrouw van X ...

Tot slot: alleen oplossingen die zich richten naar de normen van het burgerlijk wetboek, vooral inzake incest, komen door de censuur van de Nieuwe Wiskrant.

Schonere kwasten

In het voorjaar krijgt de buitenboel een nieuw kleurtje. Maar daar sta je dan met je kwast en vergeten nieuwe terpentijn te kopen. Nog slechts luttele cc's in de fles. Mijn ervaring is dat je dan toch het kleine beetje terpentijn in twee helften moet gebruiken.

Nu vraagstuk 10:
In de kwast blijft steeds 1 cm^3 mengsel van verf en terpentijn achter. Ga uit van 10 cm^3 terpentijn in de fles en 1 cm^3 verf in de kwast.
Hoe verdund kan het mengsel in de kwast toch nog worden, als de terpentijn in meerdere porties gebruikt mag worden?

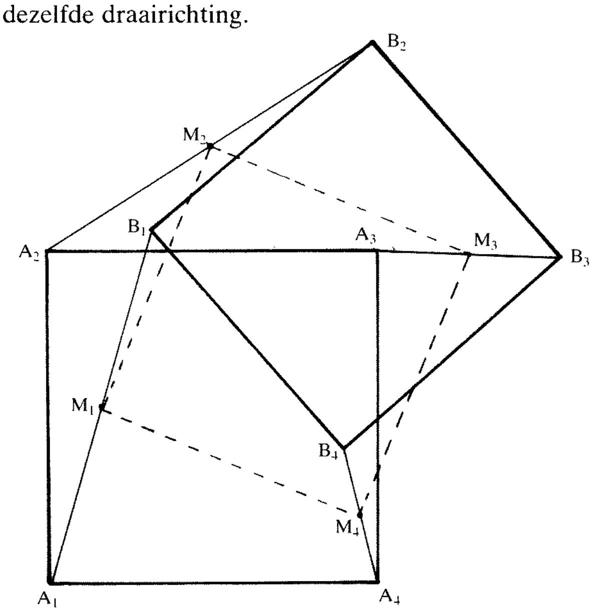
De hoogste onmogelijke toren

Een oefenprogramma op de BBC-computer voor optellen liet mij kiezen uit blokken ter hoogte van 1, 2, 3, ..., 8, 9. Ik koos 5, 7 en 9. Daarna gaf de computer een getal op, 41.
Met de gekozen blokken moet ik nu torens ter hoogte 41 maken. Bij aanraken van de toets '5' stapelt de computer (op zijn beeldscherm) een blok op de toren. Als ik denk klaar te zijn druk ik op <Return>.
Ik blijk het goed gedaan te hebben:
$5 + 9 + 5 + 5 + 7 + 5 + 5 = 41$.
Maar wat te doen als de computer mij het getal 13 voorschuift? Nooit kan ik 13 maken als som van vijven, zevens en negens: 13 is een onmogelijke toren voor 5, 7, 9.

Probleem 11:
Ga uit van twee bloksoorten met hoogtes a en b. Neem aan dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. Wat is de hoogste onmogelijke toren voor de blokken a en b?

Variaties met twee vierkanten

Vraagstuk 7 ging over de middens M_i van A_iB_i, $i = 1, \ldots 4$ waarbij $A_1A_2A_3A_4$ en $B_1B_2B_3B_4$ twee vierkanten in één vlak zijn, de punten genummerd in dezelfde draairichting.



