

De weidsheid van het vak

Nol van 't Riet

Wolters-Noordhoff, Groningen

Samenvatting

Bij de SLO is onlangs het boek 'Ik was wiskundeleraar' van Fred Goffree verschenen.

Het bevat vijf interviews met oude rotten uit het vak: Jan Karel Timmer, Johan H. Wansink (in november overleden op de gezegende leeftijd van 91 jaar), Pierre van Hiele, Piet Vredenduin en Kees van Baalen. Zij praten over wat wiskunde voor hen betekende en hoe zij hun vak als wiskundeleraar uitoefenden.

Er is een verhaal in omloop over Pieter van Vollenhoven uit de tijd dat hij net bekend was geworden. Hij brak toen zijn been en nauwelijks uit het gips brak hij meteen weer dat been, en dat ging zo een hele poos door...

Al jarenlang heb ik de stille wens dat mij ook eens zo iets overkomt. En voor al die maanden dat ik dan opeens de tijd heb om iets leuks te gaan doen, heb ik allerlei plannen. Eén zo'n plan is om dan de geschiedenis van de leerplanontwikkeling voor wiskunde na de Tweede Wereldoorlog te gaan schrijven, met als belangrijkste vragen: hoe is het leerplan van 1968 ontstaan en hoe hebben allerlei zinnige mensen erin kunnen geloven?

Toen ik in 1971 les ging geven had ik – achteraf gezien – na een week al kunnen weten dat er iets mis was met dat leerplan. Ik herinner me dat ik toen in mijn eerste brugklas moest grijpen naar de woorden 'dat mag niet' om leerlingen ervan te weerhouden $\{\emptyset\}$ te schrijven in situaties waarin \emptyset adequaat was.

Daar sta je dan... vol goede moed om aan begrip en inzicht te gaan werken, en dan zulke woorden moeten gebruiken om de situatie te redden...

Toen onlangs het boek 'Ik was wiskundeleraar' van Fred Goffree verscheen, schrok ik. Ik was bang dat een groot deel van het werk dat ik voor mezelf gereserveerd had, intussen door hem gedaan was. Gelukkig valt dat mee.

Summary

Recently the Foundation for Curriculum Development published a book (in Dutch) with the title (translated) "I was a mathematical teacher" by Fred Goffree.

It contains five interviews with old hands in didactics: Jan Karel Timmer, Johan H. Wansink (deceased past november at the age of 91 years), Pierre van Hiele, Piet Vredenduin and Kees van Baalen.

They discuss the meaning of mathematics in their lives and their practice as mathematics teachers.

Tijdsbeeld

Het boek is geen ordening van de geschiedenis. Het bevat vijf verhalen van mensen die (meer dan) hun beroepsmatige leven gewijd hebben aan het wiskunde-onderwijs. Jan Karel Timmer, Johan H. Wansink, Pierre van Hiele, Piet Vredenduin en Kees van Baalen. Vier grijze eminenties en een generatiegenoot, ook al is Kees van Baalen tien jaar ouder dan ik zelf ben.

Om allerlei redenen hoort hij niet in het rijtje thuis. Waar Timmer, Wansink, Van Hiele en Vredenduin niet meer dan 15 jaar in leeftijd verschillen, verschilt Kees van Baalen 26 jaar met de jongste van die vier. Zijn verhaal is ook in alle opzichten anders. Hij is geboren midden in de dertiger jaren en heeft de tijd niet meegemaakt waarin de anderen hun onderwijs-carrière begonnen. Een tijd van aktes halen, 's avonds laat daarvoor studeren, hoe meer aktes hoe beter, een tijd van veel solliciteren, kleine korte baantjes, verhuizen om den brode, werkloosheid. Een tijd ook dat de inspecteur een les kwam bijwonen en je soms verder hielp.

Wansink: "Bolkestein bleef het volle lesuur, terwijl het in die tijd de gewoonte was dat inspecteurs niet langer dan een kwartier bleven. Na afloop zei hij: "Ik heb met belangstelling geluisterd naar de manier waarop u diverse leerlingen het uur door hebt ingeschakeld. Maar vindt u het achteraf beschouwd zelf

niet zonde van de tijd om aan deze materie een heel uur te besteden?!"

Deze rake kritiek betekende voor mij inderdaad een kentering in de waardering van traditionele leerstof. Niet alleen hoe je de stof behandelt, maar ook welke stof je je leestijd waard acht, is een probleem van essentieel belang."

De keuze van leerstof, het werken in leerplancommissies en in examencommissies, het volgen en geven van wiskundecursussen, het geven van bijlessen, het actief meedoen aan het verenigingsleven, het zijn zaken waarmee de verhalen van de vier eerst geïnterviewden vol zitten.

Ook hier valt Kees van Baalen uit de toon: toen hij eenmaal gebroken had met de gangbare patronen van wiskunde en van onderwijs, kwam hij in een heel andere wereld terecht als die waarin de vier anderen leefden. Zijn wereld werd er een van anti-autoritair onderwijs, van tussen de kinderen zitten en kijken wat ze doen, van scheldwoordenstatistiek en consumentenonderzoek naar kauwgum, van leerlingen die op skateboards van bruggen afrijden en daar tijd-afstand-grafieken bij maken, van plaatsbepaling op zee met een sextant, van vervoersintensiteit op verschillende stroken van een weg, van cake bakken en snelheidsmetingen in de tram, van met je ogen dicht langs een rechte lijn door de sneeuw lopen.

Wat de onderlinge samenhang van de bundel betreft had ik daarom liever iemand anders gezien op de plaats van Kees van Baalen, zoals bijvoorbeeld Troelstra. En ik besef weer eens hoe jammer het is dat Krooshof zijn verhaal nooit op deze manier heeft verteld.

Toch ben ik ook blij met de opname in de bundel van Kees van Baalen: hij was voor mij als beginnend leraar in Amsterdam de goeroe van de kritische leraren, het kwade geweten: hij deed wat je zelf niet durfde.

Het leerplan van 1968

We leven momenteel in de tijd van de invoering van een nieuw leerplan: Hewet in het vwo, Hawex straks in het havo, gevolgd – laten we het hopen – door de onderbouw en door 'wiskunde voor iedereen'. Het sleutelbegrip is nu: toepassingen. Oftewel (ik probeer maar eens wat): wiskunde als hulpmiddel om over de wereld (breed opgevat) na te kunnen denken, om die te kunnen beschrijven en om die vervolgens zinvol manipuleerbaar te maken.

Er zijn sceptici. Die zeggen: "Het is een geloof, het gaat wel voorbij, over twintig jaar is er weer iets nieuws. De stereo werd in 1968 afgevoerd, nu komt ze weer terug. Wat is er eigenlijk nog over van 1968?"

En wat dat laatste betreft hebben ze gelijk.

Zelf vind ik dat ook het fascinerende van het leerplan van 1968: hoe hebben mensen daar zo sterk in kunnen geloven? En, even interessant: hoe kijken die mensen daar nu tegenaan? Treffend vond ik het om bij Vredenduin te lezen dat de invoering van het leerplan van 1968 tamelijk geforceerd is gegaan: in oktober 1966 werden de commissies geformeerd die het leer-

plan voor 1968 moesten formuleren.

Kernpunten waren de structuren met de verzamelingen als het alles doordrenkende idee. Van groot belang hierbij was dat de meetkunde (tot nu toe euclidisch) een heel ander gezicht zou moeten krijgen.

Vredenduin: "Voor meetkunde was ik er sterk voorstander van het structuurbegrip te beklemtonen. Ik volgde min of meer het programma van Felix Klein. Je begint met het definiëren van de transformaties en dan stel je dat twee figuren congruent zijn als er een samenstelling van translaties, rotaties en spiegelingen (je mag ook zeggen alleen van spiegelingen, maar dat is voor leerlingen te moeilijk) is, waardoor de ene figuur overgaat in de andere. Dan krijg je de bekende dingen, dat enerzijds die transformaties een groep vormen en anderzijds dat congruentie reflexief, symmetrisch en transitief is. Dat het dus een equivalentierelatie is. Dan haal je ook de vermenigvuldiging erbij. Vermenigvuldiging en translaties vormen samen weer een groep, de homothetische groep. En tenslotte vormen de vermenigvuldiging, spiegelingen, translaties en rotaties de gelijkvormigheidsgroep. Een mooi bouwwerk, maar ik geloof niet dat er een leerling was die er het mooie van inzag. Ik heb geprobeerd het uit te werken in het tweede deel van mijn serie voor de onderbouw. Daar heb ik wel mijn nek op gebroken; het was veel te abstract."

En, eveneens achteraf, voegt Vredenduin hier aan toe: "Men deed in het programma van 1968 een didactische keus: eerst de relaties, dan de functies. Die keus deed ik zelf ook, en daar heb ik enorm veel spijt van gekregen. Het is namelijk zo dat het relatiebegrip veel moeilijker is dan het functiebegrip. En dat laatste spreekt ook veel meer aan, je komt er als mens ook veel meer mee in aanraking. Je lengte is een functie van je leeftijd, ga zo maar door.

Overal waar je een bepaald lidwoord zet: de ... van ..., daar heb je een functie. Het functiebegrip kan je dus al heel vroeg aanbrengen. Je maakt een afstand/tijd-grafiek, een koortsgrafiek, een grafiek van de invoer, ga maar door. Dat zijn zaken die direct tot de verbeelding spreken. Een functie is een toevoeging, een koppeling. Een relatie een verzameling geordende paren. Dat is veel moeilijker.

In de logica is het gebruikelijk eerst relaties en dan functies te behandelen. Nu begrijp je waarom ik er eerst ook voor was. Als je streeft naar een mooie logische opbouw van het wiskundig systeem, dan zet je de relaties voorop, en behandel je de functies als bijzonder geval daarvan. Maar ja, dan komen de functies pas goed in de derde klas, terwijl je er eigenlijk veel eerder aan kunt beginnen."

Mijns inziens hebben we hier de fout van 1968 te pakken: beginnen met zeer algemene, abstracte begrippen en daarna pas komen tot het bijzondere. Logisch mooi, maar didactisch onjuist.

Vredenduin: "Eén van de belangrijke dingen van 1968 vind ik, dat je toen de mogelijkheid kreeg je scherper uit te drukken. Je kon daardoor ook beter je gedachten en je redeneringen formuleren. Je leerde nauwkeuriger denken. Althans de mogelijkheid daarvoor werd geopend, al werd ze niet altijd goed benut."

Dat nauwkeuriger kunnen denken strookte met één van zijn onderwijsdoelen: "Nou zie ik wiskunde niet als middel om te leren denken, begrijp me goed. Wiskunde is überhaupt van belang, maatschappelijk en wetenschappelijk.

De wiskundeleraar is echter in de gelegenheid zijn leerlingen ook nog zuiver te leren denken. Voor de leerling is dat van veel belang: hij kan daar zijn leven lang profijt van hebben."

Hoe onderging nu een gewone wiskundeleraar de komst van dit nieuwe leerplan?

Kees van Baalen: "Het was in die begintijd echt een kwestie van hard werken en overleven. Vooral toen ik ook nog natuurkunde in de hoogste klassen moest geven. De theorie en de vraagstukken had ik zelf nog nooit gehad op school, omdat het programma veranderd was. Toch kon je niet even op je gemak de zaak gaan bestuderen, het even een dagje laten liggen, want de volgende dag moest je weer de klas in.

Ik weet nog dat ik met moeite de vakantie haalde. Ik had geen enkele kritiek op het programma of op de examenopgaven. Ik beschouwde het leerplan als iets door God gegeven. Daaraan kan niet getornd worden, daarover kan geen twijfel bestaan. Die twijfel is bij mij pas veel later gekomen.

Het nieuwe programma dat in de jaren zestig gemaakt werd, interesseerde me helemaal niet. Niet dat ik het onbelangrijk vond, maar ik had genoeg aan mijn hoofd. Laat maar komen dacht ik destijds, ik zie wel als het zover is.

Toen het zover was, moesten we ineens allerlei verhalen aanhoren, onder meer van meneer Freudenthal. Wat krijgen we nu schrok ik, het was een totaal andere wereld waar ik in terecht was gekomen. Maar ook daarin probeerde ik me te schikken, de waarom-vraag werd door mij niet gesteld."

Maar er waren ook mensen die het vanaf het begin niet zo zagen zitten met dat nieuwe leerplan.

Timmer bijvoorbeeld, die in zijn verhaal een warm voorstander van 'echte' meetkunde blijkt te zijn: "Als je een oud gebouw wilt vervangen, dan moet je niet verder afbreken dan tot die gedeelten van de fundamenten, waarop het nieuwe bouwwerk opgetrokken kan worden. Wat de meetkunde betreft hebben de modernen te veel oude, stevige fundamenten nodeloos weggegraven. Er zijn heel wat situaties waarin de meetkunde vlotter het einddoel bereikt dan de algebra."

En: "Het funderende karakter van de verzamelingsleer zal maar weinig jonge kinderen interesseren. Voor wiskundebeginnelingen moet het woord verzameling ingeleid worden waar het functioneel is."

Ook waren er mensen, die falikant tegen het nieuwe leerplan waren.

Van Hiele heeft het nooit zien zitten. Hij ontleende de argumenten daarvoor aan zijn uit de vijftiger jaren stammende theorie: "Toen kwam de New Math, en ik vond dat een geweldige stap achteruit. Zo zag ik een rekenboekje uit de DDR in die dagen. Men wilde in de New Math het getalbegrip van kinderen baseren op de verzamelingenleer. In dat boekje zie je dan dat de getallen 1, 2, 3 en 4 gepresenteerd worden door

ongeordende verzamelingen. Vier stippen mogen pertinent niet geordend zijn stond erin, want dan levert dat niet een goed beeld van de verzameling 4.

Natuurlijk heb ik niets tegen Bourbaki als stroming voor wiskundigen, maar voor kinderen is de New Math gewoon idioot. Neem de verzamelingen in de brugklas. Er staat waarachtig in het begin van het programma dat er gedacht moet worden aan de verzamelingen \mathbb{N} en \mathbb{Z} en \mathbb{Q} en \mathbb{R} . Ik beweer dat die verzameling \mathbb{R} helemaal niet bestaat voor kinderen uit de brugklas en zelfs voor \mathbb{Q} is dat nog maar de vraag. In het begin ben ik als auteur nog wel eens een beetje meegegaan, maar toen ik later merkte dat er toch vrijheden kwamen heb ik gezegd dat we aan die onzin niet langer meededen. Verzamelingen komen niet eerder tevoorschijn dan wanneer ik er echt wiskundig mee vooruit kan. Dat bespaarde mij ervoor te moeten zaniken over een verzameling postzegels of een verzameling kinderen in de klas.

Ik was er erg ongelukkig over. Maar een aantal positieve veranderingen heb ik wel kunnen gebruiken. Zo kom je af van een heleboel onbelangrijke dingen van de meetkunde, maar de grondgedachte om met verzamelingen te beginnen, was helemaal fout."

Het visuele niveau

In het verlengde van zijn kritiek op het leerplan van 1968 wijst Van Hiele ook op andere ontwikkelingen in het huidige onderwijs die hem verontrusten: "De Mastery Learning is gebaseerd op een volkomen misvatting. Het is helemaal niet waar dat een onderwerp geheel gekend moet worden voor er aan een volgend, erop steunend onderwerp begonnen kan worden. Integendeel, De Miranda heeft er al meer dan twintig jaar geleden op gewezen, dat dikwijls de vrije oriëntatie van het eerste onderwerp samenvalt met de gebonden oriëntatie van het volgende.

De Telescoped Reteaching is als het ware de tegenhanger van de Mastery Learning. In de Telescoped Reteaching stop je met een onderwerp als je denkt dat een leerling toch niets meer opsteekt. Je gaat dan met het volgende verder en dikwijls brengen nieuwe verbanden de leerling tot het doorzien van de structuur die hun eerst te moeilijk was.

Zulke misvattingen als Mastery Learning worden mogelijk als je het contact verliest met het visuele niveau. Dit contact gaat sowieso verloren doordat de didactiek tegenwoordig geheel wordt bepaald door beroepsdidactici, beroepspedagogen en beroepspsychologen, de werkers uit het veld, de leraren, komen er niet meer aan te pas. Jammer, want ik vind ze niet minder competent en zij hebben zicht op het visuele niveau."

Het deed me denken aan een voorval op een studiebijeenkomst met veel didactici, dit voorjaar. We kregen daar het volgende probleem voorgelegd: "De heer X is vader van twee kinderen. Op zekere dag komen wij hem tegen met een jongen. Hij maakt bekend dat die jongen zijn zoon is. Hoe groot is de kans dat X de vader van twee zonen is.

Aan het eind van de 18e eeuw was er een meningsverschil over het antwoord. Is het $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3}$?



Lerarenconferentie 1949

Voor $\frac{1}{2}$ werd als volgt geredeneerd. Het geslacht van het andere kind heeft niets te maken met het geslacht van het geziene kind. De kans dat het andere kind ook een jongen is, is $\frac{1}{2}$. En dus is de kans dat X vader van twee zonen is ook $\frac{1}{2}$.

Voor $\frac{1}{3}$ werd als volgt geredeneerd. Bij twee kinderen zijn er als mogelijkheden: MM, MJ, JM, JJ. Omdat ik X met een jongen heb gezien valt de mogelijkheid MM af. Er resteren aldus drie mogelijkheden waarvan er één juist is. De gevraagde kans is dus $\frac{1}{3}$.

Welke van de bovenstaande redeneringen is juist?"

Ik vertelde na afloop dat ik de oplossing had 'gezien' doordat ik met mijn geestesoog opeens de vader met zijn zoon had gezien, mij tegemoet komend op een zonovergoten wandelpad tussen groene weilanden. Ik besepte toen heel helder en onontkoombaar dat zijn tweede kind thuis zat en of een jongen of een meisje was. Dit was zo inzichtelijk, dat ik niet meer over de andere redenering wenste na te denken. Ik vroeg vervolgens of anderen dat ook hadden: of ze visuele voorstellingen hadden bij dit soort verhaal-opgaven? De didactici keken mij nogal glazig aan: ze losten zulke problemen gewoon op.

Piet van Wingerden, een doodgevone wiskundeleer, kwam me na afloop vertellen dat hij ook wel zulke visuele voorstellingen had.

Van Hiele over het visuele niveau in zijn theorie: "Dat visuele niveau noemden wij vroeger het 'nulde' niveau. Dat komt omdat het er later aangeplakt is, we

zagen het eerst niet als een niveau. Langzamerhand werd het ons steeds duidelijker dat dit toch wel heel belangrijk is. De eerste die dat zag was Wansink, die zei: "Van Hiele, waar ik nu het meest nieuwsgierig naar ben, dat is dat nulde niveau.

Ik waardeer zijn intuïtie: hij heeft echt de kern van de zaak aangewezen."

De theorie van Van Hiele

De vraag waar het in het wiskunde-onderwijs nu om gaat, blijft na zulke verhalen uiterst actueel.

Van Hiele: "Mevrouw Ehrenfest verstond onder wiskunde: de kracht leren voelen van je eigen denken."

Ook Mannoury heeft, tijdens zijn studie, een grote invloed op hem gehad: "Soms was hij filosofisch bezig. Hij hield ons altijd voor dat ècht exact formuleren onmogelijk was. Dat is ook mijn kerngedachte: probeer niet echt exact te zijn, want dat kàn niet."

Zelf was Van Hiele (met excuses aan Ed Leeftang) een echte Montessoriman: "Eerst moet je de kinderen als het ware uitnodigen tot het beschrijvende niveau. Je kunt ze daartoe niet dwingen." Daarbij komt dat hij altijd een groot respect had voor het denken van zijn leerlingen: "Het is merkwaardig hoe sommige mensen leerlingen en leren bekijken. Als iets niet lukt wordt vaak de schuld bij het kind gelegd. Bij mij was het altijd zo dat als iets niet goed ging, ik mezelf de vraag stelde wat er aan de hand kon zijn. Ik heb

vrijwel nooit gedacht, een leerling is te stom. Dat is een veel te gemakkelijke oplossing. Altijd probeerde ik na te gaan of er nog een andere weg was."

Over zijn theorie zegt hij samenvattend: "In Piagets werk komt duidelijk naar voren dat er een kloof bestaat tussen niet begrijpen en wel begrijpen. Een leerling snapt aanvankelijk ergens geen donder van en even later dan snapt hij het ineens wel. Dat verschijnsel wijst op het overgaan van het ene niveau op het andere. Bij Piaget kun je er alleen nooit achterkomen of het van visueel naar beschrijvend of naar theoretisch is (...)

Maar hij is wel degene die het eerst over die kloof van onverstaanbaarheid heeft gesproken. Zij aanbeveling is dat je niet hoeft te proberen ze over die kloof heen te helpen. Als ze aan de verkeerde kant ervan verkeren, dan zullen ze de zaken aan de overkant niet begrijpen.

Daarin ligt ook het verschil tussen onze opvattingen. Ik beweer dat er een leerproces mogelijk is waarbij je van het ene naar het andere gaat. Dat leerproces kan weleens een paar jaar duren, maar er is een leerproces."

De uitwerking van zijn theorie is volgens Van Hiele het best geslaagd in de lbo-delen van Van A tot Z. Op bladzijde 116 en 117 geeft hij in kort bestek een beschrijving van de opzet van deze delen.

Over de titel van zijn proefschrift vertelt Van Hiele nog een aardige anekdote. Op het Nieuw Lyceum in Bilthoven waar hij destijds werkte, wilde men dat hij minder werkte aan het bijbrengen van inzicht en dat hij meer leerlingen door het examen sleepte, desnoods door ze vlak voor het mondeling examen precies te vertellen wat je ging vragen.

Toen hij dit aan Langeveld vertelde, reageerde deze met: "Gaat het conflict over inzicht? Maar dan heb ik de titel voor de dissertatie, de problematiek van het inzicht!"

De eigenheid van de leraar

We schrijven dan de vijftiger jaren. Het was een tijd waarin je 'eindeloos veel tijd had', 'heerlijk kon grasduinen in de grensgebieden', ook die tussen de vakken'.

Dat is wel iets anders dan de richting waarin het onderwijs tegenwoordig gaat.

Van Hiele: "Ik vind de huidige ontwikkeling van het onderwijs eigenlijk helemaal niet leuk. Men streeft er steeds meer naar eindexamens met computers te laten beoordelen, waarbij het steeds moeilijker wordt daar nog oorspronkelijke ideeën te spuien."

Meermalen kom je in de bundel verhalen tegen over dat goede oude mondelinge examen.

Vredenduin: "Het mondelinge examen was voor mij een tijd van hevige spanning. Die kwam niet voort uit angst, waarvoor dan ook, maar werd veroorzaakt door de wetenschap dat je alles uit de leerling moest zien te halen wat erin zat. Niet meer en niet minder. Dat kostte een heleboel energie. Eigenlijk waren die mondelinge examens didactische hoogstandjes, de beste didactische momenten uit mijn leven. Je hebt

een levend mens voor je, de kandidaat, en die moet je leiden, zodat hij tot zijn recht kan komen, zodat hij kan laten zien wat hij kan."

Kom daar vandaag de dag nog eens om met onze normbesprekingen waar getwist wordt over tienden voor het al of niet apart bij de oplossing vermelden van een tekenverloopschema van een functie.

Vredenduin: "Later heb ik zelf ook verschillende malen gevochten voor een eigenlijk te hoog cijfer, als ik wist dat het rechtvaardig was en voor de leerling van groot belang. Helaas kan dat tegenwoordig niet meer. Alles gebeurt nu zo objectief volgens de regels. Warme menselijkheid is niet meer mogelijk."

Uit al zulke verhalen komt een beeld naar voren van een wiskundeleraar die zijn vak hanteerde om bij en in en met leerlingen iets te bereiken, bepaalde ontwikkelingen in het denken van de leerlingen te stimuleren. Een wiskundeleraar ook, die veel ruimte had voor eigen visies op wat hij met dat vak bij leerlingen wilde bereiken.

Wansink: "De wijze van lesgeven hangt in de eerste plaats af van de persoonlijkheid van de docent, pas in de tweede plaats van de stof die hij onderwijst. Ik ben me ervan bewust dat ik hiermee een extreem standpunt inneem. Steeds heb ik mij ingespannen de klas in zijn geheel aan te kijken en daarbij de afzonderlijke gezichten te blijven zien. En dan probeerde ik het zover te brengen, dat al die gezichten lieten merken dat er iets van het onderwerp in kwestie begrepen was. Een monoloog is zo'n les nooit!"

Zo kreeg Timmer eens een brief van een oud-leerlinge:

"Ze schreef: "Jij gaf dynamisch les en van jouw denksysteem heb ik gebruik kunnen maken bij mijn muziekstudie." Misschien heeft die brief wel bijgedragen tot een drastische verandering in mijn opvatting over wiskundeles geven. Ik heb haar later gesproken en gezegd: "Evelien wat bedoelde je met dat dynamisch lesgeven?", want ik had dat niet begrepen. Haar antwoord verbaasde me in hoge mate. Ze zei: "Ik zie je nog lopen met een stuk krijt in je hand hoog in de lucht. De basis van de driehoek was de rand van het podium en dat krijt was de top van de driehoek. De driehoek, die je zo maakte was dan een veranderlijke driehoek." En dat was het dynamische, dus echt in de zin van ... ik bewoog mijn lichaam om daarmee de wiskunde tot steun te zijn."

Het interview met Timmer is een verrukkelijke opsomming van didactische vondsten die inderdaad één ding met elkaar gemeen hebben: iets dynamisch. Zo heette de formule $a^2 - b^2$ de molenwiekformule op grond van een meetkundige afleiding, werkte hij in zijn boeken met 'beeldromans' om constructies stap voor stap te laten zien, moesten leerlingen voor de klas komen om getallen op de getallenlijn uit te beelden en werden klaslokalen vol denkbeeldig water gepompt. Per slot van rekening "moet iedere onderwijzman een komediant kunnen zijn".

Kees van Baalen: "Ik kom trouwens met mijn aanpak van de wiskunde vaak op dezelfde dingen terecht. De

kinderen zeiden het zelf weleens: of we nu naar het zwembad gaan of naar de ijsbaan, we komen steeds op hetzelfde terecht. Prima, zei ik dan, dat is nu juist wiskunde. Die zit in ons hoofd, daarmee kunnen we de hele werkelijkheid bewerken, waar we ook naar toe gaan, wat we ook doen.

En dan komt later de vraag wel hoe die wiskunde op zich in elkaar zit. Dat gebeurt als ze ouder worden, en ze wel degelijk belangstelling krijgen voor wat wij wiskunde noemen, en hoe dat allemaal netjes in elkaar zit.

Ik vermoed dat vandaag de dag een groot deel van de ongemotiveerdheid van leerlingen niet echt voortkomt uit het gebrek aan belangstelling. Maar dat ze, net als de echte wiskundigen, op fundamentele problemen stuiten. Net als de grote denkers dat deden, voordat die wiskunde er was. Ik bedoel vragen als: wat is tellen nu eigenlijk? En: wat is een verzameling? Dat soort vragen. Natuurlijk formuleren ze deze niet zoals ik dat doe, maar ik heb het vermoeden dat hun vragen in wezen dezelfde zijn. Ik denk dat zij op hun manier er ook mee worstelen. Wij moeten dan op onze beurt didactisch gezien een heel andere houding aannemen. Niet van: ik ga even dat wiskundige begrip aanbrenge, maar gewoon doorgaan op hun verwondering en ermee verder spelen. Je noemde zojuist het begrip oneindig. Dat is een leuk voorbeeld. Russell schiep het beeld van de oneindig lange trein. De locomotief gaat rijden, even later komt de eerste wagen in beweging, weer iets later de volgende... enz. De laatste wagen blijft eeuwig stilstaan. Verwondering!"

En even later sprekend over wat wetenschap nu eigenlijk is, zegt hij: "De oude vragen komen weer terug. Wat is tellen eigenlijk? En wanneer kun je 'dingen' optellen? Het begrip identiteit, fundamenteel voor de wiskunde, is hiermee onmisbaar. Hoe gaan sociologen daarmee om? Ze sturen vragenlijsten rond, en de antwoorden die terugkomen, worden als kardinaalgetallen behandeld en zomaar opgeteld. Weet men wel wat er dan opgeteld wordt, wat die som betekent en wat voor soort conclusies er getrokken mogen worden?

Vergelijk dat trouwens eens met rapportcijfers. Hoe komen leraren daaraan? Ze tellen een aantal proefwerkcijfers op om dan het gemiddelde te bepalen. Als wiskundige moet je daar toch een vraagteken bijzetten. Wat voor soort getallen zijn dat? Kardinaalgetallen of ordinaalgetallen, of zijn het slechts symbolen zonder enige getalwaarde? Als je het mij vraagt, het laatste. Maar leraren maken er rekengetallen van en

kunnen er dan alle kanten mee op. Zelfs wiskundeleraaren!"

Deze ontboezeming voert mij tenslotte terug naar Timmer en naar iets eigens van hem waar ik ontzettend jaloers op ben. Hij had een geheel eigen systeem om tot rapportcijfers te komen: "Het berust op de gedachte, dat iedereen op een repetitie weleens een uitzonderlijk cijfer kan krijgen, dat veel minder zwaar moet tellen. Een essentiële vraag is: Hoe vinden we een trendlijn? De mediaan tussen 4,5 en 9, dat is 5, is wat betrouwbaarder dan het gemiddelde 6. Met weglating van eerdere en minder geslaagde pogingen, volgt hier mijn recept: Iedere leerling heeft op elk moment drie getallen (cijfers) waarvan de mediaan de stand van zaken aangeeft. Denk maar 4, 5, 9, opklimmend gerangschikt, stand 5. Nu behaalt hij een 3. Dan heeft hij geen drie maar vier getallen: 3, 4, 5, 9. Van die vier zijn de randgetallen 3 en 9 de minst betrouwbare. Als ze samen even zwaar wegen als de 4 en 5 elk, dan vervangen we ze door hun gemiddelde, 6. Zo heeft onze leerling weer een drietal, en wel 4, 5, 6, waarbij mediaan en gemiddelde beide een rol hebben gespeeld."

Mijn jaloezie heeft vooral te maken met de vraag of ik – gesteld dat ik zo iets bedacht had – gedurfd zou hebben om het toe te passen? En zou het in de school aanvaard zijn?

Tot slot

Het boek "Ik was wiskundeleraar" kost f 17,50 is te bestellen bij de SLO, afd. Verkoop, bestelnummer 3.433.4110, Postbus 2041, 7500 CA Enschede.

Voor leden van de NVvW is het boek, zolang de voorraad strekt, te koop door overmaking van f 10,- op giro 143917 t.n.v. Nieuwe Vereniging van Wiskundeleraars te Amsterdam onder vermelding van 1 exemplaar boek Goffree.

Het geheel is veel rijker dan ik in het bovenstaande kon schetsen. Dat waren slechts gedachten die bij mij opkwamen bij eerste lezing. Voor het vastleggen van de vijf verhalen kunnen we Fred Goffree niet dankbaar genoeg zijn. Ze laten op indrukwekkende wijze de weidsheid van het vak van wiskundeleraar zien. Het lezen ervan deed mij beseffen dat veel van waarde in dit vak zomaar kan verdwijnen als we niet opletten. U moet niet gek opkijken als u binnenkort hoort dat ik mijn been heb gebroken.

Open Conferentie Wiskundendidactiek

Op 27, 28 februari, 1 maart 1986 wordt er in Ede een Open Conferentie Wiskundendidactiek gehouden. Er is gelegenheid tot het geven van/meedoen aan voordrachten, werkgroepen, studiegroepen. Nadere inlichtingen bij het Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Leraarsopleiding van de RU Utrecht, Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht (of telefonisch bij de secretaresse Ria Becx, 030-533776).