Wetenschappelijke notaties op rekenmachines

F.J. van den Brink
OW & OC, R.U. Utrecht

Samenvatting

Verschillen in het functioneren van zakrekenmachines kunnen didactisch uitgebuit worden, met name op brugklasniveau. De verschillende manieren van wetenschappelijke notatie op deze machientjes kunnen nieuw licht werpen op oude rekenbegrippen.

In het wiskunde-onderwijs worden rekenmachines alleen gebruikt als hulpmiddelen waarop je snel even een sommetje kunt uitrekenen om zodoende niet de rode draad van het probleem kwijt te raken.
Toch is de rekenmachine *zelf* ook als wiskundig object te beschouwen: bijv. als *automaat* die volgens bepaalde regels werkt en die zijn eigenaardigheden heeft. Er bestaan bijv. grote verschillen tussen verschillende machines, ze kunnen ziekten vertonen en vele hebben zelf hun eigen manieren van rekenen en noteren (kommagetallen, wetenschappelijke notaties). Een bekend credo bij leerlingen is dat je van een rekenmachine geen rekenen kunt leren. Híj rekent immers al alles voor je uit. Maar wàt kun je dan wél van dat ding leren? Waarin is hij wel een *didactisch* hulpmiddel?
We kunnen wat leren van de *afwijkingen*: van de afwijkingen die een rekenmachine vertoont met het gewone rekenen en van de afwijkingen met andere machines.
Het gebruik van *verschillende* machines komt in het wiskunde-onderwijs sporadisch voor. Toch is het één van de meest fascinerende onderwijssituaties om op oude rekenbegrippen een nieuw licht te werpen, of om nieuwe begrippen vanuit de rekenmachines te introduceren.
Over het laatste gaat dit artikel: wetenschappelijke notaties op verschillende rekenmachines.

Aan kinderen in een vijfde en een zesde klas (en aan enkelen uit een vierde klas van een basisschool), vroeg ik: "50 miljoen plus 50 miljoen, hoeveel is dat?" "100 miljoen", klonk het in koor. "Dat kun je zó horen."
Ik schreef de som op het bord 50 000 000 + 50 000 000 = en vroeg de kinderen hem uit te rekenen op de verschillende rekenmachines, die ze van thuis hadden meegenomen.
Mohammed (klas 6) riep verrast " 't Is één!" $\boxed{\text{E}\quad 1.}$

Patrick (klas 5) vond in zijn venster ook zoiets: $\boxed{[\quad 1.}$.

Andere vondsten waren:

$\boxed{1.0000000}$ knipperend in het venster.

$\boxed{1.\quad \text{E8}}$

Soms was de volgorde anders:

$\boxed{\text{E8}\quad 1.}$ of $\boxed{1.\quad \text{E}}$

Soms alleen maar een E: $\boxed{\quad \text{E}}$

Sommigen in klas 5 en 6 vonden: $\boxed{\quad 100.}$

Ze hadden getracht 50 000 000 te noteren als 50.000.000 omdat ze dit gewoon zijn te doen met grote getallen.

"Maar was dit alles nu 100 miljoen?"
Ik noteerde het getal op bord 100 000 000.
Alleen *Ilse* (klas 5) had het precies zo op haar rekenmachine 100 000 000.

Maar die machine had dan ook een venster waarop 10 cijfers konden.
De anderen hadden een "getal" (of was het wel een getal?) dat afweek. Met of zonder E of met een ander teken, soms knipperend, soms met een extra 8 achter de E. Ik noteerde alle vondsten op bord.

Eén van de oorzaken dat de uitkomst van *één en dezelfde* opgave op verschillende rekenmachines kan *verschillen*, is het feit dat het antwoord te groot is voor het venster. (Daarnaast zijn er nog tenminste 2 andere oorzaken, die verschillende uitkomsten voor één en dezelfde som opleveren; zie "Op verschillen moet je rekenen", Van den Brink, J., De Wereld van het Jonge Kind, 1985).
De notatie waartoe rekenmachines op dit kritieke moment besluiten en die om duistere redenen "wetenschappelijke notatie" wordt genoemd, is immers niet dezelfde bij alle rekenmachines. Zelfs de betekenis verschilt per machine, want niet elke notatie met E is een wetenschappelijke. Kinderen hebben dit goed door.