figuur 1

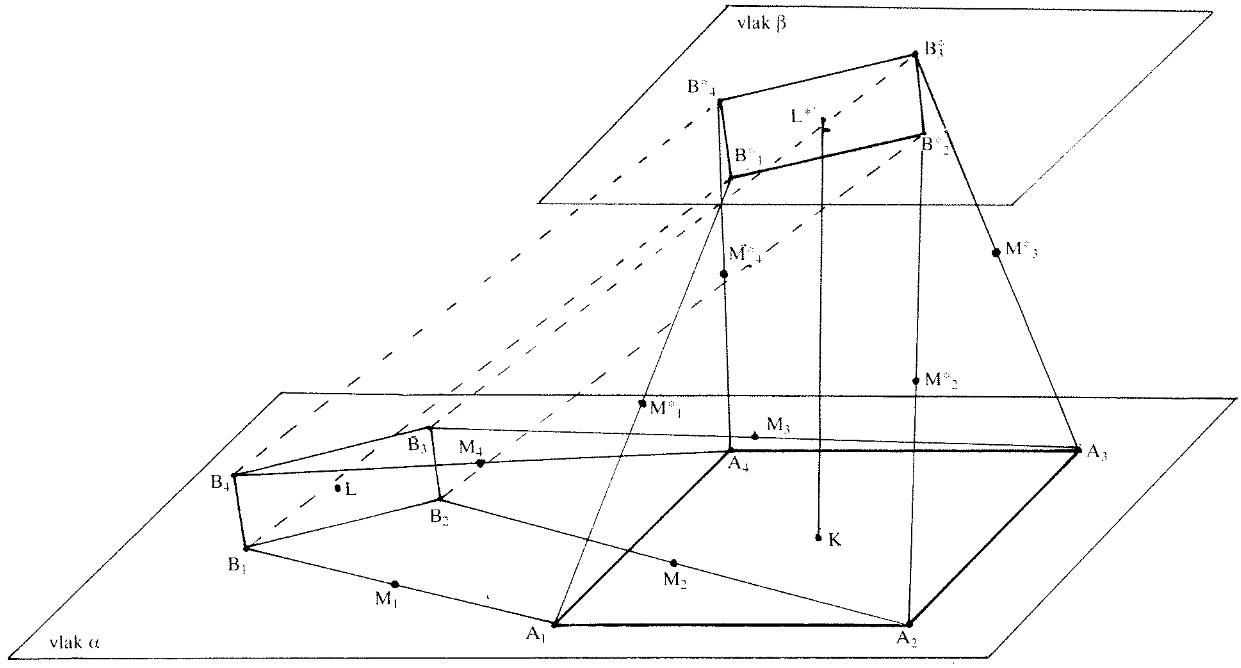
Goede antwoorden kwamen van:
Markus Nijmeijer en Mike Staring
G.A. Wouters
Agnes Verweij
Jan M. de Geus

Alle inzendingen stellen vast dat M_1, M_2, M_3, M_4 een vierkant vormen òf samenvallen. Dat laatste gebeurt als de A- en B-vierkanten even groot zijn en 180° t.o.v. elkaar gedraaid zijn.
Markus Nijmeijer en Mike Staring geven alle punten coördinaten en rekenen met verschilvectoren tussen de punten. Loodrechtheid van vectoren wordt vertaald in nulzijn van het inproduct. Al bij het kiezen van de coördinaten moet daar rekening mee gehouden worden.
Ze rekenen ook na wat er gebeurt als de uitgangsfiguren rechthoeken of ruiten zijn. In alle gevallen ontstaan parallellogrammen.
Als A en B gelijkvormige rechthoeken zijn, dan is de resultaatfiguur ook een rechthoek.
G.A. Wouters laat zien dat je van twee willekeurige, gelijkvormige, gelijkgeoriënteerde figuren kan uitgaan.
Het bewijs gebruikt een vast punt P (het snijpunt van de diagonalen) en ziet $\vec{PA_2}$ $\vec{PA_3}$ en $\vec{PA_4}$ als vergrootte of verkleinde verdraaiingen van de vector $\vec{PA_1}$. In de B-figuur moeten dezelfde vergrotingsfactoren en draaihoeken zijn te vinden, vanwege de gelijkvormigheid. Enig rekenwerk in de figuur der middens brengt weer dezelfde factoren en draaiingen aan het licht.
Dit bewijs is generaliseerbaar naar n-hoeken; het snijpunt der diagonalen is nl. niet zo'n essentiële keuze.
Jan M. de Geus geeft precies deze generalisatie, maar gebruikt een ogenschijnlijk geheel ander middel: de complexe getallen.
Uitgangspunt is dat een lineaire functie g van $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dus $g(z) = pz+q$, een figuur in het complexe vlak afbeeldt op een gelijkvormige, gelijkgeoriënteerde figuur.
Vergrotingsfactor is $|p|$, draaiingsfactor is het argument van p.
Omgekeerd is elke gelijkvormigheids afbeelding van $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ te schrijven als zo'n lineaire functie g, $g(z) = pz+q$.
Alles volgt nu uit het feit dat voor het midden M(z) van z en g(z) geldt:

$$M(z) = \frac{z+g(z)}{2} = \frac{p+1}{2}z + \frac{q}{2}$$

En M(z) is dus ook weer een lineaire functie van z. Klaar!
Alles wat lastig is in het vraagstuk is als het ware door de rijke structuur van het complexe vlak en het rekenen met complexe getallen hanteerbaar gemaakt.
Als P.S. is bij deze oplossing nog toegevoegd:
Als a de vergrotingsfactor van A- naar B-vierkant is, en de draaiing φ, dan heeft het tussenvierkant vergrotingsfactor $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a\cos\varphi + 1}$.

