

Wiskunde in de onderbouw

Een notitie van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde

N. Blom/M. Bos/F. Meester/H.B. Verhage

Vrouwen en Wiskunde

Samenvatting

Met dit artikel levert de werkgroep Vrouwen en Wiskunde een bijdrage aan de discussie over de noodzakelijk geachte herziening van het onderbouwprogramma.

Inleiding

Op de zevende landelijke dag van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde (28 september 1985) is gediscussieerd over de vraag:

Welke onderwerpen vind je noodzakelijk in de eerste drie jaar van het voortgezet onderwijs?

Ga er vanuit dat wiskunde verplicht is en je geen rekening hoeft te houden met examens en/of vervolgopleidingen.

Om echt inhoudelijk over de onderbouw na te kunnen denken, heeft het zijn waarde om even los te komen van vervolgopleidingen. Daarna is het natuurlijk zinvol en noodzakelijk om naar de gewenste kennis voor de vervolgopleidingen te kijken. Dat hebben wij ook gedaan, waarbij aangetekend moet worden dat het ons door onze achtergronden aan kennis over het MBO ontbreekt.

De discussie was bijzonder vruchtbaar en reikte heel wat verder dan de opsomming van een aantal onderwerpen. Het leek de moeite waard de vele dingen die gezegd zijn niet verloren te laten gaan maar op schrift te zetten. Nora Blom, Milja Bos, Francis Meester en Heleen Verhage hebben dit op zich genomen en het resultaat is deze notitie. Het geheel is in drie paragrafen ingedeeld, waarvan de titels voor zichzelf spreken: *Uitgangspunten*, *Didactische opmerkingen* en *Onderwerpen*.

Het zal duidelijk zijn dat we niet pretenderen volledig te zijn, dat zou niet kunnen gezien de tijd die aan de discussie is besteed. Niettemin hopen we met deze

notitie een aantal opmerkingen gebundeld te hebben die de moeite van het lezen waard zijn.

Uitgangspunten

Bij het bepalen van de inhoud van een schoolvak zullen bepaalde criteria gehanteerd moeten worden waaraan die inhoud getoetst kan worden. In het verleden is hiervoor 'de wiskunde als wetenschap' als maat genomen, volgens de huidige inzichten bepaald geen vanzelfsprekend criterium.

Wij hebben geprobeerd een aantal criteria te formuleren voor een onderbouwprogramma van drie jaar met als uitgangspunt dat het leren van wiskunde enerzijds een *nuttigheidsaspect* heeft en anderzijds ook een zekere *vormende waarde* heeft.

We zijn gekomen tot het volgende lijstje:

- *Toepassen in het dagelijks leven:*
De wiskunde die je op school leert moet nuttig zijn in het dagelijks leven. Als elementaire kennis in de praktijk niet functioneert, heeft het wiskunde-onderwijs gefaald.
- *Aansluiten bij andere vakken:*
Wiskunde wordt vaak gebruikt bij andere schoolvakken. In het wiskundeprogramma moet daar rekening mee gehouden worden, bijvoorbeeld door bij wiskunde ook toepassingen uit andere vakken te maken.

- *Vorbereiden op bovenbouw en vervolgonderwijs:*
Sommige leerlingen stromen door naar de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, anderen gaan naar het middelbaar beroepsonderwijs. Het onderbouw programma zal voor al deze leerlingen adequaat moeten zijn.
- *Eindonderwijs:*
Voor sommige leerlingen zal het onderbouwprogramma wiskunde tevens eindonderwijs zijn. Zij dienen niet opgezadeld te worden met allerlei zaken waar ze voor hun latere leven niets aan hebben.

De bovenstaande criteria hebben vooral betrekking op het nuttigheidsaspect van wiskunde. Zoals gezegd vinden we dat het leren van wiskunde ook een bepaalde vormende waarde heeft. We denken hierbij aan:

- *Abstract leren denken:*
Onderdelen van het wiskundeprogramma die niet direct aanwijsbaar nuttig zijn, worden vaak gelegitimeerd met dat ze goed zijn voor het 'abstract leren denken'. Wij vinden dat dit criterium met de nodige voorzichtigheid gehanteerd moet worden, maar willen het hier toch wel noemen.
- *Algemene kennis en ontwikkeling:*
Sommige stukjes wiskunde maken deel uit van het algemene cultuurgoed van de samenleving en zijn alleen al daarom de moeite waard. Het bepalen van welke stukjes wiskunde hiertoe behoren, is natuurlijk een subjectieve zaak (de stelling van Pythagoras? de Romeinse cijfers?).
- *Het ontwikkelen van een wiskundige houding:*
We denken hierbij aan aspecten als reflecteren, zichzelf problemen stellen, denken binnen en buiten de context, vertrouwen op je eigen verstand.

Tenslotte kunnen enkele praktische criteria genoemd worden:

- *Individuele verschillen:*
Het programma dient recht te doen aan de verschillen tussen leerlingen. Hoe dit moet gebeuren, hangt mede af van de mate waarin met heterogene groepen gewerkt wordt. Over de wenselijkheid van een gemeenschappelijke onderbouw voor alle leerlingen van 12 tot 15 jaar hebben we verder niet gediscussieerd. Impliciet hebben we gesproken als of we een heterogene klas voor ons zouden hebben.
- *Haalbaarheid:*
Een programma moet haalbaar zijn, zowel voor leerlingen als voor docenten. De haalbaarheid betreft niet alleen de omvang, maar ook de inhoud van het programma. Er moet gekeken worden wat de werkelijke interesse is van de leerlingen en welke contexten zowel docenten als leerlingen aanspreken.

In het bovenstaande is een aantal criteria opgesomd

waar een nieuw leerplan voor de onderbouw aan getoetst zou kunnen worden.

Aan elke concrete invulling van een schoolvak liggen bepaalde opvattingen over leren en onderwijzen ten grondslag. We willen daar geen algemene beschouwingen over geven, maar wel hebben we in de volgende paragraaf een aantal tamelijk concrete didactische aanwijzingen genoteerd.

Didactische opmerkingen

Tijdens het praten en denken over het leerplan voor de onderbouw zijn ook allerlei didactische opmerkingen gemaakt. Wij hebben deze didactische aanwijzingen genoteerd omdat mede daardoor een anders georiënteerd leerplan kan ontstaan, een leerplan dat voldoet aan de criteria zoals in de vorige paragraaf vermeld.

In de beschrijving van het leerplan, in de uitwerking in de leerlingteksten en in de manier van onderwijzen zal een andere wiskundevisie naar voren moeten komen: *wiskunde voor allen*.

1. De probleemstelling in een *context* kan leerlingen nieuwsgierig maken.
Daarbij dienen we te beseffen dat:
 - De context die aansluit bij je ervaringen, het leren vergemakkelijkt.

1 Ellen, Marcel en Fieke geven hun zakgeld volledig uit aan sigaretten, bier, strips en make-up artikelen. Ellen besteedt 30% van haar zakgeld aan sigaretten, 20% aan make-up artikelen en 40% aan strips. Door Marcel worden (uiteraard) geen make-up artikelen gekocht en door Fieke bovendien geen sigaretten. Beiden gebruiken 10% van hun zakgeld om een pilsje te pakken. Als ferveu stripezer geeft Marcel 80% uit voor stripverhalen. Stel een 3×4 en een 4×3 matrix op die deze situatie weergeeft.

Figuur 1:

Niet elke poging om 'aan te sluiten bij de belevingswereld van de leerling' kan even geslaagd genoemd worden...

- Je een achterstand hebt wanneer je de context niet kent, het inleven in de gepresenteerde context kost dan immers veel meer moeite. (Zie voor een voorbeeld figuur 2.)
- Je een dubbele achterstand hebt wanneer de context je een psychologische weerstand geeft (zonder enige moeite noemden wij alle vier een context die ons tegenstaat: turbo motoren; vissen; voetbaltoto; files en remwegen). Soms kan die weerstand ook veroorzaakt worden door normen en waarden (bijv. godsdienst) of door ervaringen of omstandigheden in de privésfeer (die dikwijls geheim zijn). Contexten die om deze reden gevoelig kunnen liggen zijn bijv.: ziekte, statistieken van hartinfarcten, abortus, pilgebruik.

negatief! wat is dat?

- 9 Hiernaast staat een ranglijst van de eredivisie betaald voetbal. Sommigen kunnen aan de namen van de clubs zien uit welk jaar deze stand is! Bovenaan kun je zien wat al die getalletjes betekenen.

Het aantal punten van Ajax is als volgt berekend:

$$13 \text{ keer gewonnen: } 13 \times 2 \text{ p.} = 26 \text{ p.}$$

$$2 \text{ keer gelijkspel: } 2 \times 1 \text{ p.} = 2 \text{ p.}$$

$$\text{totaal} \quad 28 \text{ p.}$$

De clubs staan in volgorde van het behaalde puntentotaal; bij een gelijk aantal punten wordt er naar het doelsaldo gekeken (32-12 is beter dan 31-15). Kijk eens of dat overal klopt!

Op de l.v. werd aandacht besteed aan de wedstrijd Feyenoord-Twente (uitslag 1-1). De commentator had het daarbij over het positief doelsaldo van Feyenoord en het negatief doelsaldo van Twente.

- a Wat bedoelde hij daarmee?

- b Noem vijf clubs met een negatief doelsaldo.

- c Het volgende weekinde waren de uitslagen als volgt:

GA Eagles-Ajax	1-2
NEC-MVV	2-2
Roda JC-Vitesse	4-1
PSV-Sparta	3-0
NAC-AZ '67	1-3
Excelsior-Feyenoord	0-0
Twente-PEC Zwolle	0-0
Den Haag-Willem II	2-1
Haarlem-Utrecht	1-1

Maak de nieuwe stand van de eredivisie.

Club	aantal wedstrijden	gewonnen	gelijkspel	verloren	aantal punten	doelpunten voor	doelpunten tegen
Ajax	17	13	2	2	28	45	18
Feyenoord	16	4	7	5	23	32	12
AZ '67	16	10	3	3	23	31	15
PSV	17	8	5	4	21	34	21
Utrecht	17	7	6	4	20	25	19
GA Eagles	16	7	6	3	18	24	20
Roda JC	17	8	2	7	18	25	24
Excelsior	17	7	4	6	17	22	25
Twente	17	7	4	6	17	21	21
PEC Zwolle	16	5	4	7	14	18	21
Willem II	17	5	5	7	15	18	22
MVV	17	4	7	6	15	19	24
Vitesse	17	3	9	5	12	19	24
Haarlem	17	3	6	8	12	20	32
Sparta	17	3	6	8	12	19	32
NEC	16	4	7	5	11	21	27
NAC	16	4	2	10	10	15	27
NAC	15	3	2	9	8	8	23

hekserij?

- 17 We gaan op bezoek bij een heks die in een grote ketel een vreemd drankje klaarmaakt. Ze heeft wonderlijke blokkjes om de temperatuur in die ketel te regelen.

Ze gebruikt warme blokkjes die niet afkoelen en koude blokkjes die niet smelten.

Als er evenveel warme als koude blokkjes in de ketel zitten, is de temperatuur in de ketel 0°. Gooit ze er nu bijvoorbeeld 8 warme blokkjes bij, dan zal de temperatuur 8° worden. Als het recept van het drankje aangeeft dat de temperatuur 5 graden moet dalen, dan gooit ze er 5 koude blokkjes in.

- a De temperatuur in de ketel is -4°.

De heks doet er 6 warme blokkjes bij.

De temperatuur wordt

- b De temperatuur in de ketel is 8°.

De heks gooit er 10 koude blokkjes in.

De temperatuur wordt

- c De temperatuur in de ketel is -2°.

De heks gooit er 3 koude blokkjes in.

De temperatuur wordt

- 18 Vul deze tabel in:

begin-temperatuur	in de ketel worden gegooid	eind-temperatuur
-5°	6 warme blokkjes	...
2°	2 koude blokkjes	...
-6°	3 koude blokkjes	...
-12°	4 warme blokkjes	...
7°	12 koude blokkjes	...

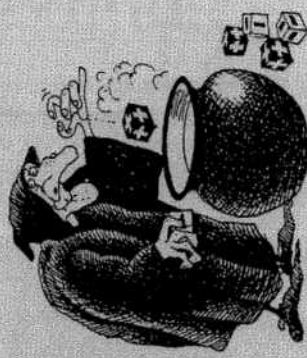
- 19 De opgaven in opdrachten 17 en 18 kun je zien als optelsommen:

$$17a \quad -4 + 6 = 2$$

$$17b \quad 8 + -10 = -2$$

$$17c \quad -2 + -3 = -5$$

Schrijf de opgaven in opdracht 18 als een optelling.



Figuur 2:

Wie nog nooit de ranglijst voor de eredivisie goed heeft bekeken, heeft een achterstand bij deze opgave. De tekst moet grondig bestudeerd worden voordat de vragen beantwoord kunnen worden.

Figuur 3:

De heks erij waarmee Moderne Wiskunde het optellen en aftrekken met negatieve getallen introduceert, heeft nogal wat stof doen opwaaien. Inmiddels zijn er docenten die de ervaring hebben dat het model werkt. Derde klassers die in de brugklas hebben leren rekenen met dit model, hebben een 'Aha Erlebnis' bij het woord heks.

2. Docenten dienen onderscheid te maken tussen zaken die *begrepen* moeten worden en zaken die *aangenomen* moeten worden. Onder dat laatste verstaan we zaken die afgesproken zijn, zoals definities en notaties. Zaken dus waar niets aan te begrijpen valt.

Een docent(e) zal wel expliciet moeten laten zien dat een afspraak logisch is of dat het zin heeft om een bepaalde notatie in te voeren. Dit geeft meteen aan dat notaties zinvol moeten zijn, anders moeten we er leerlingen niet mee opzadelen. Begrippen moeten zorgvuldig opgebouwd worden, we moeten dus begrippen niet zo maar laten 'vallen' en als vanzelfsprekend aannemen dat ieder wel weet waar we het over hebben. Een begrip moeten we nauwkeurig gebruiken, bij onnauwkeurig gebruik krijg je misverstanden, het is goed dat de leerlingen te laten zien.

Begrippen die ook een 'dagelijkse' betekenis hebben moeten nauwkeurig omschreven worden. We moeten ruis vermijden, we mogen niet het risico lopen in een latere fase te ontdekken met een ander begrip te werken.

3. Om wiskunde te bedrijven moet een leerling(e) *vaardigheden* beheersen, daarvoor heeft hij/zij wiskundige technieken nodig. Wanneer er te weinig kennis is van wiskundige technieken dreigt de leerling snel af te haken.

Het vergeten van technieken is een veelvoorkomend verschijnsel. Het is in dat geval beter om een techniek op te rakelen met behulp van het model waarmee die techniek is aangeleerd dan via een betekenisloos ezelsbruggetje. Dit betekent dat technieken aangeleerd moeten worden met behulp van modellen die de leerlingen aanspreken en bijblijven.

Bijvoorbeeld: het optellen en aftrekken met de warme en koude blokjes in *Moderne Wiskunde* vierde editie. (Zie figuur 3.)

We zullen moeten gaan uitzoeken welke modellen werken. Om dit uit te zoeken zullen we onder andere van de strategieën van leerlingen gebruik moeten maken.

4. In de gehele onderbouw zijn er regelmatig momenten van *oefenen*, een rijtje sommen.

Want laten we niet vergeten: *oefening is nodig*, is leuk als je het kunt, geeft *zelfvertrouwen* en een *mooie bladzij in je schrift*.

5. Het *toetsen* is een apart aandachtspunt in het nieuwe leerplan.

We weten nog veel te weinig van het psychologisch effect dat een negatieve toetsuitslag op een leerling heeft.

Bij 'manieren van toetsen' spelen veel variabelen een rol.

Bijvoorbeeld: de vraagstelling, de normering, de voorbereiding, de tijdsdruk, de consequenties van het resultaat, hoe de docent(e) het werk terug geeft, de herkansingsmogelijkheid.

De door de leerlingen opgedane wiskundige erva-

ringen zouden in hun volle breedheid beoordeeld moeten worden. Dit vraagt andere toetsvormen zoals werkstukken, voordrachten, open-boek-proefwerken, twee-traps-proefwerken, groepsbeoordeling, onderzoekjes.

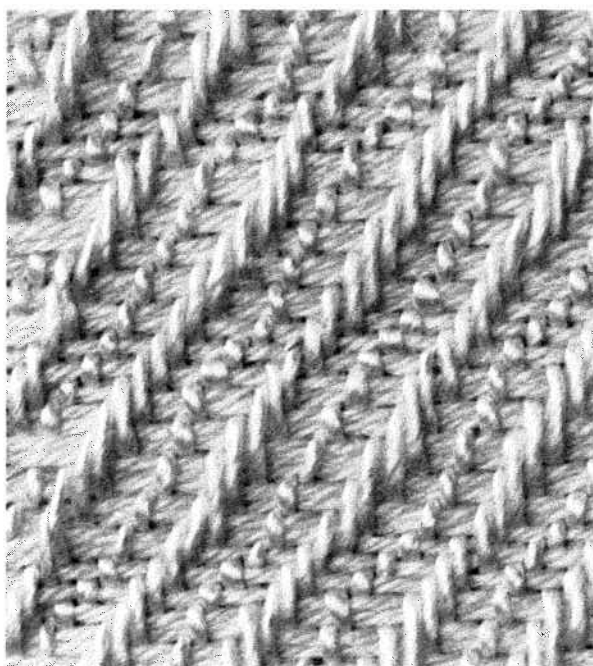
6. Het rekening houden met *individuele verschillen* en met groepsverschillen komt o.a. tot uiting in de aangeboden leerteksten. We denken hierbij aan:

- er zijn veelal mogelijkheden binnen een opdracht om zich te verdiepen;
- er zijn dikwijls verschillende leerwegen om tot een oplossing te komen;
- er zijn herhaaldelijk uitstapjes in de formele wiskunde mogelijk. Het werken met formules vinden sommige leerlingen heel prettig;
- regelmatig kan de klas als groep een nieuwe start maken met een nieuw onderwerp (iedere vier weken ongeveer);
- de breedheid van de onderwerpen en van de contexten is een neerslag van de breedte van de belangstelling en ervaringen van de leerlingen.

7. In het nieuwe wiskunde-onderwijs wordt *veel meer taal* gebruikt dan in de 'moderne wiskunde', waar veel in formule-taal stond.

Voor kinderen/volwassenen met een taalachterstand is dit een extra handicap. Het zorgvuldig werken met taal, niet te moeilijke woorden, niet te lange zinnen, plaatjes ter ondersteuning en goede lay-out met veel 'wit' kan deze achterstand helpen verkleinen.

De *onderwerpen* die deel uitmaken van het programma, moeten in samenhang met elkaar behandeld worden. Je zou kunnen spreken van een *schering-en-inslag-model*. In de volgende paragraaf gaan we uitvoeriger op de onderwerpen in.



Goed gekozen schering en inslag maken een weefwerk hecht en onverslijtbaar voor het leven ...

Onderwerpen

Wij hebben onze ideeën over de onderwerpen van het wiskunde-onderwijs in de onderbouw van het voortgezet onderwijs op een rijtje gezet. De opsomming die hierna volgt zal zeker niet volledig zijn, maar dient om een indruk van de verschillende onderwerpen te geven.

De *schering* van het programma zou gevormd kunnen worden door:

- (ruimte-)meetkunde
- rekenen en algebra
- kansrekenen en statistiek
- visualisering
- functies en hun grafieken.

Tijdens het behandelen van deze onderwerpen kan wat algemene kennis van de wiskunde behandeld worden, waarbij te denken valt aan:

- geschiedenis van de wiskunde
- redeneren
- computergebruik, automatische gegevensverwerking
- wis-'kunst'-ige onderwerpen.

Hierbij dient de samenwerking met andere vakken gestimuleerd te worden. Deze onderwerpen zijn door het programma heengeweven en vormen dus de *inslag*. Hieronder volgt een nadere uitwerking van de hoofdonderwerpen.

(Ruimte-)meetkunde

De ruimtemeetkunde is uitstekend geschikt om te laten aansluiten op de kennis die leerlingen eigenlijk al hebben. De nadruk dient te liggen op het tekenen; bijvoorbeeld perspectiefisch tekenen; maar ook het 'lezen', het 'zien' wat er op perspectiefische tekeningen eigenlijk staat.

De leerlingen kunnen werken met concrete materialen en het knippen en plakken van lichamen en modellen hoort erbij.

Onderwerpen:

- patronen, bijvoorbeeld vloeren, ook in het rooster;
- aanzichten, bouwtekeningen lezen, doorsneden tekenen;
- uitslagen van lichamen;
- schaal, spiegelen, rotatie, translatie;
- hoeken meten en construeren;
- omtrek, oppervlakte, inhoud, stelling van Pythagoras.

Rekenen en algebra

We stellen ons voor dat de algebra, het werken en rekenen met variabelen, ook bij de andere onderwerpen wordt voorbereid: bij de meetkunde met de regelmatige patronen, bij de grafieken en functies. We willen erg voorzichtig zijn met de algebra, in de klas werkend zullen juist hier de uitlooptmogelijkheden zitten om de (tempo)verschillen op te vangen en het gewenste niveau voor het vervolgonderwijs te bereiken.

Ondanks de grote nadruk op het toegepaste rekenen moeten de rijtjes sommen niet vergeten worden, het is wel eens lekker sommen te maken; en te zien wat je kunt.

53 In het Hogehuis-ziekenhuis werkten op een zekere dag 93 verpleegkundigen bij 300 patiënten. Op een dag in de zomer waren 25 verpleegkundigen met vakantie. Gelukkig waren er toen ook 100 patiënten minder. In welk geval was het aantal verpleegkundigen het gunstigst voor de patiënten?

54 Op diezelfde dag in de zomer lagen er in het Veldzicht-ziekenhuis 225 patiënten. Het aantal verpleegkundigen was daar 72. Vergelijk beide ziekenhuizen met behulp van de tabellen.

68	...	72
200	100	225	75	25	100

Figuur 4:
Verhoudingen.

Onderwerpen:

- schatten en afronden;
- eenvoudige breuken;
- verhoudingen;
- percentages;
- irrationale getallen (met mate!);
- rekenen met letters;
- gebruik van de rekenmachine;
- rekenen met machten.

Visualisering

In het dagelijks leven neemt visueel weergegeven informatie een steeds grotere plaats in. Het wiskunde-onderwijs zou bij deze tendens aan kunnen sluiten. Aan de ene kant kunnen gegevens uit het dagelijks leven als inspiratiebron dienen voor het wiskunde-onderwijs, aan de andere kant is het van belang dat wiskundige onderwerpen en begrippen visueel ondersteund worden.

Onderwerpen:

- matrices, tabellen; overzichtelijk weergeven;
- grafieken en diagrammen; ook het lezen en interpreteren hiervan;
- getallenlijn, assenstelsel;
- grafen.

Kansrekening en statistiek

De nadruk komt te liggen op onderzoeken, gegevens verzamelen en deze interpreteren en visualiseren.