Het scala van notaties voor 100 000 000 stond nu op bord en we spraken erover. Van de vele opmerkingen kozen we enkele belangrijke:

E 1.

"Die E moet wel 100 miljoen betekenen, want 50 000 000 plus 50 000 000 is 100 miljoen en dat was de som, toch?" (klas 6)

[1.0000000

"Dat haakje betekent dat er nog één nul achter moet. Maar die E8 betekent: 8 nullen". (Ingrid, klas 5)

1. E8

"Die E betekent: er moeten 8 cijfertjes achter de punt staan" (klas 4!)

E

"E betekent: 'Ik kan niet verder' "(klas 5)
"E is de E van Einde" (klas 4)

E kan officiëel Error betekenen: een *te groot* getal voor het machinevenster; de rekenmachine stopt met rekenen. "Het is de E van einde", zoals de kinderen van de vierde klas zeiden.
Maar E kan ook betekenen *Exponent* (van een macht van 10).
E 8 is toch de wetenschappelijke notatie voor 10^8 =

$$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{8 factoren}} = \underbrace{100\ 000\ 000}_{\text{8 nullen}}$$

De verklaringen van de kinderen dat E acht nullen betekent of 100 miljoen, stemt hiermee verrassend overeen.

In de klassen stelde ik vervolgens de kinderen voor dit probleem.

"Probeer deze som eens": 98765432 × 11 =
De antwoorden op de rekenmachines waren met die van de eerste som (50000000 × 2 =) te vergelijken:

E 1.	E10.86419
1.0000000	10.864197
1. E8	10.8641 E8
E 1.000000	E 10.86419
1. E8	1.08641 E9
100000000.	1086419752.

Er zijn blijkbaar cijfers uit het antwoord weggevallen op de meeste machines. Maar welke zijn dat? En hoe kun je ze terugvinden? Daarvoor moesten we met de kinderen onderzoek verrichten aan de rekenmachines.

Ofschoon je bijna kunt voorspellen wat je machine met 98765432 × 11 = doet als je weet hoe hij de uitkomst van 50000000 × 2 = uitvoert, zijn er toch bijzondere verschillen. T.o.v. 50000000 × 2 = manifesteert zich bij 98765432 × 11 = naast de Exponent van de macht van 10 (de 'wijzer' van het 'logaritme nemen' van weleer) een getal dat bijvoorbeeld de eerste zes cijfers van de uitkomst aangeeft (gelezen van links naar rechts: de vroegere 'mantisse').
Je kunt nu ook de verschillen tussen de machines onderling beter nagaan.
Er zijn, voor zover ik weet, 4 typen 'wetenschappelijke notaties': (98765432 × 11 =)
- E 10.86419 of 10.86419 E
  (de eerste 8 cijfers worden maximaal aangegeven, vaak minder; de E staat ervoor of erachter).
- 10.864197
  (E is vervallen en vervangen door bijvoorbeeld knipperen; de eerste 8 cijfers van het antwoord worden gegeven).
- 1.08641 E 9 of 10.8641 E 8 (achter E staat de exponent van de bedoelde macht van 10 die het aantal cijfers aangeeft dat rechts van de stip (bij positieve exponent) behoort te staan).
- E (alleen E van Error: de machine geeft geen uitkomsten groter dan 8 cijfers).

Bovendien bleken alle machines de eerste acht cijfers niet af te *ronden* maar af te *kappen*.

Voorbeeld:
98765432 × 11 = 1086419752 — afronden
10.864198
afkappen
10.864197

Het afkappen is een gunstige bijkomstigheid om misvattingen bij het vergelijken te voorkomen.

In klas 5 zat Ilse. Ze had een rekenmachine met 10 plaatsen op het venster. De machine gaf het antwoord met alle cijfers.

1086419752.

Ze was echter de enige in de klas met zo'n apparaat. En *Patrick* merkte terecht op:
"Als je zo'n rekenmachine als Ilse hebt, kan je alle cijfers zien, ja. Maar als je zo één als de onze hebt, hoe kan je dan weten dat aan het einde (van het antwoord) een 2 hoort?"