Een bewijs zonder rekentechnische hulpmiddelen komt van Agnes Verweij. Zij gebruikt een methode die telkens weer verrast: het interpreteren van een vlakke figuur als projectie van een ruimtelijk object.
De ruimtefiguur ontstaat – aanschouwelijk beschreven – door de 4 stukken A_iB_i, $i=1, \ldots, 4$, van elastiek te maken, het vierkant A in het vlak van figuur 1 te laten liggen, en door vierkant B op te tillen en met zijn midden precies boven het midden van A te plaatsen.



figuur 2 *Een deel van het meegezonden tekenwerk.*

Het optillen doen we met evenwijdig verschuiven en nu is onmiddellijk duidelijk dat de vlakke figuur een parallelprojectie van de ontstane ruimtelijke figuur is. De middens van de elastiekjes vormen een vierkant, in een vlak evenwijdig aan en precies tussen de twee vierkanten in de ruimte. De projectie van dit midden vierkant in de ruimte figuur is juist $M_1M_2M_3M_4$.

Deze inzendster bewijst ook nog het algemene geval, en komt na de al bij Jan de Geus gevonden formule voor de nieuwe vergrotingsfactor ook met een formule voor de draaiingshoek van de tussenfiguur.
Als ψ die hoek is en φ en a als boven zijn vastgelegd dan blijkt:

$$\cos\psi = \frac{1 + a\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + 2a\cos\varphi + 1}}$$

Als a=1 geldt (dus!) inderdaad $\psi = \frac{1}{2}\varphi$, maar in andere gevallen niet, al zouden we dat aanvankelijk misschien verwachten.

De tweelingdriehoeken

Ook vraagstuk 8 leidde tot gevarieerde oplossingsmethoden.
Zie figuur 3 ter referentie.

De loodlijnen uit, P, Q, R op BC, AB, CA gaan door één punt, T. Alle inzendingen bewijzen nu dat de loodlijnen uit A, B, C op QR, PQ, RP ook door één punt gaan. De twee driehoeken hebben dus een nauwe wederkerige relatie met elkaar: ze heten ortholoog. Het feit is voor het eerst gevonden door Steiner, in 1829.
Jan M. de Geus brengt een klassiek bewijs.

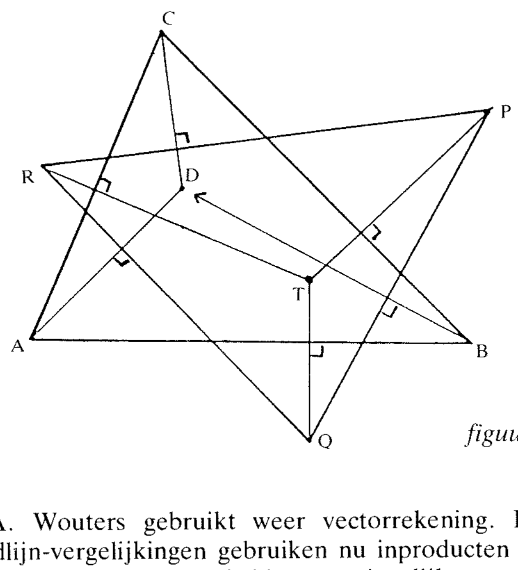
Loodrecht staan van AB op RT betekent:

$$AR^2 - BR^2 = AT^2 - BT^2.$$

Gemakkelijk volgt nu:
Als de loodlijnen uit P, Q, R op BC, AB, CA door één punt gaan, dan geldt:

$$CP^2 - PB^2 + BQ^2 - QA^2 + AR^2 - RC^2 = 0$$

Dus ook: $PB^2 - BQ^2 + QA^2 - AR^2 + RC^2 - CP^2 = 0$.
Ofwel: de loodlijnen uit B, A, C op PQ, QR, RP gaan ook door één punt.