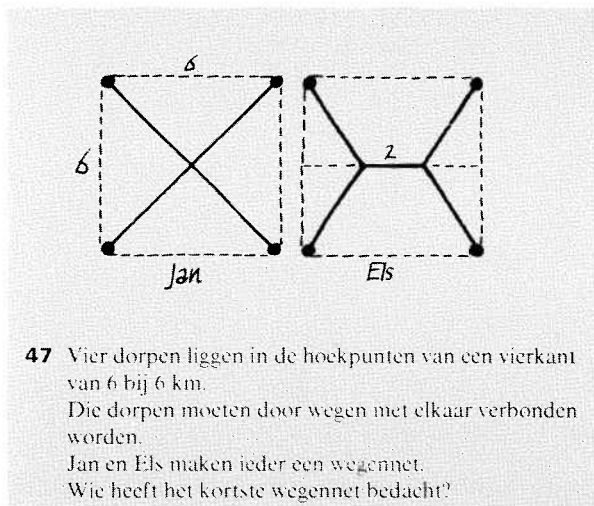
Onderwerpen:

- gemiddelde;
- diagrammen als staaf- en boomdiagram;
- klein beetje kansrekening, bijv. in de biologie, dobbelsteen spelletjes.

Functies en grafieken

Grafieken maken en lezen:

- gegevens in een tabel zetten en daar een grafiek bij maken;



Figuur 5:
Visualisering.

- een grafiek lezen: stijgen en dalen, toppen, snelheid van verandering, continu/discreet, wel/niet vloeiend;

- het opsporen van een verband in een tabel, het opstellen van een formule daarbij;
- grafiek verschuiven en de betekenis hiervan (met als uitloop het verband met formules);

Functionies:

- lineaire functionies; helling;
- periodieke functionies;
- groeifunctionies, limieten, begrip oneindig;
- constant produkt en hyperbolen;
- eenvoudige kwadratische functionies;
- gebieden en halfvlakken tekenen en optimaliseren.

De kwadratische functionies zouden zeer bescheiden aan bod moeten komen, evenals het rekenen met kwadratische vormen. Het voorbereidende werk moet in de onderbouw gebeuren, dus het begripsmatig met grafieken werken en variabelen kunnen gebruiken. Met behulp van de grafieken en functionies kunnen vergelijkingen en ongelijkheden worden opgelost. Daarna is het goed dat vaak in te oefenen en warm te houden met rijtjes sommen. Het kwadraat afsplitsen en de abc-formule zouden de laatste stap in het onderbouw programma kunnen zijn.

Al deze zaken moeten alleen geoefend worden voor zover ze functioneren in het vervolgonderwijs, met name het MBO en HAVO/VWO.

Vakantiecursus 1986

De vakantiecursussen voor leraren VWO en andere belangstellenden, die het Centrum voor Wiskunde en Informatica jaarlijks organiseert, zullen in 1986 plaatsvinden:

- te Amsterdam in het CWI op vrijdag 15 en zaterdag 16 augustus;
- te Eindhoven in de TH op donderdag 21 en vrijdag 22 augustus.

Terwille van degenen voor wie het werkjaar reeds zal zijn begonnen is de aanvangstijd op de eerste cursusdag in Amsterdam, 15 augustus, op 16.00 uur gesteld. Op de overige dagen vangt de cursus om 10.00 uur aan.

Het onderwerp van de cursus is 'MATRICES'. In een zevental lezingen zal iets getoond worden van de rol van matrices in verschillende delen van de Wiskunde en de toepassingen van Wiskunde.

Het programma zal de volgende lezingen omvatten:

- | | |
|------------------|---|
| F. van der Blij | - Matrices, wat doe je er alzo mee? |
| W.H. Haemers | - Matrices en grafen |
| A.J. Bosch | - Matrices en statistiek |
| O.J. Boxma | - Matrices en Markovprocessen |
| M. Kindt | - Lineair programmeren, in het bijzonder transportproblemen |
| J.M. Schumacher | - Lineaire modellen voor dynamische verschijnselen |
| J. van de Craats | - Matrices en meetkunde |

Voor inlichtingen, het programma en aanmeldingsformulieren:

CWI, Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam, Mw E. Both (020) 5924171, of C. E. Thomson (020) 5924011.