Even later komt hij met een oplossing voor dit probleem: hij wil 98765432 × 11 splitsen in 987654 × 11 en 32 × 11.
"Ik heb gewoon de eerste 6 (cijfers: 987654): gedaan" (hij vond 987654 × 11 = 10864194, en voerde daarna 32 × 11 = 352 uit).
"En ik heb ze (352) er gewoon achter gezet". Hij noteerde het zo:

9 8 7 6 5 4 | 3 2 x 11 =

1 0 8 6 4 1 9 4 (3 5 2

Jeroen en Ilse vonden ook zo'n methode.
"Elk cijfer van 98765432 moet je met 11 vermenigvuldigen" en daarna plakten ze de uitkomsten achter elkaar.

9 8 7 6 5 4 3 2 x 11 =

99 88 77 66 55 44 33 22

Ofschoon deze uitkomsten fout zijn, gaf de noodzaak om het getal 98765432 *in gedeelten* te vermenigvuldigen, een nieuwe kijk op het vermenigvuldig-algoritme en werd de kennis van positiewaarden opgefrist.
De ontbrekende cijfers konden snel 'met de hand' worden gevonden door de vermenigvuldiging slechts voor een gedeelte te maken tot er cijfers ontstonden die de rekenmachine al gaf:

```
98765432
      11  ×
---------
 ...5432
 ...4320  +
---------
 ...9752          [10.864197]
```

Dit was een openbaring voor veel 5e en 6e klassers.
Dagen later zijn we van de andere kant (van het gewone vermenigvuldigen) uitgegaan door eerst de som uit te rekenen en daarna te vragen welke cijfers de verschillende rekenmachines zouden tonen en waarom ze dat doen.

```
  98765432
        11  ×
----------
  98765432
 987654320
----------
1086419752
```

A ;0 [86419752]

B ; [08641875] 2

C [10864197] 52

"Wat zie je in het venster: A, B of C?"

Een eerste oriëntering voor de lagere school rond wetenschappelijke notaties met positieve exponenten betreft het *vergelijken* van deze notaties met de *'gewone notatie'* van getallen.

Voorbeelden:

Welke cijfers ontbreken?

44433322 × 44 = E 1955661

90000009 × 6 =

12345678 × 20 = 2.4691356 E

{ 11111 × 11111 =
{ 111111 × 111111 =

{ 97865432 × 2 =
{ 97865432 × 4 =

Getalproblemen, notaties op abacussen, of andere machines met een groter venster hebben hierbij een functie.

Door in *getallenpatronen* (1111 × 1111 = ,11111 × 11111 = , enz.) een regelmaat te vinden in de uitkomsten kun je de machineuitkomsten vergelijken met de gewone notatie.
Door *meerdere abacussen* te nemen is de grootte van de gewone notatie onbeperkt en goed te vergelijken met de machineuitkomsten (reeds in klas 2, werd het aantal seconden in acht jaar uitgerekend op een machine en 2 abacussen.
(Zie: "De man van 1 miljard", Nieuwe Wiskrant 1982, 2, 2, p. 35-41).
Laat de leerlingen vooral *zelf* opgaven bedenken waarvan de uitkomst te groot is en ze vergelijken met die van hun buren.
Dergelijke opgaven geven vaak aanleiding tot werkbladen:

98765432 × 2 = 197530864
Patrick vindt op zijn rekenmachine:

[[1.9753086]

Sabine vindt:

[1.97530 E8]

Hoe zal:
98765432 × 11 = 1086419752
op de machines eruit zien?
bij Patrick ______________
bij Sabine ______________

SOMMEN	GEWOON REKENEN	REKENMACHINE

Mohammed rekent uit:

```
   98765432
         44
   -------- x
  395061728
 3950617280
 ---------- +
 4345679008
```

Welke cijfers komen op het venster van de rekenmachine?
Waar komt de punt?

43[4.5679008]

[3.45679008]

[43.456790]

[4.345679]

MAAK GROTE SOMMEN! OP DE ACHTERKANT.

SOMMEN	GEWOON REKENEN	REKENMACHINE

Daniëlle op de rekenmachine:

98765432 × 2 = — 1.9753086 E

Ze schrijft:
de 4 ontbreekt

```
  98765432
         2
  -------- x
 197530864
 1.9753086
```

GA NA WELKE CIJFERS ONTBREKEN:

44433322 × 44 = — 19.550661 E

53281974 × 113 = — 60.208630 E

90000009 × 6 =

De wetenschappelijke notatie is een notatie in machten van 10.
Voorbeelden zijn:

$$100000000 = 10^8$$

$$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$\sqrt{1000000} = 10^{\frac{6}{2}}$$

Zijn deze notaties in positieve, negatieve en gebroken exponenten ook te vinden op uw rekenmachine?
Allereerst blijkt, dat op rekenmachines niet altijd met een wetenschappelijke notatie *gewerkt* kan worden. Men kan de notatie niet verder beïnvloeden.
Bij andere machines is het mogelijk om *vanuit* het gebied van de *gewone notatie* een wetenschappelijke notatie te veranderen.
Bij weer andere (met een soort machtentoets) kunnen getallen in wetenschappelijke notaties door getallen in *wetenschappelijke notaties* worden bewerkt.

Na wat vrij werk op de machines vraag ik de kinderen vermenigvuldigingen te maken met grote getallen: "met getallen met veel nullen".
Darja ((9.3), klas 4) maakte 2000 × 2 000 000 op een Casio. Ze vond $\boxed{4.09}$
Darja: "Dat snap ik niet":
Kikkie (11.0), klas 5 doet 2000 × 2000 = $\boxed{4\ 000\ 000.}$ op een Sanyo en verklaart: "Die nullen doet hij bij elkaar, dat zijn er dus 6 en verder 2 × 2 = 4."
Als ze echter de opgave van Darja maakt (2000 × 2000000 =) vindt ze op haar machine: $\boxed{40.000\ 000}$ en leest dit als: "40 miljoen", zoals gebruikelijk in haar klas. Maar hier is het fout.
Een beperkend venster kan blijkbaar notaties geven die niet te verklaren zijn ($\boxed{4.09}$) of die fouten opleveren bij het uitlezen (2000 × 2 000 000 = 4.000.000.000 ≠ 40.000 000).
Ik nam daarom twee machines, elk met een machttoets en die in venstergrootte verschillen (een Casio fx 82 en een Radio Shack TRS-80) en ik vroeg de uitkomst van 10 000 × 10 000 =
Darja vindt $\boxed{1.08}$ op de Casio en Kikkie $\boxed{100\ 000\ 000.}$ op de TRS.
Nu kunnen ze de notatie wél verklaren:

Kikkie: "Deze (Casio) rekent het wel uit, maar zet een 8 in plaats van 8 nullen" en Darja vervolgt met:

Darja: "Want hier (het venster van haar Casio) kunnen geen 8 *nullen* op.
Hier (op de TRS) kunnen wel 8 *nummertjes*."

Ik spoor ze aan nòg grotere getallen te maken.

Darja: "Een 1 met 9 nullen!", maar dan zegt ze verschrikt: "Nee, dat kan er niet op (op het venster van de Casio)." Ze stelt voor:

$$1\underbrace{0000000}_{7} \times 1\underbrace{0000000}_{7} =$$

De uitkomsten (Casio: $\boxed{1.\ 14}$; TRS: $\boxed{1.\ E\ 14}$) worden als volgt verklaard door de kinderen:
"Een 1 met 14 nullen, want je doet 7 plus 7."
Tot nu toe konden we vanuit de gewone notaties een wetenschappelijke maken en begrijpen. Maar is een

gegeven wetenschappelijke notatie ook vanuit de gewone notaties te bewerken?
Ik vraag wat de uitkomst zou zijn als we de getallen $\boxed{1.\ 14}$ en $\boxed{1.\ E\ 14}$ met 10 zouden vermenigvuldigen. Helaas zonder te voorspellen hebben de kinderen de bewerking al uitgevoerd op de machines:

1. 14 × 10 = $\boxed{1.\ 15}$
1. E14 × 10 = $\boxed{1.\ E\ 15}$

En ze gaan direct zelfstandig verder:

1. 15 × 100 = $\boxed{1.\ 17}$. Ze kunnen de uitkomst ook controleren:
Darja: "Dat klopt, want dan tel je gewoon die twee nullen erbij op. Bij de 15 nullen."
Vermenigvuldigen van gehele getallen met veelvouden van tien komt dus overeen met het aloude toevoegen van een aantal nullen (i.c. verhogen van de exponent).
Zonder de stap 1. 17 $\xrightarrow{?}$ 1.18 te doen, vraag ik pardoes naar de inverse bewerking.
"Zou je van die 17 nullen ook weer 15 nullen kunnen maken?"
Darja vraagt nog: "Wat moeten we dan doen?" maar Kik weet het al: "Dan moet je 'min' doen" en ze proberen van 1. 17 allerlei getallen af te trekken:

1. 17 − 100 = 1. 17. "Toch weer 1. 17!", roept Darja.
1. 17 − 10 = 1. 17
1. 17 − 1000000 = 1. 17 (onder het motto: "Dan maar een groot getal").
1. 17 − 15 = 1. 17 ("Naar de 15 toe").

Niets helpt.

Ik laat dit zien op de machine:

1. 17 $\xrightarrow{\times 10}$ 1. 18 $\xrightarrow{\div 10}$ 1. 17
en vraag weer om van 1. 17 1. 15 te maken in de verwachting dat de kinderen 1. 17 zullen delen door 100.
Kikkie vindt echter 1. E 17/20 = $\boxed{5.\ E\ 15}$
"Je moet delen door 20, want 17 gedeeld door 10 geeft 16. Dus 17 gedeeld door 20 geeft 15. Kijk maar." (Ze wijst naar het venster $\boxed{5.\ E\ 15}$).
Dan komt ze met een verrassing:
"Ik probeer hem terug te zetten." Ze wilde vanuit 5. E 15 weer naar 1. E 17 terug, bijvoorbeeld op deze manier 5. E 15 × 20 = 1. E 17. Maar Kik vond 5. E 17 i.p.v. 1. E 17.
Ze voerde de bewerking × 20 in 2 stappen uit:

5 E 15 $\xrightarrow{\times 10=}$ 5. E 16 $\xrightarrow{\times 10=}$ 5. E 17.

De wetenschappelijke notaties geven een verband aan tussen enerzijds het vermenigvuldigen of delen (met machten van 10 groter dan 1) en anderzijds het vermeerderen of verminderen van het aantal nullen (optellen of aftrekken van exponenten). Deze relatie kan verwarrend zijn.
Een stapsgewijze aanpak is nodig om (indien men dat wil) de bekende regel "Vermenigvuldigen met 10 komt overeen met één nul toevoegen" uit te breiden middels de wetenschappelijke notaties.
Er is echter een nog 'lagere' activiteit waarbij de wetenschappelijke notatie van nut is. Kenmerkend is n.l. dat kinderen enorme getallen willen intoetsen op de machines. De wetenschappelijke notaties kunnen hierbij het aantal keren weergeven dat een cijfertoets t.b.v. het grote getal (groter dan 1) is ingedrukt.

Darja (klas 4) heeft uitgevonden dat er 23 drietjes op het lange venster van de TRS passen:

$\boxed{33333333333333333333333\_}$

Ik stel voor op de Enter-toets te drukken:

$\boxed{3.333333333E\ 23}$

Darja: "Kijk, 23 nummertjes" (ze wijst naar E 23).
Ik: "Maak eens een 1 met 23 nullen."
Darja voert dit uit. De 1 is echter van het scherm verdwenen:

$\boxed{00000000000000000000000\_}$

en als we op de Enter-toets drukken:

$\boxed{\qquad\qquad\qquad 1.\ E\ 25}$

Ik: "Je hebt een 1 met 25 nullen gemaakt, niet met 23 nullen."
Nu is het hek van de dam. Ze drukt neuriënd allerlei grote getallen in:
1. E 48 ,
1. E 78
Paul (klas 5 , (10,8)) zegt: "Ik denk niet dat ie over de 100 komt."
Darja drukt heel vaak op de nultoets: "Mijn vingers worden lam."
Uitkomst is echter 1. E 78
Paul: "Ik geloof dat ie ook niet over de 78 heenkomt." En hij telt heel precies een 1 met 79 nullen af.
De Entertoets geeft $\boxed{1.\ E\ 78}$
Paul: "Zie je wel, hij kan niet hoger dan 78 want ik heb 79 (nullen) gedaan."
Darja: "Dan is ie vol."
Met spaties ($\boxed{SPC}$ -toets) op de plaats van nullen kon het aantal nullen ook weer worden verminderd.

De betekenis die wetenschappelijke notaties kunnen hebben, is divers;
De notatie geeft bijvoorbeeld aan:
- het aantal keren dat je een cijfertoets indrukt (minus 1);
- het aantal nullen in een tienvoud waarmee je een geheel getal vermenigvuldigt;
- het aantal cijfers in een getal (minus 1);
- de exponent van een nabije macht van 10.

En wellicht zijn er meer betekenissen, die tenslotte alle wel iets met elkaar te maken hebben.

Opvallend is echter dat zelfs een zo eenvoudige betekenis als het aantal keren intoetsen van cijfers aanleiding kan geven om de rekenmachine nader op de wetenschappelijke notaties te onderzoeken.
Ook voor de betekenis "exponent van de macht 10" geldt dit.

We nodigen u daarom uit de volgende opdrachten op uw eigen machine te onderzoeken om hun mogelijkheden t.a.v. wetenschappelijke notatie wat beter te leren kennen:

- Zorg dat u de wetenschappelijke notatie voor 100000000000 (= 10^{11}) krijgt. Kunt u deze notatie ook op een andere wijze bereiken?
- Probeer de *kleinste* macht van tien met positieve exponent te vinden (meestal 10^8) vanuit 10^{11}.

  (Vb $\underbrace{10^{11} \div 10}$ $\underbrace{10^{10} \div 10}$ $\underbrace{10^{9} \div 10}$ 10^8)

- Probeer $\frac{1}{100000000} = 10^{-8}$ te vinden.

  (Het kan vaak op verschillende manieren:

  $\frac{\frac{1}{2}}{50000000} =$, herhaald delen door 10 ,
  of via een machtentoets).

- Wat is de *grootste* macht van tien met *negatieve* exponenten op uw machine?

  (De Casio fx80 noteerde reeds 1 ÷ 1000 = als $\boxed{1.\ \text{E-3}}$)

- Kunt u ook een notatie met E-01 vinden?
  (op een machine vond ik bij toeval log 3.1622777 = 5.000000055 E-01).
- De Casio fx80 noteert getallen in wetenschappelijke notatie in het gebied: kleiner of gelijk aan:

  $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ (1. E-3)

  of:
  groter of gelijk aan 100000000 = 10^8 (1. E 8)

  Hoe zit dat met uw machine?

?		?	
wet. notatie	↑ gewone notatie	↑	wet. notatie

- Welke is de grootste macht en wat is de kleinste macht die op uw machine bereikt kan worden?

  (Bij de Sharp PC 1211 is dat resp.: 1. E99 en 1. E-99;
  1. E99 × 10 levert een foutmelding op en
  1. E-99/10 geeft 0).

- Onderzoek op uw machine:

1.E 10 + 1	= 1.E 10
1.E 10 + 12	= 1.E 10
1.E 10 + 123	= 1.E 10
1.E 10 + 1234	=
1.E 10 + 123456	= 1.0000 1 E 10
1.E 10 − 1	=
enz.	

- Indien u een machtentoets ($\boxed{y^x}$, $\boxed{10^x}$ of $\boxed{\text{Exp}}$) bezit, onderzoek dan eens:

E 3 × E 2	= 100000
E 5 × E 6	= 1. E 11
E 3 + 2	= 1002
E (3 + 2)	= foutmelding
E 2/E3	= 0,1
E 20/E10	= 1. E 10
E 10/E100	= 1. E 10
E 10/E 99	= 1. E-89
E 20/2	= 5. E 19
E 0.5	= 100000
E 0	= 1