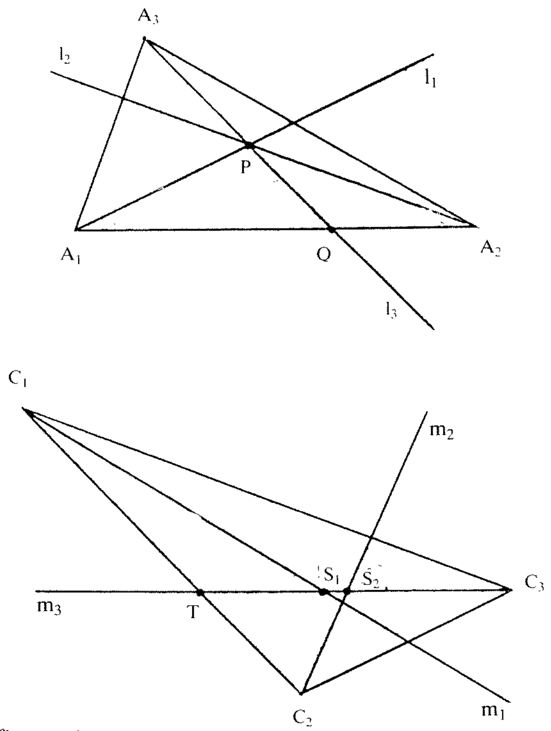
figuur 3

G.A. Wouters gebruikt weer vectorrekening. De loodlijn-vergelijkingen gebruiken nu inproducten en in sterk vertaalde vorm hebben we eigenlijk met een zelfde bewijs te doen.
Agnes Verweij komt ook hier met een geheel afwijkend bewijs.

Ze roteert driehoek PQR 90 graden.
De loodrechtheid gaat nu over in evenwijdigheid.
Nu moet bewezen worden:

de lijnen l_1, l_2, l_3 door A_1, A_2, A_3 die evenwijdig zijn met C_2C_3, C_3C_1, C_1C_2 gaan door één punt	$\Longleftrightarrow$	de lijnen m_1, m_2, m_3 door C_1, C_2, C_3 die evenwijdig zijn met A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 gaan door één punt

In de tekening van Agnes Verweij ziet het er zo uit:



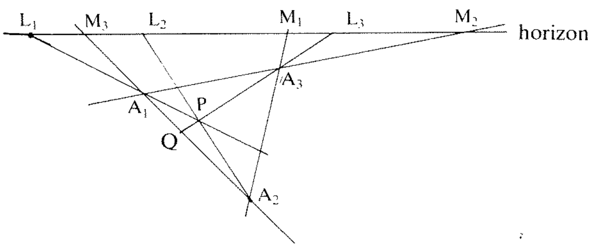
figuur 4

En bewezen moet worden dat $S_1 = S_2$.
Vanwege alle evenwijdigheden wemelt het van de gelijkvormige driehoeken. Uiteindelijk wordt daar $TS_1 = TS_2$ uit afgeleid.

Wat systematischer is het bewijzen van

$$\frac{A_1Q}{A_2Q} = \frac{C_2T}{C_1T}.$$

De stelling van Ceva doet dan de rest.
Zo is ineens duidelijk dat het vraagstuk door de draaiing vertaald is van de Euclidische naar de affiene meetkunde, waar geen hoekbegrip meer gebruikt wordt, alleen evenwijdigheid en verhoudingen op evenwijdige lijnen.
Vertalen we nog 'evenwijdigheid' naar 'gaan door één punt op de horizon' dan komen we in de projectieve meetkunde terecht.
De eerste helft van figuur 4 wordt nu:



figuur 5

De tweede helft is precies zo'n figuur, met dezelfde M_1, M_2, M_3, L_1, L_2, L_3 op de horizon, maar met rolverwisseling voor de L- en M-punten.
Nu gaat het bewijs via bijvoorbeeld dubbelverhoudingen. De lijnen in P gaan inderdaad door een punt als $(L_1L_2L_3M_3) = (M_1M_2M_3L_3)$. Projecteren via P en Q geeft dit resultaat. De symmetrie van die formule levert nu de rest.

Slot

Dat was het dan in grote lijnen. Een schokkende hoeveelheid mogelijkheden toch, die gewone meetkunde.
Oplossingen voor vraagstuk 9, 10 en 11 graag voor 15 augustus bij:

Aad Goddijn
Vakgroep OW & OC
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht.